Geometry and Gravitation

1 Stage

SRT, Lorentz Frame Minkowski

2 Stage ~~Gener~~ GRT Falling Lift Exp. Riemann

$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \qquad c = 1$

$dt^2 - dr^2 - r^2(\quad)$

$dt - dr = du \qquad dt - du = dr$

$\cancel{dt} \quad dt = du + dr$

$= \cancel{(dt}$

$= 2du\,dr + du^2 - r^2 d\Omega^2$

$dt^2 - (dt - du)^2$

or $= 2du\,dt - du^2 - (t-u)^2 d\Omega^2$

પહેલો ઉ, વધુ બાકી

1 Geometry of null curves બાબુર માટે.

2. CMS માટે વધુ બાકી

3. Tensor માટે Rotating Einstein-DeSitter Universe

$M_0 = hT^4 \qquad$ Put $h = -k$

Do rotating Einstein de Sitter

IUCAA -3/98

January ' 98

Lensing by gravitational waves in scalar-tensor gravity: Einstein frame analysis

By

Valerio Faraoni
Edgard Gunzig

To appear in Astronomy & Astrophysics

Inter-University Centre for Astronomy and Astrophysics

An Autonomous Institution of the University Grants Commission

Preprint Request (Please quote the preprint number)
email : preprn@iucaa.ernet.in
Fax : 0212-350760
Post : IUCAA, Post Bag 4, Ganeshkhind, Pune 411 007, India

Geometrical curves and gravitation

1. Gravitation: geodesics minimal length $\delta \int ds = 0$

ds $- - - +$. ds^2 +ve, -ve, zero; time-like, space-like and light like.

1. Newtonian gravity: Parabola conics

Principle of Relativity

Einstein's Thought Experiment

P. C. Mitty

Eucledean, Labochevski, Riemann

2 4 dimensional geodesics.

3 $ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$

x, y, z are co-ords of a moving particle

motion is given by $ds^2 = c^2dt^2 - u^2dt^2 - (v-gt)^2dt^2$

$x = ut$

$y = vt - \frac{1}{2}gt^2$

$dx = udt$

$dy = vdt - gtdt$

$= dt^2(c^2 - u^2 - v^2 + 2vgt - g^2t^2)$

$= dt^2(c^2 - u^2 - v^2 - 2gy)$

A

Minkowski's metric

$ds^2 = dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$. Transfer to spherical polar

$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2(d\alpha^2 + \sin^2\alpha\, d\beta^2)$.

The retarded time $u = t - r$. Keep t as it is, replace r by u

$r = t - u$.

$ds^2 = 2du\,dt - du^2 - (t-u)^2(d\alpha^2 + \sin^2\alpha\, d\beta^2)$ ~~M~~.