ಪ್ರಸಾರಾಂಗ, ಬೆಂಗಳೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ, ಬೆಂಗಳೂರು

ವಿಶೇಷೋಪನ್ಯಾಸ 1978–79 (16)

ಪ್ರೊ॥ ಕೆ. ರಾಮಚಂದ್ರ, ಅವರು
(ಟಾಟಾ ಇನ್‌ಸ್ಟಿಟ್ಯೂಟ್ ಆಫ್ ಫಂಡಮೆಂಟಲ್ ರಿಸರ್ಚ್. ಹೋಮಿಬಾಬಾ ರೋಡು, ಬೊಂಬಾಯಿ 400005).

ಮಾರ್ಚ್ 16, 1979 ರಂದು ಸಂಜೆ 6-00 ಗಂಟೆಗೆ
ಸೆಂಟ್ರಲ್ ಕಾಲೇಜಿನ ಸೆನೆಟ್ ಭವನದಲ್ಲಿ

"ಮಾನವನ ಜೀವನದ ಹಾಸುಹೊಕ್ಕಾಗಿರುವ 1,2,3,4,5..."
ಎಂಬ ವಿಷಯದ ಬಗ್ಗೆ ಉಪನ್ಯಾಸ ನೀಡಲು ಒಪ್ಪಿದ್ದಾರೆ

ಪ್ರೊ॥ ಟಿ. ರಮೇಶನ್ ಅವರು
(ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ವಿಭಾಗದ ಮುಖ್ಯಸ್ಥರು. ಸೆಂಟ್ರಲ್ ಕಾಲೇಜು. ಬೆಂಗಳೂರು)
ಅಧ್ಯಕ್ಷತೆ ವಹಿಸುವರು

ತಮಗೆ ಆದರದ ಸ್ವಾಗತ

ಹೆಚ್. ಆರ್. ದಾಸೇಗೌಡ
ನಿರ್ದೇಶಕ

ರಕ್ಷಾಪುಟ (ಒಳಪುಟಗಳು (i), (ii) ಮತ್ತು 1 ರಿಂದ 23 ರವರೆಗೆ) = 26)

ಮಾನವಜೀವನದ ಹಾಸುಹೊಕ್ಕಾಗಿರುವ

1, 2, 3, 4, 5, ...

ಲೇಖಕರು. ಡಾ. ರಾಮಚಂದ್ರ.

ಮುನ್ನುಡಿ

ಬೆಂಗಳೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ (ನಾನು ಪ್ರಾಸಂಗ ಮಾಡುತ್ತಿದ್ದಾಗ ಅದು ಮೈಸೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದ ಒಂದು ಮುಖ್ಯವಾದ ಭಾಗವಾದ ಸೆಂಟ್ರಲ್ ಕಾಲೇಜಾಗಿತ್ತು), ಸೆಂಟ್ರಲ್ ಕಾಲೇಜು ಇತ್ಯಾದಿಗಳು ನನ್ನ ವಿದ್ಯಾಭ್ಯಾಸದ ಒಂದು ಅತಿಮುಖ್ಯವಾದ ಘಟ್ಟ. ಹಾಗೂ ಪ್ರಾಚೀನ ಪರಂಪರೆಯ ಗುರುಕುಲಗಳ ಪವಿತ್ರನೆನಪನ್ನು ನನ್ನ ಮನಃಪಟಲದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಕ್ಷಣದಲ್ಲಿಯೂ ಹಸಿಯಹಸಿರಾಗಿ ಅಚ್ಚಳಿಯದೆ ಇರಿಸಿರುವ ಅಧ್ಯಾಪಕರುಗಳ ಪ್ರೀತಿಯುತ ಆಶೀರ್ವಾದಗಳು ಇತ್ಯಾದಿ ಭಾಗ್ಯಗಳನ್ನು ಕರುಣಿಸಿದ ಒಂದು ಗುರುಕುಲ. ಸಮೀಪದಲ್ಲಿಯೇ ಇರುವ ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಪುಸ್ತಕ ಭಂಡಾರದಲ್ಲಿನ ಪ್ರೊ॥ ಜಿ. ಹೆಚ್. ಹಾರ್ಡಿಯವರ "RAMANUJAN, (TWELVE LECTURES ON ~~RAMANUJAN~~ SUBJECTS, ~~INSPIRED~~ SUGGESTED BY HIS LIFE AND WORKS)" ಎಂಬ ಗ್ರಂಥ ನನ್ನ ಜೀವನದ ದಿಕ್ಸೂಚಿಯಾಯಿತು. ಇಂದಿಗೂ ಅದೇ ದಿಕ್ಸೂಚಿ. ಮುಂದೂ ಅದೇ. ರಾಮಾನುಜನ್‌ರವರ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರ ಕೃತಿಗಳಿಂದ ನನ್ನ ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿ ಮೂಡಿದ ಅಭಿಪ್ರಾಯವೇನು? ಎಂದು ಯಾರಾದರೂ ಪ್ರಶ್ನಿಸಿದರೆ, ಅದಕ್ಕೆ ನನ್ನ ಉತ್ತರ ಇದು. ಒಂದು ಹುಲ್ಲುಗಾವಲು ಮತ್ತು ಅದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಚೆಂಡುಗಳ ಗುಂಪು ಇರುವ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಒಬ್ಬ ಮೇಧಾವಿ ಚಿತ್ರಕಾರ ರಚಿಸಿದರೆ ಮಾನವರು ಭ್ರಮಿಸುವುದಂತಿರಲಿ; ಹುಲಿ ಸಿಂಹಗಳೂ ಕೂಡ ನಿಜವಾದ ಚೆಂಡುಗಳೇ. ಏನೋ ಎಂದು ಭ್ರಮಿಸುತ್ತವೆ. ಒಬ್ಬ ಮೇಧಾವಿ ಸಂಗೀತಗಾರ ಹಾಡಿದರೆ ಪ್ರಾಣಿಗಳೂ ನಾದಸುಧೆಯನ್ನು ಸವಿಯುತ್ತವೆ. ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಸವಿ ಮಾನವರಿಂದ ಮಾತ್ರ ಸವಿಯಲು ಸಾಧ್ಯ. ಏಕೆಂದರೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ

ಅಧ್ಯಾಯ 1

ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ದೈವದತ್ತವೋ? ಏನೋ?

ಆದಿಮಾನವನಿಗೆ 1,2,3,4,5,... ಇತ್ಯಾದಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಲಿಸಿದವರಾರು? ಒಬ್ಬ ಮನುಷ್ಯ, ಎರಡು ಜಿಂಕೆಗಳು, ಮೂರು ಹುಲಿಗಳು, ನಾಲ್ಕು ಬೆಟ್ಟಗಳು, ಐದು ನದಿಗಳು, ಎಣಿಸಲಾಗದಷ್ಟು ನಕ್ಷತ್ರಗಳು. ಇವೆಲ್ಲವೂ ಜ್ಞಾನಭಂಡಾರದಲ್ಲಿ ಆದಿಮಾನವನಷ್ಟೇ ಅನಾದಿಕೃತಿಗಳು. ವೇದ, ಉಪನಿಷತ್ತುಗಳ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ರಚಿತವಾದ ರುದ್ರಾಭಿಷೇಕ ಮಂತ್ರದಲ್ಲಿನ —

"ಓಂ ಏಕಾ ಚ ಮೇ ತಿಸ್ರಶ್ಚ ಮೇ ಪಂಚ ಚ ಮೇ ಸಪ್ತ ಚ ಮೇ
ನವ ಚ ಮ ಏಕಾದಶ ಚ ಮೇ ತ್ರಯೋದಶ ಚ ಮೇ ಪಂಚದಶ ಚ ಮೇ
ಸಪ್ತದಶ ಚ ಮೇ ನವದಶ ಚ ಮ ಏಕವಿಂಶತಿಶ್ಚ ಮೇ ತ್ರಯೋವಿಂಶತಿಶ್ಚ ಮೇ
ಪಂಚವಿಂಶತಿಶ್ಚ ಮೇ ಸಪ್ತವಿಂಶತಿಶ್ಚ ಮೇ ನವವಿಂಶತಿಶ್ಚ ಮ ಏಕತ್ರಿಂ
ಶಚ್ಚ ಮೇ ತ್ರಯಸ್ತ್ರಿಂಶಚ್ಚ ಮೇ ಚತಸ್ರಶ್ಚ ಮೇ ಅಷ್ಟೌ ಚ ಮೇ
ದ್ವಾದಶ ಚ ಮೇ ಷೋಡಶ ಚ ಮೇ ವಿಂಶತಿಶ್ಚ ಮೇ ಚತುರ್ವಿಂಶತಿಶ್ಚ ಮೇ
ಅಷ್ಟಾವಿಂಶತಿಶ್ಚ ಮೇ ದ್ವಾತ್ರಿಂಶಚ್ಚ ಮೇ ಷಟ್ತ್ರಿಂಶಚ್ಚ ಮೇ ಚತ್ವಾರಿಂ
ಶಚ್ಚ ಮೇ ಚತುಶ್ಚತ್ವಾರಿಂಶಚ್ಚ ಮೇ ಅಷ್ಟಾಚತ್ವಾರಿಂಶಚ್ಚ ಮೇ
...."

ಇತ್ಯಾದಿ ಋಕ್ಕುಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಈಶ್ವರನ ಗಂಭೀರವಾದ ಹಾಗೂ ಪವಿತ್ರವಾದ ಓಂಕಾರದೊಡನೆ ಬೆರೆತು ಅಲೆಅಲೆಯಾಗಿ ಬಂದು ನಮ್ಮ ಹೃದಯಕಮಲದಲ್ಲಿರುವ ಉಮಾಮಹೇಶ್ವರನಿಗೆ ಅಮೃತಾಭಿಷೇಕವಾಗುತ್ತಿರುವುದೋ ಎಂಬ ಭಾವನೆಗಳನ್ನು ಕೊಡುತ್ತವೆ. ತೈತ್ತಿರೀಯ ಉಪನಿಷತ್ತಿನ ಒಂದು ಭಾಗವಾದ ರುದ್ರಾಭಿಷೇಕ ಮಂತ್ರದ ಕೆಲವು ಪಂಕ್ತಿಗಳು, ಮೇಲಿನ ಮಂತ್ರಗಳು. ಈ ಪಂಕ್ತಿಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರಿಂದ ಮೂವತ್ತುಮೂರರವರೆಗಿನ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅನಂತರ ನಾಲ್ಕರಿಂದ ನಲವತ್ತೆಂಟರವರೆಗಿನ ಎಲ್ಲಾ ~~ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳು~~ ನಾಲ್ಕರ ಗುಣಕ

ಲೀನ "ಚಾತುರ್ಯ ಮತ್ತು ಬಿಡಿಸಲಾಗದಂತೆ ತೋರುವ ಮನೋಹರವಾದ ಹಾಗೂ ಆಶ್ಚರ್ಯಕರವಾದ ಕಗ್ಗಂಟುಗಳ ಬಿಡಿಸುವಿಕೆ", ಇದೇ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಮೂಲಗುರಿ. ನೋಡಲು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಲಕರಿಗೂ ಕೂಡ ತಿಳಿಯುವಷ್ಟು ಸರಳವಾಗಿರುತ್ತವೆ ಗಂಟುಗಳು. ಆದರೆ ಬಿಡಿಸುವುದು ಒಂದು ದೈವಿಕ ಕಲೆ. ಇಂತಹ ಅನೇಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಚಿಕ್ಕ ಚಿಕ್ಕ ಮಕ್ಕಳೂ ಕೂಡ ಮಂಡಿಸಬಹುದು. ಆದರೆ ದೊಡ್ಡದೊಡ್ಡ ವಿದ್ವಾಂಸರು ಶತಮಾನಗಳಗಟ್ಟಲೆ ಪ್ರಯತ್ನಪಟ್ಟರೂ ಬಿಡಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗದಿರಬಹುದು. ಈ ವಿಚಾರವಾಗಿ ನನ್ನ ಕೆಲವು ಮಾತುಗಳನ್ನು ಸಣ್ಣ ಪುಸ್ತಕ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಪ್ರಕಟಿಸುವುದಾಗಿ ತಿಳಿಸಿರುವ ಬೆಂಗಳೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯದ ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟ ಅಧಿಕಾರಿಗಳಿಗೆ ನನ್ನ ಕೃತಜ್ಞತೆಯನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಲು ಸಂತೋಷವಾಗುತ್ತದೆ.

ಡಾ. ರಾಮಚಂದ್ರ.

ಟಾಟಾ ಮೂಲಭೂತ ವಿಜ್ಞಾನ ಮಂದಿರ,
(ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ವಿಭಾಗದ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರು)
ಹೋಮಿಭಾಭಾ ರೋಡು,
ಕೊಲಾಬಾ, ಬೊಂಬಾಯಿ 400005.

ದಿನಾಂಕ 16-3-1979.
[illegible]

ಗಳೂ ಬರುತ್ತವೆ. ಪ್ರಾಯಶಃ ವೇದಗಳ ಕಾಲದಲ್ಲಿನ ಪ್ರಗತಿಗಳು ಇವೇ ಮೊದಲಾದ ಅನೇಕ ಜ್ಯೋತಿಶ್ಶಾಸ್ತ್ರದ ಲೆಖ್ಖಾಚಾರಗಳಿಂದ ಭಾರತೀಯರು ಮತ್ತು ಇತರರಿಗೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವಿಚಾರ ಹೆಚ್ಚು ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ತಿಳಿದಿತ್ತು ಎಂದು ನಂಬಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಏಕ, ದಶ, ಶತ, ಸಹಸ್ರ, ದಶಸಹಸ್ರ, ಲಕ್ಷ, ದಶಲಕ್ಷ, ಕೋಟಿ, ದಶಕೋಟಿ, ... ಇತ್ಯಾದಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಬಹಳಷ್ಟು ಪ್ರಾಚೀನವಾದವು ಎಂದು ನಂಬಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ. ಈ ಬೃಹತ್ಸಂಖ್ಯೆಗಳು "ಮಹತೋಮಹೀಯಾನ್" ಎಂಬ ಉಪನಿಷದ್ವಾಕ್ಯವನ್ನು ನೆನಪಿಗೆ ತರುತ್ತವೆ, ಇದಕ್ಕೆ ವಿರೋಧವಾದ $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \frac{1}{100000}, \frac{1}{1000000}, \frac{1}{10000000}, \frac{1}{100000000}, \ldots$ ಇತ್ಯಾದಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು "ಅಣೋರಣೀಯಾನ್" ಎಂಬ ಉಪನಿಷದ್ವಾಕ್ಯವನ್ನು ನೆನಪಿಗೆ ತರುತ್ತವೆ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಪ್ರಾಚೀನವೇ ಎಂದು ನಂಬಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ.

ಅಧ್ಯಾಯ ೨

ಭಾರತೀಯರೂ, ಗ್ರೀಕರೂ ಮತ್ತು ಗಣಿತ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು.

ವೇದಗಳ ಕಾಲದ ಮಹರ್ಷಿಗಳು, ಆರ್ಯಭಟ, ಬ್ರಹ್ಮಗುಪ್ತ, ಭಾಸ್ಕರಾಚಾರ್ಯ, ಮೊದಲಾದವರು ನಡೆಸಿದ ಸಂಶೋಧನೆಗಳನ್ನು ಇಂದು ಸಮಗ್ರವಾಗಿ ತಿಳಿಯಲು ಬಾಕಿಯಾಗಿದೆ. ಈಗಾಗಲೇ ಹಲವು ಕೃತಿಗಳು ಈ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರೆದಿವೆ. ಪ್ರಾಚೀನ ಭಾರತೀಯರು ಅನೇಕ ಮುಖ್ಯವಾದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದಿದ್ದರು (ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ಭಾಸ್ಕರಾಚಾರ್ಯರ $x^2-61y^2=1$ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರಕ್ಕೆ ಮುಂತಾದುವು). ಇವರ ಇತಿಹಾಸವು ಅನೇಕ ಪಾಶ್ಚಾತ್ಯ ಮತ್ತು ಗ್ರೀಕರ ಕೃತಿಗಳಿಂದ ~~[illegible]~~ ಪ್ರಾರಂಭವಾದ ಹಾಗಿದೆ. ಪ್ರಾಚೀನ ಗ್ರೀಕರ ಕಾಲದಲ್ಲೂ ಪರಿಹರಿಸಿ ಮತ್ತು ಪರಿಹರಿಸಲಾಗದ ಅನೇಕ ಸಮಸ್ಯೆ

ಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಇಲ್ಲಿ ನಮೂದಿಸುತ್ತೇನೆ. ಸಂಕಲನದಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸೋಣ. ಮಾಯಾ ಚೌಕಗಳು ಸಂಕಲನಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ್ದು ಸಮಸ್ಯೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಸರಳವಾದುದು ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರಿಗೂ ಗೊತ್ತಿರುವ ವಿಚಾರ. ಇವುಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಬಹಳ ಕುತೂಹಲಕಾರಿಯಾದ ಲೇಖನಗಳು (MATHEMATICAL RECREATIONS BY W.W. ROUSEBALL) ಎಂಬ ಗ್ರಂಥದಲ್ಲಿವೆ. (ಈ ಪುಸ್ತಕದ ಬಗ್ಗೆ ಟಿಪ್ಪಣಿ ವಿವರಗಳಿಗಾಗಿ, B. ಸೀತಾರಾಮಶಾಸ್ತ್ರಿಗಳು ಬರೆದಿರುವ "ಸಂಖ್ಯಾದರ್ಶನ" ಎಂಬ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ನೋಡಬಹುದು). ಈಗ ಗುಣಾಕಾರದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಶಾಲೆಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ $2 \times 3 = 6$, $15 \times 16 = 240$, $73 \times 77 = 5621$, ... ಇತ್ಯಾದಿ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಮಾಡುವುದು ನೀರು ಕುಡಿದಂತೆ. ಎರಡು ಸ್ಥಾನಗಳುಳ್ಳ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಲು ಸ್ವಲ್ಪ ಹೆಚ್ಚು ಸಮಯ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಾರೆ. ನಿಜ. ಆದರೆ ಅವರ ಕಲಿಕೆಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ವಿದ್ಯಾಭ್ಯಾಸವಿರದವರಿಂದ ಅಪೇಕ್ಷಿಸುವುದು ಸರಿಯಾಗುತ್ತೇ? ಎಡಗಡೆಯಿಂದ ನೇರವಾಗಿ ಗುಣಲಬ್ಧ ಬರೆಯಬಲ್ಲರೇ ಎಂದು. ಹೆಚ್ಚು ಸ್ಥಾನಗಳುಳ್ಳ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ಎಡಗಡೆಯಿಂದ ನೇರವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಇಂತಹ ಸಾಧನೆಗಳು ಎಷ್ಟು ಕಷ್ಟ ಎಂದು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿದರೆ ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ಹೈಸ್ಕೂಲು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ

$$(10a+b)(10a+c) = 100a\left(a+\frac{b+c}{10}\right) + bc$$

ಎಂದು ಗೊತ್ತಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $b+c=10$ ಆದಾಗ ಸುಲಭವಾಗಿ ಗುಣಲಬ್ಧ ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಳು:

$85 \times 85 = 100 \times 8 \times (8+1) + 5 \times 5 = 7225$

$123 \times 127 = 100 \times 12 \times (12+1) + 3 \times 7 = 15621$, ಇತ್ಯಾದಿ.

ಆದರೆ ಎರಡು ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಬರೆ

సాలినల్లి బరెయలు సాధ్యవిదె. ఆదరె ఇష్టల్లు మానసిక వ్యాయామవే సరి. బిందులు దొడ్డదాగి బిందస్పష్టవాగిరుతె.

$$\begin{array}{r} 2387 \\ \times 9654 \\ \hline \end{array}$$

$= 23044098$.

(మానసిక వ్యాయామ: $7\times4=\underline{2}8$, $\underline{2}+(8\times4)+(7\times5)=\underline{6}9$, $\underline{6}+(3\times4)+(8\times5)+(6\times7)=\underline{10}0$, $\underline{10}+(2\times4)+(3\times5)+(6\times8)+(9\times7)=\underline{14}4$, $\underline{14}+(2\times5)+(3\times6)+(9\times8)=\underline{11}4$, $\underline{11}+(2\times6)+(9\times3)=\underline{5}0$, $5+(9\times2)=23$).

గుణాకారక్కె ఉపయోగవాద క్రమ అత్యవశ్యకవ. నననే తిళిదమట్టిగె సంఖ్యెగళ అవశ్యకతెయన్ను నిలభూతవాదగళు బరెదిరలిల్ల. గణితద శక్తి మత్తు మానవశక్తి యావుదు గమనిస్పుదు ఎందు హేళలసాధ్య. ఇన్నొందు ప్రశ్నె. మానవను స్వయం సామర్థ్యదింద మత్తు తపస్సినింద గణితవన్ను కలియబహుదే? గణితదల్లి గణకశాస్త్ర రచనెగళ శక్తరే? అథవా శక్తరాగబల్ల మానవరదగెయల్లి నావు శక్తరాగ బల్లెవు ఎంబ ప్రశ్నెయిద్దరెయే? బహళ కాలదింద విశ్వదల్లి మానవరు తమ్మ ఉద్యోగ బేరెయాదరూ కేవల ~~...~~ ఆసక్తియింద గణితకర్తలూ బింకనెయింద గణితవన్ను విశ్వదల్లి హవ్యాసి గణకరల్లి బింకనెయింద గణితవన్ను విశ్వయగళ సుమారు కథ గణకకృతిగళన్ను రచిసిద్దారె. ముఖ్యవాద గణితవన్ను కలిసుత్తారె. ఇంతహవరల్లి అతి ముఖ్య ప్రతిభావంతరు శ్రీనివాస రామానుజన్. ఇవరల్లి నోడిదరె "ప్రాజ్ఞో శాస్త్రం స్వయం యాతి విస్తారం వస్తు శక్తితః" ఎంబ వాక్య నెనపిగె బరుత్తదె. సణ్ణ సణ్ణ ముఖ్యవాద సంఖ్యెంద బయసువరు

$6=2\times3$, $15=3\times5$, $27=3\times3\times3$, $69=3\times23$,

ಇಂತಹ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನಲ್ಲ. "ಅಹೋ ನಮಹ! ನನಗೂ ಗೊತ್ತು" 5
ಹೇಳುತ್ತಾರೆ. ಅವರು ನಮ್ಮ ಮುಂದಿರುವ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಕೆಲವು
~~ಉದಾಹರಣ~~
ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಕೊಡಬಹುದು. ಒಂದು ಇಲ್ಲಿದೆ:

8888 8888 1

ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅಪವರ್ತನಿಸಿ ಎಂದು, ಯಾವ ಮನುಷ್ಯನೂ ಆಜನ್ಮ ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ ಗಣಕಯಂತ್ರದ ನೆರವು ಪಡೆದರೂ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ~~ಅ~~ ವಿಭಜಿಸಲಾರ. ಏಕೆಂದರೆ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 3, 5, 7, . . . ಇತ್ಯಾದಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಭಾಗಿಸುತ್ತಾ ಹೋದರೆ 10903 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ. ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ದೊಡ್ಡ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿ, ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ನಮ್ಮ ಮುಂದಿಟ್ಟು, ನಮ್ಮನ್ನು ಅಪವರ್ತನಿಸಿ ಎಂದು ಪ್ರಶ್ನಿಸಿದರೆ ನಾವು ಸೋಲುತ್ತೇವೆ. ಬೇರೆ ವಿಧಿಯೇ ಇಲ್ಲ. ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮುಗಿಯದಷ್ಟು ಇವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸುವುದು ಸುಲಭಸಾಧ್ಯ. ~~ಅ~~ ವಿಷಯ ಪ್ರಾಚೀನ ಗ್ರೀಕರ ಲೆಕ್ಕಿಗರಾದ ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ರವರಿಗೆ ಗೊತ್ತಿತ್ತು. ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಈ ರೀತಿ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗುತ್ತವೆ:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, . . .

$10^6 = 1000000$ ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು! $2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \cdots \times 10^6$ (ಗುಣಿಸಬೇಡಿ. ಆದರೆ ಗುಣಿಸಿದ ಉತ್ತರ ನಮ್ಮಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ, ಅಷ್ಟೇ; ಉತ್ತರವೇನು ಎಂಬ ಚಿಂತೆ ಬೇಡ), ಈ ಬೃಹತ್ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ 1 ಸೇರಿಸಿ. ಬಂದ ಸಂಖ್ಯೆ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಬೇಕು ಅಥವಾ ಅದನ್ನು ಅಪವರ್ತನಿಸಿದಾಗ ಬಂದ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನವಿರುತ್ತದೆ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆ 10^6 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರಬೇಕು. ಏಕೆಂದರೆ ಈ ಸಂಖ್ಯೆ 10^6 ರ [illegible] ಒಂದು ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿರಬೇಕು.

$$\{(2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 10^6) + 1\} - \{2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 10^6\}$$

ಎಂದರೆ, ಎರಡು ಪರಿಪೂರ್ಣವರ್ಗಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾ ಕೂಡ 6

ಭಾಜ್ಯಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಈಗ ತಾನೇ ನಮೂದಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆ 1. ಈ ವಿರೋಧಾಭಾಸದಿಂದ ಮೊದಲನೆಯ ಪರಿಪೂರ್ಣವರ್ಗಗಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅವಯವವೂ 10^6 ಕ್ಕಿಂತ ಮಿಗಿಲಾಗಿರಬೇಕು ಎಂದು ವ್ಯಕ್ತವಾಗುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲ ಎಂದು ಹೇಳುವ ದೊರೆಯಲಾರದು. 10^6 ಕ್ಕಿಂತ ಮಿಗಿಲಾದ ಅತಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರಲೇಬೇಕು ಎನ್ನುವುದಕ್ಕೆ ತೋರಿಸಿ ಕೊಟ್ಟದ್ದಾಯಿತು. ಇದನ್ನೇ ಸಾಧನೆ ಎನ್ನುವುದು. ಇದೇ ರೀತಿಯ ವಾದದಿಂದ $10^{1000000}$ ಕ್ಕಿಂತ ಮಿಗಿಲಾದ ಅತಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರಲೇಬೇಕು ಇತ್ಯಾದಿ ಸಾಧನೆಗಳು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಇಂದು ನಮಗೆ ಲಭ್ಯವಾಗಿರುವ ಅತ್ಯಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ ಅತಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ

$$2^{21701}-1.$$

(ಈ ಸಮಾಚಾರ 17-11-1978 ನೇ ತಾರೀಖಿನ ಇಂಡಿಯನ್ ಎಕ್ಸ್‌ಪ್ರೆಸ್ ಎಂಬ ಬೆಂಗಳೂರು ವಿಭಾಗದ ದಿನಪತ್ರಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಕಟವಾಗಿದೆ). ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹೇಗೆ ಅತಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿದರು? ಈ ಮಹತ್ತರ ಸಾಧನೆಯ ಪೂರ್ವೋತ್ತರ ಏನು? ಕಂಪ್ಯೂಟರ್ ನಿಂದ ಸಾಧಿಸಿದ್ದಾರೆ ನಿಜ. ಆದರೆ ಕಂಪ್ಯೂಟರ್‌ಗೆ ಆದೇಶವಿತ್ತವರಾರು? ಅಥವಾ ಕಂಪ್ಯೂಟರ್ ಸಹಾಯವಿಲ್ಲದೆಯೇ ಸ್ವಶಕ್ತಿಯಿಂದ ಏನನ್ನು ಸಾಧಿಸಿದರು! ಎಂಬ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ಸಹಜವಾದವು.

ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಸಂಶೋಧನೆಗಳ ವಿವರ ತುಂಬ ಅನಾವಶ್ಯಕ. ಕೆಲವು ವೇಳೆ ಅಪಾಯಕಾರಿ ಕೂಡ. ಇಂದಿನವರೆಗೂ ನಡೆದಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಶೋಧನೆಯನ್ನು ಕೂಲಂಕಷವಾಗಿ ತಿಳಿಯುವುದೆಂದರೆ ನಮ್ಮ ಜೀವನದ ಅಲ್ಪಕಾಲದ ಮತ್ತು ಅಮೂಲ್ಯವಾದ ಸಮಯವನ್ನು ನಾವೇ ಹಾಳುಮಾಡಿಕೊಂಡಂತೆಯೇ ಸರಿ. ಪ್ರಸಿದ್ಧ ಸಾಹಿತ್ಯ [illegible] ಯಾವ ಸಂಸ್ಕೃತ ಪಂಡಿತನಿಗೆ ಪ್ರಯತ್ನಪಟ್ಟು ನಾವು ಒಮ್ಮೆಗೆ ಓದಬಲ್ಲದೆ "ಮುಖ್ಯಂ ಶಾಸ್ತ್ರಂ" ಎನ್ನುವ ತತ್ವವನ್ನು ಕಂಠಪಾಠ ಮಾಡಿದ [illegible].

([illegible])

ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು, ದೈವದತ್ತವಾದ ನಮ್ಮ ಬುದ್ಧಿಶಕ್ತಿಯಿಂದ, ಪ್ರಯತ್ನಿಸುವುದೇ ಒಳ್ಳೆಯ ಮಾರ್ಗವೆಂದು ಹಲವರ ಮತ. ಇದಕ್ಕೆ ಅನೇಕ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿವೆ. ಇ. ಲ್ಯೂಕಾಸ್‌ರವರದುದಾಹರಣೆ ಬಹಳ ಒಳ್ಳೆಯ ಉದಾಹರಣೆ. ಅವರು ಕಂಪ್ಯೂಟರ್ ಸೃಷ್ಟಿಯಾಗುವ ಹಲವಾರು ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆಯೇ

$$2^{127}-1$$

ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿದ್ದರು! ಅವರ ಕ್ರಮವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ ಆಧುನಿಕ ಕಂಪ್ಯೂಟರ್ ತಜ್ಞರು ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ಬೃಹತ್ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ~~ಅವಿಭಾಜ್ಯ~~ ಅವಿಭಾಜ್ಯವೆಂದು ಕಂಪ್ಯೂಟರಿನ ಸಹಾಯದಿಂದ ತೀರ್ಮಾನಿಸಿದರು. ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಹೊರತು ಕಂಪ್ಯೂಟರಿನ ಸಹಾಯದಿಂದ ಕಂಡು ಹಿಡಿದ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ

$$2^{19937}-1.$$

(ಇದೂ ಕೂಡ ಲ್ಯೂಕಾಸ್‌ರವರ ಕ್ರಮದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ). ಲ್ಯೂಕಾಸ್‌ರವರ ಕ್ರಮ ಪ್ರೊ|| ಜಿ.ಹೆಚ್. ಹಾರ್ಡಿ ಮತ್ತು ಪ್ರೊ|| ಇ.ಎಮ್. ರೈಟ್ ರವರು ಬರೆದ "INTRODUCTION TO THE THEORY OF NUMBERS" ಎಂಬ ಗ್ರಂಥದಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ. ಈ ಬೃಹತ್ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸಂಶೋಧನಾರ್ಥವಾಗಿ U.S.A ಸರ್ಕಾರವು ಒಂದು ಅಂಚೆಚೀಟಿಯನ್ನು ಹೊರಡಿಸಿದೆ. ಈ ಅಧ್ಯಾಯದ ಕೊನೆಯ ಅಂಗವಾಗಿ ಗ್ರೀಕರು ಮಂಡಿಸಿದ ನಾಲ್ಕು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಪ್ರಸ್ತಾಪಿಸಬಯಸುವೆ. (ಎರಡನೆಯ ಮತ್ತು ಮೂರನೆಯ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಗೋಲ್ಡ್‌ಬಾಕ್ ಮತ್ತು ವೇರಿಂಗ್‌ರವರು ಮಂಡಿಸಿದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಾದರೂ, ಅವು 1700ರಿಂದೀಚಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಾದರೂ ಅವುಗಳನ್ನು ಪ್ರಾಚೀನ ಗ್ರೀಕರ ಪಟ್ಟಿಗೆ ಸೇರಿಸಿದ್ದೇನೆ. ಕಾರಣ ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಪ್ರಾಚೀನ ಗ್ರೀಕರೂ ಕೇಳಬಹುದಾಗಿತ್ತು, ಅಷ್ಟೇ. ಪ್ರಶ್ನೆ ಹಾಗೆ ಯಾವಾಗ ಉದ್ಭವವಾಯಿತು ಎನ್ನುವುದಕ್ಕಿಂತ ಅದನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದು ಯೋಚಿಸುವುದು ಮುಖ್ಯ). ಕೊನೆಯದಾಗಿ ನಾಲ್ಕನೆಯ ಪ್ರಶ್ನೆ ಕೂಡ ಇತ್ತೀಚಿನದಾದರೂ ಪ್ರಾಚೀನ ಗ್ರೀಕರು ಕೇಳಬಹುದಾಗಿದ್ದಂತಹ ಪ್ರಶ್ನೆಯೇ ಸರಿ.

ಸಮಸ್ಯೆ 1. ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ನೋಡಿ.

(5,7), (11,13), (17,19), (29,31), (41,43), . . .

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೋಡಿಯಲ್ಲೂ ಎರಡು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ. ಅವೆರಡರ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 2. ಇಂತಹ ಜೋಡಿಗಳಿಗೆ ಯಮಳ ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳೆಂದು ~~ಹೆಸರು~~ ನಾಮಕರಣ ಮಾಡಿದ್ದಾರೆ (TWIN PRIMES). 100ಕ್ಕಿಂತ ಮೇಲ್ಪಟ್ಟ ಯಮಳ ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳ ಉದಾಹರಣೆ (101,103), 1000ಕ್ಕಿಂತ ಮೇಲ್ಪಟ್ಟ ಉದಾಹರಣೆ ಕೊಡಬಹುದು. ನೀವು ಯೋಚಿಸಿ ಕೊಡಬಹುದು. ಪ್ರಯಾಸಪಟ್ಟು ಗಣಕಯಂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ 10^{1000}ಕ್ಕಿಂತ ಮೇಲ್ಪಟ್ಟ ಉದಾಹರಣೆ ~~ಯನ್ನು~~ ಕೊಡಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗಬಹುದೇನೋ? ಆದರೆ $10^{1000000}$ಕ್ಕಿಂತ ಮೇಲ್ಪಟ್ಟ ಉದಾಹರಣೆ (ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ಕೊಡದಿದ್ದರೂ ಚಿಂತೆ ಇಲ್ಲ) ಇಂದಿರಬೇಕಾದುದು ನಿಶ್ಚಿತ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬಲ್ಲಿರಾ? ಇದುವರೆಗೂ ಯಾವ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞ ಮಹಾಶಯನಿಗೂ ಇದು ಸಾಧ್ಯವಾಗಿಲ್ಲ. ಶ್ರೀನಿವಾಸ ರಾಮಾನುಜನ್ ಅವರ ಉಪಾಯಗಳು "ಸ್ವಲ್ಪ ಮಟ್ಟಿಗೆ ಒಂದು ಅರ್ಥದಲ್ಲಿ ಯಶಸ್ವಿಯಾಗಿದೆ", ಆದರೂ ಈ ಪ್ರಶ್ನೆ ಬಗೆಹರಿಸಲು ಇನ್ನೂ ಯಾವ ಉಪಾಯ ಕಾಣಬಂದಿಲ್ಲ. ರಾಮಾನುಜನ್ ಅವರ ವಿಧಾನದ ಬಗ್ಗೆ ಮುಂದಿನ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಮಾತುಗಳನ್ನು ಹೇಳಬಯಸುತ್ತೇನೆ.

ಸಮಸ್ಯೆ 2. ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೆಲವು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಎರಡು ಭಾಗವಾಗಿ ಒಡೆದಿದೆ.

$6=3+3$, $8=3+5$, $10=3+7$, $12=5+7$, $14=7+7$, $16=5+11$, $18=5+13$, $20=7+13$, $22=3+19$, $24=5+19$, $26=3+23$, $28=5+23$, $30=11+19$, . . ., $100=41+59$, . . ., $1000=401+599$, . . .

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಲ ಒಡೆದಾಗಲೂ ಎರಡು ಭಾಗಗಳೂ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಈ ವಿಧವಾಗಿ ಒಡೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇವೆಯೇ ಅಥವಾ ಇಲ್ಲವೇ? ಎಂಬುದು ಬಹಳ ಜಟಿಲವಾದ ಪ್ರಶ್ನೆ. ಸಮಸ್ಯೆ 1ರಂತೆಯೇ ಅಷ್ಟೇ ಕಷ್ಟವೆಂದು ಊಹಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ. ರಾಮಾನುಜನ್ ಅವರ ಉಪಾಯಗಳು ಈ ಸಮಸ್ಯೆಗೂ

ಸಾಕಾದಷ್ಟು ಪ್ರಯೋಜನಕಾರಿಯಾಗಿವೆ. ಆದರೂ ಕೊಟ್ಟಕೊ-
ನೆಯ ಗುರಿಯಂತೆ ಬಹಳ ಹಿಂದೆ ಉಳಿದಿದೆ, ಇಂದಿನ ಜ್ಞಾನ. ಸಾಧಿಸಿರು-
ವುದು ಅಲ್ಪವಾದರೂ ಸಂಶೋಧನೆಗಳು ಅಮೂಲ್ಯ. ಬಾಕಿ ಉಳಿದಿರು-
ವುದನ್ನು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಸಾಧಿಸಲು ಅನೇಕ ಶತಮಾನಗಳೇ ಹಿಡಿಯ-
ಬಹುದು. ಇನ್ನೊಬ್ಬ ರಾಮಾನುಜನ್‌ರವರಂಥ ಪ್ರತಿಭಾಶಾಲಿಯ ಜನನ-
ವಾದಾಗ ಆ ಸುಪ್ರದೋ ಊಹಿಸಲು ಸಾಧ್ಯ. ನಂಬಲೂ ಅಸಾಧ್ಯ. ..

<u>ಸಮಸ್ಯೆ</u> 3. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಪೂರ್ಣವರ್ಗಗಳ
ಮೊತ್ತವಾಗುವಂತೆ ಬರೆದಿದೆ.

$1 = 1^2+0^2+0^2+0^2$, $2 = 1^2+1^2+0^2+0^2$, $3 = 1^2+1^2+1^2+0^2$,
$4 = 2^2+0^2+0^2+0^2$, $5 = 2^2+1^2+0^2+0^2$, $6 = 2^2+1^2+1^2+0^2$,
$7 = 2^2+1^2+1^2+1^2$, ...

ಮೇಲಿನ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಬಹುದು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆ-
ಯನ್ನೂ ನಾಲ್ಕು ಪೂರ್ಣವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು ಎಂಬ
ಪ್ರಮೇಯವು ಫರ್ಮಾಟ್‌ರಿಂದ ಊಹಿಸಲ್ಪಟ್ಟು ಲಗ್ರಾಂಜ್‌ರವರಿಂ-
ದ ಸಾಧಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿತು. (ಸಾಧನೆ ಹಾರ್ಡಿ ಮತ್ತು ರೈಟ್‌ರವರು ಬರೆದ ಉಂದೆ
ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಿದೆ). ಈ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಕುರಿತು ಜಕೋಬಿ
ಮತ್ತು ರಾಮಾನುಜನ್‌ರವರು ಇಬ್ಬರೂ ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿದ
ಸಾಧನೆಗಳು ಹಾರ್ಡಿಯವರು ಬರೆದ (ಮುನ್ನುಡಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಸ್ತಾಪಿಸಿದ)
ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿವೆ. ಸಂಖ್ಯೆ 7 ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಇದನ್ನು
ಮೂರು ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ
ವರ್ಗಗಳ ಜೊತೆಯಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕು ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ ನಿಶ್ಚಯವಾಗಿ ಬೇಕೆಂದಾಯಿತು.
ಇದನ್ನು $g(2) = 4$ ಎಂದು ಬರೆಯೋಣ. ಹೀಗೆ ಬರೆದಾದನಂತರ
$g(3) = ?$ ಎಂಬ ಸಮಸ್ಯೆ (ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ: ಘನಗಳಿಗೆ ಮೇಲ್ಕಂಡಂತೆ
ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು) ಉದ್ಭವಿಸುವುದು. ಹಾಗೆಯೇ
$g(4) = ?$, $g(5) = ?$, $g(6) = !$, ... ಎಲ್ಲಾ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು ಉದ್ಭ-
ವಿಸುತ್ತವೆ. ಈ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ರಾಮಾನುಜನ್‌ರವರ ಸಂಶೋಧನೆಗಳು
ಅತೀವ ಫಲಕಾರಿಯಾಗಿವೆ. ಆದರೂ ಈ ದಿಶೆಯಲ್ಲೂ ಅನೇಕ ಶತಮಾನಗ

ಘನಗಳಾಗಿ ಬರೆಯಲಾಗದಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇಲ್ಲವೇ.
ಇದನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸುವ. ವರ್ಗಕ್ಕೆ 7 ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಘನಗಳಿಗೆ 23 ಸಂಬಂಧಿಸಿದೆ (23ನ್ನು 8 ಘನಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಬರೆಯಲಾಗುವುದಿಲ್ಲವೆಂದು ಗಮನಿಸಿ). ಅಂದರೆ $g(3) \geq 9$ ಎಂದಾಯಿತು. ಈ ರೀತಿಯಾದ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಮಾಡುವುದು ಕಷ್ಟವಲ್ಲ. ಆದರೆ $g(3)=9$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸುವುದು ಕಷ್ಟ. ಇದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ $g(2) \geq 4$, $g(3) \geq 9$, $g(4) \geq 19$, $g(5) \geq 37$, $g(6) \geq 73$, ... ಈ ರೀತಿ ಉದಾಹರಣೆ ಸಾಧ್ಯವೆನಿಸುವುದು. 4, 9, 19, 37, 73, ... ಇತ್ಯಾದಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

$$2^2+\left(\tfrac{3}{2}\right)^2-2,\quad 2^3+\left(\tfrac{3}{2}\right)^3-2,\quad 2^4+\left(\tfrac{3}{2}\right)^4-2,\quad 2^5+\left(\tfrac{3}{2}\right)^5-2,$$

$$2^6+\left(\tfrac{3}{2}\right)^6-2,\ \ldots$$

ಇತ್ಯಾದಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ದಶಮಾಂಶ ಭಾಗವನ್ನು ಬಿಟ್ಟರೆ ಉಳಿಯುವ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಎಂದು ಗಮನಿಸಿ.
ರಾಮಾನುಜನ್, ಹಾರ್ಡಿ, ಲಿಟಲ್‌ವುಡ್, ವಿನೋಗ್ರಡೋವ್, ಇವರುಗಳು ಹಾಕಿಕೊಟ್ಟ ದಾರಿಯಲ್ಲಿ ನಡೆದು ಶಿವಶಂಕರನಾರಾಯಣ ಪಿಳ್ಳೈಯವರು, ಮತ್ತು ಡಿಕ್ಸನ್‌ರವರು ಇಬ್ಬರೂ ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿ ಸ್ವಾರಸ್ಯಕರವಾದ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಅದನ್ನು ಈ ರೀತಿ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು. ನಾವು ಇಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸುವುದು (ಸುಮಾರು) ಪಿಳ್ಳೈಯವರ ನಿರೂಪಣೆಯನ್ನು ಹೋಲುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ (ಎಸ್. ಎಸ್. ಪಿಳ್ಳೈ). ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕ k ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. $6 \leq k \leq 100$ ಆದಾಗ $g(k)=\left[2^k+\left(\tfrac{3}{2}\right)^k-2\right]$ ಎಂಬುದು ಸರಿ. (ಬ್ರಾಕೆಟ್‌ನೊಳು ದಶಮಾಂಶ ಭಾಗವನ್ನು ಬಿಟ್ಟರೆ ಉಳಿಯುವ ಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ). ಅದೂ ಅಲ್ಲದೆ $k \geq 100$ ಆದಾಗ, $\left(\tfrac{3}{2}\right)^k$ ಯ ದಶಮಾಂಶದ ಬಗ್ಗೆ ಕೆಲವು ವಿಚಾರ ಗೊತ್ತಾದರೆ $g(k)$ ಯನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ:

$$M(k) = 2^k\sqrt{\left(\left(\tfrac{3}{2}\right)^k - (\text{ಸಮೀಪವರ್ತಿ ಪೂರ್ಣಾಂಕ})\right)^2}$$

ಎಂದು ಬರೆಯೋಣ. ಆಗ $k \geq 100$ ಮತ್ತು $M(k) \geq \frac{7}{8}$ ಆದಾಗಲೆಲ್ಲಾ $g(k)=\left[2^k+\left(\tfrac{3}{2}\right)^k-2\right]$.

ಇಲ್ಲಿ ಒಂದು ವಿಚಾರ. $g(2)=4$ ಲಗ್ರಾಂಜ್ ಕಂಡುಹಿಡಿದರು. $g(3)=9$ ವೈಫೆರಿಚ್ ಹಲವು ದಶಕಗಳ ಹಿಂದೆ ಕಂಡುಹಿಡಿದರು. $g(4)=?$ ಇಂದಿಗೂ ಸಮಸ್ಯೆಯಾಗಿ ಉಳಿದಿದೆ. ಇತ್ತೀಚೆಗೆ (ಎಂದರೆ 1977-78 ರಲ್ಲಿ) ನನ್ನ ಸಹೋದ್ಯೋಗಿ ಬಾಲಸುಬ್ರಹ್ಮಣ್ಯಂ ರವರು $19 \le g(4) \le 21$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಎಂದರೆ $g(4)=19$, ಅಥವಾ 20 ಅಥವಾ 21 ಎಂದು ಆಯಿತು. ಈ ಮೂರರಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ಎಂದು ನಿಶ್ಚಿತವಾಗಿ ತಿಳಿದು ಬರಲು ಹಲವಾರು ವರ್ಷಗಳೇ ಬೇಕಾಗುವುದೋ, ಏನೋ? $g(5)=37$ ಎಂಬ ಪ್ರಮೇಯ 13 ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ (ಎಂದರೆ 1965 ರಲ್ಲಿ) ಚೈನಾ ದೇಶದ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಾದ ಚೆನ್-ಜಿಂಗ್-ರನ್ ಎಂಬ ಅವರಿಂದ ಸಾಧಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿತು. ಈಗ ಸಮಸ್ಯೆ 2 ನ್ನು ಈ ರೀತಿ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.

$k=2,3,4,5,\ldots$ ಆದಾಗ $g(k)=\left[2^k+\left(\frac{3}{2}\right)^k-2\right]$ ಎಂಬುದು ಸರಿಯೇ? ತಪ್ಪೇ? ತಪ್ಪಾದರೆ k ನ ಯಾವ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ತಪ್ಪು?

$M(k)$ ಎಂದು ಬರೆಯಲು ಒಂದು ಪ್ರಬಲವಾದ ಕಾರಣವಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಕೆ. ಮಾಲರ್ ಎಂಬ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ವೇರಿಂಗ್ ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ಸಂಬಂಧವಿಲ್ಲದ ಮತ್ತೊಂದು ದಿಶೆಯಿಂದ ಸಂಶೋಧನೆಗಳನ್ನು ನಡೆಸಿ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿದರು.

ಪ್ರಮೇಯ (ಕೆ. ಮಾಲರ್). k_0 ಎಂಬ ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಮಿತಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿದಾಗ ಎಂದರೆ $k \geq k_0$ ಆದಾಗ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು k ನ ಬೆಲೆಗೂ

$$M(k) > \frac{7}{8}.$$

ಇದೂ ಅಲ್ಲದೆ ಸಾಂಪ್ರದಾಯಕ ಗಣಿತ ಶೈಲಿಯಲ್ಲಿ "$M(k) \to 1$ as $k \to \infty$". (ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ "k ಅನಂತದತ್ತ ಹೋದಾಗ $1-M(k)$ ಶೂನ್ಯದತ್ತ ಓಡುತ್ತದೆ," ಎನ್ನಬಹುದು).

ಅಂದರೆ ಮೂರನೇ ಸಮಸ್ಯೆ "k_0 ಗೆ ಮೀರಿದ k ಗಳೆಲ್ಲ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಸಾಧಿಸಿಯಾಯಿತು" ಎನ್ನಬಹುದು. ಆದರೆ ಹೆಚ್ಚು ಸಂಭ್ರಮ ಪಡುವಂತಿಲ್ಲ. ಏಕೆ? ಮಾಲರ್ ರವರ ಸಾಧನೆ ~~[illegible]~~ ಯಲ್ಲಿ ತಪ್ಪಿಲ್ಲದ್ದು ನಿಜ. ಆದರೆ ಸಾಧನೆ ಕೇವಲ ಸ್ಥಿತಿನಿರೂಪಣೆಮಾತ್ರ (ಎಂದರೆ existential proof only), k_0 ಎಂಬ ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಏನು? ಅದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಬಗೆ ಹೇಗೆ? ಎಂಬುದು ಅತ್ಯಂತ ಕಠಿಣವಾದ ಸಮಸ್ಯೆಯಾಗಿ ಉಳಿದಿದೆ. ಶತಮಾನಗಳುರುಳಿದರೂ k_0 ಸ್ಥಿರಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಭರವಸೆಯೇ ಇಲ್ಲ. ಮಾಲರ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಸಾಧನೆಯನ್ನೇ ಆಮೂಲಾಗ್ರವಾಗಿ ಬದಲಿಸಿ ಬೇರೊಂದು ಸಾಧನೆಯನ್ನೇ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗುವುದು ~~[illegible]~~. ಈ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಆಲನ್ ಬೇಕರ್ ರವರು ಗಹನವಾದ ಹಾಗೂ ಅತಿಮುಖ್ಯವಾದ ಸಂಶೋಧನೆಗಳನ್ನು ನಡೆಸಿದ್ದಾರೆ. ಆದರೂ k_0 ಸ್ಥಿರಾಂಕವನ್ನು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ರೂಪಿಸುವುದು ಅತಿದೂರದ ಬೆಳಕಿನ ಮರೀಚಿಕೆಯೇ ಆಗಿದೆ. ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ರೀತಿ ಮುಕ್ತ ಮಾಲರ್ ರವರ ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು, ಮಾನವನ ಆಕಾಶಯಾನ ಚರಿತ್ರೆಯಲ್ಲಿ, ಚಂದ್ರಲೋಕ ಪ್ರಯಾಣಕ್ಕೆ ಹೋಲಿಸಿದರೆ ಈಗ ನಾವು ಹೇಳಿದ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ದೂರದ ನಕ್ಷತ್ರಯಾನವಷ್ಟೇ ಅಸಾಧ್ಯವೆನಿಸುವ ಸಂಶೋಧನೆ ಎಂದು ಬಣ್ಣಿಸಬಹುದು. ಅನೇಕ ಶತಮಾನಗಳುರುಳಿದರೂ ಈ ಸಮಸ್ಯೆ ಸಮಸ್ಯೆಯಾಗಿಯೇ ಉಳಿದಿರುತ್ತೆ ಎಂದು ಅನಿಸಿಕೆ. ಮಾಲರ್ ರನ್ನು ಬೇಕರ್ ರವರು ಅನುಸರಿಸಿದ ಮಾರ್ಗಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಆದರೂ ಈ ಎರಡು ಮಾರ್ಗಗಳೂ "ಆಕ್ಸೆಲ್ ಥುಯೇ" ಎಂಬ (ಶ್ರೀನಿವಾಸ ರಾಮಾನುಜನ್ ರವರಷ್ಟೇ ಪ್ರತಿಭಾಶಾಲಿಯಾದ) ನಾರ್ವೆಯ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ಹಾಕಿಕೊಟ್ಟದ್ದಾಂ. ಆಶ್ಚರ್ಯ ವಿಚಾರವೊಂದೆ ಹೇಳಬಯಸುವೆ.

<u>ಸಮಸ್ಯೆ</u> 4. ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ನೋಡಿ.

$$3^3 + 4^4 + 3^3 + 5^5 = 3435.$$

(3435 ಸಂಖ್ಯೆ 3 ಸಲ ಬಂದಿದೆ ಎಂದು ಗಮನಿಸಿ).

ಇದೂ ಅಲ್ಲದೆ $1^1=1$ ಎಂಬುದು ಅತಿ ಸ್ಪಷ್ಟವಾದ ಇಂತಹ ಸಮೀಕರಣ. ಇವೆರಡನ್ನು ಬಿಟ್ಟರೆ ಬೇರಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಈ ರೀತಿ ಇರಲಾಗುವುದಿಲ್ಲವೆಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು. ಇವೆಲ್ಲಾ ಹವ್ಯಾಸಿಗಳು ಮಾಡಿದ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಾದರೂ ನಾನು

[$54748 = 5^5+4^5+7^5+4^5+8^5$]; [$4,679,307,774 = 4^{10}+6^{10}+7^{10}+9^{10}+3^{10}+0^{10}+7^{10}+7^{10}+7^{10}+4^{10}$ (NJ)] (new one)

ಸಂಖ್ಯೆಲ್

ಇದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದದ್ದು ಹಿಂದೂ ಜನಗಳು ಎನ್ನುವುದಂತೂ ಗಮನಾರ್ಹವಾಗಿದೆ.
(ಎಂಬರಿಕನ್ ಸ್ವಯಂನನ್ನು)
ಇದನ್ನು ನನ್ನ ಸಹಾಧ್ಯಾಯಿಗಳ ಮುಂದಿರಿಸಿದಾಗ ಅವರೆಲ್ಲ ಕೆಲವರು ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿದರು. ಆ ಪ್ರಶ್ನೆಗಿಂತ ಜಟಿಲವಾದ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಮುಂದಿಟ್ಟರು: $0^0=1$ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ (ಇದಕ್ಕೆ ಕಾರಣ: x ಧನವಾಗಿದ್ದು ಸೊನ್ನೆಗೆ ಹೋದಾಗ x^x ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ 1ನ್ನು ಸಮೀಪಿಸುತ್ತದೆ). ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನೋಡಿ.

$$12500 = 1^1 \times 2^2 \times 5^5 \times 0^0 \times 0^0$$

(12500 ಯಾವುದರಿಂದ ಬಂದಿದೆ ಎಂದು ಗಮನಿಸಿ. ನಂತರ ಹಿಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆ ಹಿಂದಿನ ಇದರ ಸ್ವರೂಪವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.) ಪ್ರಶ್ನೆ ಯಾವುದೆಂದರೆ, ಇಂಥ ಗುಣಾಕಾರದಿಂದ ಬರುವ ಇತರ ಸ್ವರೂಪದ ಸಂಖ್ಯೆಯುಂಟೆ? ಈ ಅನಂತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ? ಇದು ಆ ಕರ್ತನಾದ ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ? ಬಹುಶಃ ಹೀಗೆಂದು ಈ ಸಮಸ್ಯೆ ಬಹಳ ಕಠಿಣವಾಗಿ ತೋರುತ್ತದೆ. ಬಹುಶಃ ಹೀಗೆಂದು ಮಹಾಮಹಾ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಿಗೂ ಕಷ್ಟವೆಂದು ತೋರುತ್ತದೆ.

ಈ ವಿಧವಾದ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಎಷ್ಟು ಬೇಕಾದರೂ ಸುಲಭವಾಗಿ ಕೇಳಬಹುದು. ಬಹುಶಃ ಉತ್ತರ ನನ್ನ ಕೈಲಿ ಇಲ್ಲ? ಎನ್ನುತ್ತೇನೆ. ಇವುಗಳಿಂದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳ ಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ನೋಡಿ ಮುಂದಿನ ಅಧ್ಯಾಯಕ್ಕೆ ಹೋಗೋಣ.

ಅಧ್ಯಾಯ 3

ರಾಮಾನುಜನ್ ಮತ್ತು ಆಯ್ಲರ್ ಕೃತಿ, ಮತ್ತು ಇತರ ಸಂಶೋಧನೆಗಳು ಆಗುತ್ತಿರುವ ಕಾಲದ ಪ್ರಭಾವಗಳು.

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದ ಮತ್ತು ಹಿಂದಿನ ಅಧ್ಯಾಯದ ಮಧ್ಯೆ ಕೆಲವು ಹೋಲಿಕೆಗಳಿವೆ. ಶಕ್ತಿ ಶ್ರೇಣಿ (power series) ಗಳನ್ನು ಬಳಸಲಾಗುವುದು.

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{99} = 2^{100} - 1$$ ಮತ್ತು

$$3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{99} = \frac{3^{100}-1}{3-1}$$ ಮತ್ತು ಇದೇ ವಿಧವಾದ ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ನಮಗೆ ತಿಳಿದ ಬಹಳ ಬಂದು ಅಂಶ ಎನಿಸಿದರೆ,

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \cancel{\frac{1-x^n}{1-x^n}}\ \frac{1-x^n}{1-x}$$

మరియు $-1 < x < 1$ అయితే

$$1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}. \qquad (1)$$

ఈ గణితంలోని ఉపరి నిత్యసమీకరణము (identity), x అనునది సంకీర్ణ సంఖ్య (complex number) అయినప్పటికీ చెల్లును. (అంటే $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, α, β నిజమైన సంఖ్యలు (real numbers)). నిత్యసమీకరణము చెల్లుటకు కావలసిన షరతు $\alpha^2 + \beta^2 < 1$. నిత్యసమీకరణము (1) ను x దృష్ట్యా m సార్లు అవకలనము చేసినచో (differentiated with respect to x m times) ఈ క్రింది నిత్యసమీకరణము లభించును.

$$m! + \frac{(m+1)!}{1!}x + \frac{(m+2)!}{2!}x^2 + \cdots = \frac{m!}{(1-x)^{m+1}}. \qquad (2)$$

ఇచట m ఒక ధన పూర్ణసంఖ్య. ఒక చరరాశిలో ఒక అకరణీయ ప్రమేయము (rational function) ను తీసుకొని (దానిని $f(x)$ అనుదాం), $f(x)$ ను ఈ క్రింది విధంగా పాక్షిక భిన్నములుగా వ్రాయవచ్చును

$$f(x) = p(x) + \sum_{i,\,j \geq 1}\sum \frac{a_{i,j}}{(x-\alpha_i)^j} \qquad (3)$$

ఇచట $p(x)$ ఒక ఏక చరరాశి బహుపది (polynomial in one variable) మరియు $\sum\sum$ ఒక పరిమిత ద్వంద్వ సంకలన సూచి (finite double sum indicator) మరియు $a_{i,j}$, α_i లు సంకీర్ణ సంఖ్యలు, i మరియు j పూర్ణాంకములు. ఉదాహరణకు

$$\frac{x^3}{x^2-1} = \frac{x(x^2-1)+x}{x^2-1} = x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right)$$

$$\frac{x^3}{x^2+1} = \frac{x(x^2+1)-x}{x^2+1} = x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+\sqrt{-1}} + \frac{1}{x-\sqrt{-1}}\right).$$

ఇప్పుడు (2), (3) లను ఉపయోగించి ఒక క్రమమైన అకరణీయ ప్రమేయము

ವಾಕ್ಯ $f(x)$ ಅನ್ನು

$$f(x) = P(x) + Q\left(\frac{1}{x}\right) + \sum_{\substack{i \\ \alpha_i \neq 0}} \sum_{j \geq 1} \frac{a_{i,j}}{\alpha_i^j \left(1 - \frac{x}{\alpha_i}\right)^j}$$

$$= P(x) + Q\left(\frac{1}{x}\right) + \sum_{\substack{i \\ \alpha_i \neq 0}} \sum_{j \geq 1} \frac{a_{i,j}}{\alpha_i^j} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(j+n)!}{j!\, n!} \left(\frac{x}{\alpha_i}\right)^n \right), \quad (4)$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. (ಇಲ್ಲಿ $Q\left(\frac{1}{x}\right)$ ಎಂಬುದು $\frac{1}{x}$ ನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ). ಏಕೆಂದರೆ $f(x) - Q\left(\frac{1}{x}\right)$ ಅನ್ನು ಒಂದು ಘಾತಶ್ರೇಣಿಯಾಗಿ ವಿಸ್ತರಿಸಿದಾಗ (ಅಂದರೆ $f(x) - Q\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ಎಂದು ಬರೆದಾಗ) a_n ಗಳಿಗೆ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸೂತ್ರ (explicit formula) ಸಿಕ್ಕಿದಂತಾಯಿತು. ಈ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ $f(x) - Q\left(\frac{1}{x}\right)$ ನ ಪ್ರಮುಖ ಏಕ ಬಿಂದುಗಳು (singular points) ಸೇರಿರುತ್ತವೆ. ಇನ್ನು ಮುಂದೆ $Q\left(\frac{1}{x}\right)$ ಸದಾ ಶೂನ್ಯವಾಗಿರುವ (identically zero) ಕಾರಣ ಈ ಮೇಲಿನ ಅರ್ಥದ (4)ನೇ ಸೂತ್ರದ ಪ್ರಕಾರ,

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ಮತ್ತು $P(x) = \sum \lambda_n x^n$, ಮತ್ತು $Q\left(\frac{1}{x}\right) \equiv 0$ ಆದಾಗ,

$$a_n = \sum_{i,\, j \geq 1} \sum a_{i,j} \frac{(j+n)!}{\alpha_i^{j+n}} + \lambda_n . \quad (5)$$

ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ $a_n \neq 0$, $n \geq 100$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು. ರಾಮಾನುಜನ್‌ರವರು ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಕ್ಕೆ ನೀಡಿರುವ ಒಂದು ಅತ್ಯಂತ ಅಮೂಲ್ಯವಾದ ಕೊಡುಗೆ, ಸೂತ್ರ (5)ರ ಅತ್ಯಂತ ಪ್ರಭಾವಶಾಲಿಯಾದ ಹಾಗೂ ಗಹನವಾದ ವಿಸ್ತರಣೆ (deep extention). ಇದನ್ನು ಈ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ವಿಸ್ತರಣೆಯೆಂದು ಕರೆದರೆ, ಇದು ~~[illegible]~~ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ನೀಡಿರುವ ಅನೇಕ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಇತ್ತೀಚಿನ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ನೋಡಿದರೆ ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಅವರು ಮತ್ತು ಹಾರ್ಡಿಯವರು ಪ್ರಸಿದ್ಧವಾದ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-x)^{n^2} \right)^{-1} = \sum a_n x^n, \quad (6)$$

ಆದರೆ a_n ಎಂಬುದು

$$\frac{1}{4n}\left(\frac{e^{\pi\sqrt{n}}+e^{-\pi\sqrt{n}}}{2} + \frac{e^{\pi\sqrt{n}}-e^{-\pi\sqrt{n}}}{2\pi\sqrt{n}} \right) \qquad (7)$$

ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಬಂದು ಅರ್ಥದಲ್ಲಿ ಬಹಳ ಸಮೀಪವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಬರೆದ್ದಾರೆ. ಸಮೀಕರಣ (6) ರಲ್ಲಿ ಎಡಪಾರ್ಶ್ವ ಪ್ರಸ್ತಾರಣ ಕ್ರಿಯಾತ್ಮಕವಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಮುಂದೆ ರಾಮಾನುಜನ್ ರವರು ಇಂಗ್ಲೆಂಡಿಗೆ ಹೋದಾಗ ಹಾರ್ಡಿಯವರ ಜೊತೆಯಲ್ಲಿ ಈ ಸಂಶೋಧನೆಗಳನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಿ ಅತಿ ಮುಖ್ಯವಾದ ಪ್ರಬಂಧಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿದರು. ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದಂತೆ ಈ ಸಂಶೋಧನೆಗಳಿಂದ ಹೊಸದೊಂದು ವಿಶಾಲಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರ ಭಾಗವು ಸೃಷ್ಟಿಯಾಯಿತು. ಅನಂತರ ಈ ಸಂಶೋಧನೆಗಳನ್ನು ಹಾರ್ಡಿ, ಲಿಟಲ್‌ವುಡ್, (I.M) ವಿನೋಗ್ರಡಾಫ್, ಡ್ಯಾವನ್‌ಪೋರ್ಟ್, ಬಾಂಬಿಯರಿ, (A.I) ವಿನೋಗ್ರಡಾಫ್, ಲಿನ್ನಿಕ್, (H.L) ಮಾಂಟ್‌ಗೊಮೆರಿ, M.N. ಹಕ್ಸ್ಲೆ, ಗ್ಯಾಲಾಘರ್, ಜುಟಿಲ, A ಸೆಲ್ಬರ್ಗ್, (S.S) ಪಿಳ್ಳೈ, (L.E) ಡಿಕ್ಸನ್ ಇವರೇ ಮೊದಲಾದ ಅನೇಕರು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಅತ್ಯಂತ ವಿಸ್ಮಯಕರ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಇವನ್ನೆಲ್ಲಾ ವಿವರಿಸಲು ಮಹಾಗ್ರಂಥವೇ ಬೇಕಾಗುವುದು.

ರಾಮಾನುಜನ್ ಮತ್ತು ಹಾರ್ಡಿಯವರ ಮಾರ್ಗವನ್ನನುಸರಿಸಿ ಹಾರ್ಡಿ ಮತ್ತು ಲಿಟಲ್‌ವುಡ್‌ರವರು

$$(x^3+x^5+x^7+x^{11}+x^{13}+x^{17}+\cdots)^2 = \sum_{n=3}^{\infty} r(2n)\, x^{2n}, \qquad (8)$$

ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿ (3, 5, 7, … ಇತ್ಯಾದಿಗಳು ಎಲ್ಲಾ ಬೆಸ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು), $r(2n)=0$ ಆಗುವುದು ಬಂದು ಅರ್ಥದಲ್ಲಿ ಬಹಳ ಅಪರೂಪ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿದರು. ಈ ರೀತಿಯ ಸಂಶೋಧನೆ (ಇಂದಿಗೂ ಸಹ) ಎರಡನೆಯ ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ಸಂಬಂಧ ಪ್ರಮೇಯಗಳು ಭದ್ರವಾದ ಅಡಿಪಾಯವಾಯಿತು. ವಿನೋಗ್ರಡಾಫ್ (I.M) ರವರು

$$(x^3+x^5+x^7+x^{11}+x^{13}+x^{17}+\cdots)^3 = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n\, x^{2n+1}, \qquad (9)$$

ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ "$n \geq 10^{1000000}$ ಆದರೆ $\rho_n \geq 1$ ಎಂಬುದು ಪ್ರತಿಯೊಂದು n ಬೆಲೆಗೂ ಸರಿ" ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿದರು.

~~(...)~~ (ಮತ್ತು ಭಾಗ (9) ರಲ್ಲಿ)

(8)ರಲ್ಲಿ [ಸಮೀಕರಣದ ಅಧ್ಯಯನದಲ್ಲಿ ಇದುವರೆಗೂ ಸಾಧಿಸಲಾಗದಿರುವ "ರೀಮಾನನ ಊಹೆ, ಮತ್ತು ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ರೀಮಾನನ ಊಹೆ (RH ಮತ್ತು G.R.H)" ಎಂಬ ಊಹೆಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಹಾರ್ಡಿ, ಲಿಟಲ್‌ವುಡ್‌ರವರು ಕೆಲವು ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿದ್ದಾರೆ. ((9) ರಲ್ಲಿ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ರೀಮಾನ್ ದಾಕ್ಷಿರವರ ಸಂಭವನೀಯ ಇನ್ನೂ ಸಾಧಿಸಲಾಗದ ಊಹೆಯನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿ ಇಲ್ಲ.) R.H ಮತ್ತು G.R.H ಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸುವುದನ್ನು ಇದನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿದ ಹಾರ್ಡಿ ಮತ್ತು ಲಿಟಲ್‌ವುಡ್‌ರವರ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸುವಾ

ಪ್ರಮೇಯ (ಹಾರ್ಡಿ ಮತ್ತು ಲಿಟಲ್‌ವುಡ್). R.H ಮತ್ತು G.R.H ಊಹೆಗಳು ಸಂಭವನೀಯವಾದ ಪಕ್ಷದಲ್ಲಿ, $1 \le n \le N$ ~~$r(2n)=0$ ...~~ ಮತ್ತು $r(2n)=0$, ಇವೆರಡು ಎರಡು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಬರೆಯಲಾಗದ n ಗಳ ಎಣಿಕೆ ಸಂಖ್ಯೆ $H(N)$ ಆದರೆ $\frac{H(N)}{N^{3/4}}$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯು (N ಅನಂತದತ್ತ ಹೋದಾಗ) ಸೊನ್ನೆಗೆ ಸರಿಯುತ್ತದೆ. ಇದಲ್ಲದೆ $\overline{\lim} \frac{\log(H(N)+20)}{\log N} \le \frac{1}{2}$ ಎಂದರೆ $H(N)$ ಸುಮಾರು $\sqrt{N}$ ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ.

ಈಗ R.H ಮತ್ತು G.R.H ಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸುವಾ. ಎಣಿಕೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕವಾಗಿ ~~...~~ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತನಿಸಿ. ಉದಾಹರಣೆ. $1=1,\ 2=2,\ 3=3,\ 4=2^2,\ 5=5,\ 6=3\times 2,\ 7=7,\ 8=2^3,\ 9=3^2, \dots$ (ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಅಪವರ್ತನಿಸಿ). ಅನಂತರ $\lambda(1)=1$ ಎಂದು ಬರೆಯುವ. $n>1$ ಆದಾಗ n ಗೆ ಬರುವ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಎಣಿಸೋಣ. ($4=2^2,\ 6=3\times 2,\ 8=2^3,\ 7=7, \dots$ ಗಳ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $2, 2, 3, 1, \dots$ ಇರುತ್ತದೆ). ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ $\lambda(n)=1$ ಎಂದೂ ಬೆಸವಾದರೆ $\lambda(n)=-1$ ಎಂದು ಬರೆಯುವ. ಅನಂತರ

$$L(N) = \lambda(1) + \lambda(2) + \dots + \lambda(N)$$

ಎಂದು ಬರೆಯುವ; ಮತ್ತು N ಯಾವ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದರೂ

$$\left| \frac{L(N)}{N^{3/4}} \right| \le 1000, \qquad (10)$$

అంటే అసమత (inequality) [illegible]. [illegible]

[illegible]

[illegible]. "$N^{3/4}$ అంటే, [illegible] $\mu > \frac{1}{2}$ [illegible]

[illegible], N^2 [illegible] 1000 [illegible]

[illegible] (10) [illegible]" [illegible]

[illegible] (R.H).

[illegible] a [illegible], d అంటే [illegible]

[illegible]. L(N) అంటే

$$L(a, d, N) = \lambda(a) + \lambda(a+d) + \lambda(a+2d) + \cdots + \lambda(a+Nd)$$

[illegible] (10) [illegible]

[illegible] L(N) అంటే L(a, d, N) [illegible]

[illegible] (... 1000 [illegible]

[illegible]

a, d [illegible]) [illegible] G.R.H. (R H [illegible]

G.R.H అంటే Riemann hypothesis [illegible] Generalised Riemann hypothesis [illegible]).

[illegible]

[illegible] H.L. [illegible]

[illegible] R.C. [illegible]

[illegible] $\lim \frac{\log(H(N)+20)}{\log N} < 1$ [illegible]

[illegible]). [illegible] R H [illegible] G.R.H [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] (p_n [illegible])

$$p_{n+1} - p_n < \left(\frac{1}{4} + \frac{\pi}{16}\right) \log p_n, \qquad (11)$$

ಎಂಬ ಅನುಮಾನಕ್ಕೆ ಉಂಟಾದ ನಿಷ್ಕರ್ಷಿತ ಲಕ್ಷಣವುಳ್ಳ ಜೋಡಿ (p_n, p_{n+1}) 19
ಗಳು ಎಷ್ಟು ಬೇಕಾದರೂ ಸಿಕ್ಕುತ್ತವೆ" ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿದ್ದಾರೆ ಹಕ್ಸ್ಲಿ
ಅವರು. ಇತ್ತೀಚೆಗೆ ಹಕ್ಸ್ಲಿಯವರು $\frac{1}{4}+\frac{\pi}{16}$ ಎಂಬ ಸ್ಥಿರಾಂಕವನ್ನು
ಸಮೀಪಮಟ್ಟಕ್ಕೆ ಇಳಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಆದರೂ

$$p_{n+1}-p_n < 3, \tag{12}$$

ಎಂಬ ಲಕ್ಷಣವುಳ್ಳ ಸಂಬಂಧದ ಜೋಡಿ ~~p_{n+1}~~ (p_n, p_{n+1})
ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಅನಂತವೇ? ಅಥವಾ ಸಾಂತವೇ? ಎಂಬ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ~~ಗಣಿತ~~
~~ಸಂಖ್ಯಾ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞ~~ರು ಉತ್ತರಿಸಬಲ್ಲರೇ? ಇಂದಿ
ನ ಜ್ಞಾನಮಟ್ಟದಲ್ಲಿ ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಉತ್ತರ ಸಿಗದು ಎಂದು
ನಂಬಲು ಸಾಕಷ್ಟು ಕಾರಣಗಳಿವೆ.

ಈಗ ಮೂರನೆಯ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಹಾರ್ಡಿ ಮತ್ತು ಲಿಟ್ಲ್‌ವುಡ್‌ರವರು (k ಮತ್ತು K ಗಳು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾದಾಗ)

$$\left(1+x^{1^k}+x^{2^k}+x^{3^k}+x^{4^k}+\cdots\right)^K=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n, \tag{13}$$

ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಅಧ್ಯಯನವನ್ನು (ವಾರಿಂಗ್‌ರ ಸಮಸ್ಯೆಯ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ) ಮಾಡಿದರು. ಈ ಅಧ್ಯಯನವು I.M. ವಿನೋಗ್ರಾಡೋವ್‌ರವರಿಂದ ಮುಂದುವರಿಯಿತು. ಸಲ್ಲುತ್ತದೆ S.S. ಪಿಳ್ಳೈ ಅವರ ಪ್ರಮುಖ ಪಾತ್ರ ಕೂಡ ಇದೆ.

ಈಗ ಇನ್ನೊಂದು (ರಾಮಾನುಜನ್‌ರವರ ಸಂಶೋಧನೆಗೆ ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟ ಅತಿ ಚಿಕ್ಕದಾದ) ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ನೋಡುವ. ಈ ಫಲಿತಾಂಶ, ಪ್ರಾಚೀನವಾದ್ದು, ಸೃಷ್ಟಿಸಿದ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರ ಗಮನ ಸೆಳೆದಿದೆ. m ಮತ್ತು n ಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾಗಿದ್ದು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದವುಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, $|m^2-2n^2|\geq 1$ ಎಂದು ಎಲ್ಲರಿಗೂ ಗೊತ್ತು. (ಇದರಂತೆಯೇ A ವರ್ಗವಲ್ಲದ ಧನಾಂಕವಾದರೆ

$$m^2-An^2=B$$ (B ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆ) (ಸ್ಥಿರವಾದುದು)

ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ (m,n) ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕ ಜೋಡಿಗಳು ಬೇಕಾದಷ್ಟು ಸಿಕ್ಕುತ್ತವೆ (B ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಕೆಲವು ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಬೇಕಾದಷ್ಟು ಸಿಕ್ಕುತ್ತವೆ. ಉದಾ: $B=1$). ನಾನು ಸೆಂಟ್ರಲ್ ಕಾಲೇಜಿನಲ್ಲಿ ~~ಓದುತ್ತಿದ್ದಾಗ~~ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯಾಗಿದ್ದಾಗ ಪ್ರೊ|| C.N. ಶ್ರೀನಿವಾಸಯ್ಯಂಗಾರ್‌ರವರು ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು $m^2-61n^2=1$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರು ಎಂದು ನೆನಪು;
ಪ್ರೊ. T.S. ನಂಜುಂಡಯ್ಯನವರು ಉತ್ತರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಹಾಯ ಮಾಡಿದರು).
$3^2-2\cdot2^2=1$ ಎಂದು ಗಮನಿಸಿ. ಅನಂತರ $(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})=1$ ಎಂದೂ

(ಎಂದರೆ $\frac{1}{16}\left(4+\frac{3\theta}{\sin\theta}\right)=.4425\ldots$; ಇಲ್ಲಿ θ ವು $\theta+\sin\theta=\frac{\pi}{4}$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲ)

$\{(3+2\sqrt{2})^n\} \times \{(3-2\sqrt{2})^n\} = 1^n = 1$, అంతేగాక యీ $n = 1, 2, 3, \ldots$ విలువలన్నీ తీసుకొనగా $m^2 - 2n^2 = 1$ సమీకరణానికి అనంత సంఖ్యలో (m, n) జోడీలు జవాబులు వస్తున్నవి. అయితే B ఒక ధన పూర్ణాంకం అయితే (స్థిరాంకం B ఏ విలువనైనా తీసుకొనగా)

$\cancel{m^3 - 2n^3 = 1}$

$$m^3 - An^3 = B \quad (A \text{ ధనపూర్ణాంకం})$$

సమీకరణానికి పరిమిత సంఖ్యలో మాత్రమే (m, n) జవాబులు ఉంటాయని (అంటే వీటికి పరిమిత సంఖ్యలో జోడీలు మాత్రమే ఉంటాయని) యింతకు ముందు ఉన్న పద్ధతుల ద్వారా సాధించిన ప్రమేయం. ఈ విధమైన ప్రమేయాలను ఎందరో గణిత శాస్త్రజ్ఞులు నిరూపించారు. వీటిలో ఒకటి రెండు సంఖ్యాశాస్త్రంలో ప్రముఖ ఫలితాలుగా ఉన్నాయి. ప్రమేయ సాధనలు స్థితి నిర్ధారక (existential). ఉదాహరణకు: $n > 1$ అయితే

$$\left|\sqrt[3]{2} - \frac{m}{n}\right| > \frac{c}{n^{2+10^{-8}}} \quad (c = \text{ధనస్థిరాంకం}), \qquad (14)$$

అని 1955 లో ఇంగ్లండు దేశపు ప్రొ K. F. రాత్, F.R.S., గారు, అయితే c విలువను నిర్ణయించగల పద్ధతిని (సాధనని స్థిరాంకం నిర్ధారణ) సాధించలేదు. అయితే 1964 లో ప్రొ A. బేకర్, F.R.S, గారు $n > 1$ అయితే,

$$\left|\sqrt[3]{2} - \frac{m}{n}\right| > \frac{10^{-8}}{n^{2+1-10^{-8}}}, \qquad (15)$$

అని బలమైన ప్రమేయం నిరూపించారు. 1908 లో థ్యూ గారు కూడా ఒక అటువంటి ప్రమేయం (14) సాధించారు. ఒకటి రెండు ఏళ్ళలో బేకరు గారి ఫలితం అటువంటి ప్రమేయం (15) సాధించారు. ప్రమేయం (14) కి సంబంధించిన స్థిరాంకం గురించి 1957 లో ప్రొ K. మాహ్లర్, F.R.S., గారు

$$\left|\left(\frac{3}{2}\right)^k - (\text{సమీప పూర్ణాంకం})\right| > c\,(1-10^{-8})^k \qquad (16)$$

అని సాధించారు. ప్రమేయాలు (14), (15), (16) చాలా విశేషమైనవి.

ప్రమేయము (14) అన్నటువంటి లాగరిథం అంక మీద ఎక్కువమంది సంశోధన జరిపినారు. అందరిలో ముఖ్యులైనవారు A. థూయే (1908), C.L. సీగెల్ (1921), F.J. డైసన్ (1947), A.O. గెల్ఫాండ్ (1947), Th. ష్నైడర్ (1936), K.F. రాత్ (1955). ఇన్నేండ్లదాకా ప్రమేయము (14)ను గురించి 1921లో సీగెల్ సంశోధనను ప్రారంభించినారు. ఈ దిశలో K. రామచంద్ర (1966), E. విర్సింగ్ (1968) మరియు W. ష్మిట్ (1969) మొదలగు వారలున్నారు. W. ష్మిట్ గారు ఈ దిశలో ప్రమేయము (14) లోని సమగ్రతను ఋజువు చేసినాడు. ప్రమేయము (15) ను గురించి (Ch. హెర్మైట్ (1873), A.O. గెల్ఫాండ్ ఇటువంటి సంశోధనయందు కృషి చేసినారు) A. బేకర్ గారు అతి ముఖ్యమైన సంశోధనలను జరిపినారు. (See: Linear forms in the logarithms of algebraic numbers, ~~by A.B.~~ by A. Baker, Mathematika (1966)). A. థూయే మరియు Ch. హెర్మైట్ గారలు ప్రారంభించిన దానిని ఆధునిక అతీతసంఖ్యల అధ్యయన (Study of Modern Theory of transcendental numbers) మీద ఆధారపడి ఇంకా అభివృద్ధి చెందినది. ఈ దిశలో C.L. సీగెల్, A.B. శిడ్లోవ్స్కి, N.I. ఫెల్డ్‌మన్, మొదలగువారు ఎక్కువ కృషిని చేసినారు. ముఖ్యంగా ఈ దిశలో R. అపేరీ యొక్క కృషి ఫలితం ఇచ్చు ప్రేరణలున్నది. అది

$$\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+\cdots\right) \neq \frac{m}{n} \qquad (n \geq 1), \qquad (16)$$

అనునది కూడా. ఈ ప్రమేయమునకు చెందిన F. బ్యూకర్స్ గారు సుందరమైన సాధనను కనుగొన్నారు.

కనుక $2^{\sqrt{2}}$ అను అతీతసంఖ్య అనునది గెల్ఫాండ్-ష్నైడర్ ప్రమేయముల మీద ఎక్కువ సంశోధన జరిపినారు. ఉదాహరణకు: R. చుడ్నోవ్స్కీ, D. బ్రౌనెల్, M. వాల్డ్‌ష్మిట్, ఇత్యాది గణితజ్ఞులు. ఇలాగ ఈ ...

ఉపయుక్త సంశోధన పత్రాలు (కొన్ని ముఖ్యమైన ఉల్లేఖ)

[1] R. Balasubramanian, On Waring's problem: $g(4) \le 21$, Acta Arithmetica (to appear)

[2] Chen-Jing-run, Waring's problem $g(5) = 37$, Chinese Mathematics, Vol 6, (1965), 105–127.

[3] M. N. Huxley, Small differences between consecutive primes – II, Mathematika Vol 24 (1977), 142–152.

[4] H. L. Montgomery and R. C. Vaughan, The exceptional set in Goldbach problem XXVII (1975), 353–370.

[5] K. Mahler, On the fractional parts of powers of a rational number – II, Mathematika Vol 4 (1957), 122–124.

[6] K. Ramachandra, Two remarks in prime number theory, Bull. Soc. Math. France, 105 (1977), 433–437

[7] S. Srinivasan, A note on $|\alpha p - q|$, (to appear).

[8] K. Ramachandra, Some current problems in multiplicative number theory, Maths. Student, (to appear).

[9] K. Ramachandra, Ramanujan, the inventor of circle method, (to appear).

(సంశోధనా పత్ర [6] లో, ఈ నవ్య స్వరూపము నుంచి క్రిందివి నిరూపించబడినవి.

p, q లు రెండూ బేసి ప్రధాన సంఖ్యలు. $f_a(p) = \min_q |p - 2^a q|$ (a అనేది

ధనపూర్ణాంకం అయితే) అనుకుందాం. అంటే $f_a(p) = |p - 2^a q|$

(q బేసి ప్రధాన సంఖ్యలకి) కనిష్ఠ విలువ. [6] లో

నిరూపించబడిన ఫలితం

$$\min_{a = 1, 2, 3, \ldots, 4 \times 10^8} (f_a(p)) < p^{10^{-8}}$$

గల ప్రధాన సంఖ్యలు అనంతంగా ఉన్నాయి (అంటే ~~[illegible]~~ నిరూపించినట్లు

నిరూపించారు). సంశోధనా పత్ర [7] లో ఈ ఫలితాన్ని ఇంకా మెరుగు

పరిచారు, శ్రీనివాసన్ గారు).

[8] మరియు [9] జనప్రియ వ్యాసాలు ((semi) popular articles).

[illegible]

K. RAMACHANDRA,
PROFESSOR, TIFR (MATHS)
HOMI BHABHA ROAD,
BOMBAY 400005.

[illegible],
కె. రామచంద్ర.

ఉపయుక్త గ్రంథములు

[1] Collected papers of G. H. Hardy, Vol I, Oxford (1966)

[2] Collected papers of Srinivasa Ramanujan, Edited by G. H. Hardy, P. V. Seshu Iyer and B. M. Wilson, Cambridge (1927), reissued by ~~Chelsea~~ Chelsea (N.Y.)

[3] Selected mathematical papers of Axel Thue, Universitet forlaget, Norwegian Research council for science and the Humanities (1977)

[4] RAMANUJAN (Twelve lectures on subjects suggested by ~~Twelve lectures on Srinivasa Ramanujan~~ ~~inspired~~ his life and works) by G. H. Hardy, Cambridge (1940), Reissued by Chelsea (N.Y.)

[5] Introduction to the theory of Numbers, by G. H. Hardy and E. M. Wright, Oxford (1956).

[6] Transcendental Number Theory, by A. Baker, Cambridge Univ press (1975)

[7] Transcendence Theory: Advances and Applications, (Edited by A. Baker and D. W. Masser) Conference held in 1976 in Cambridge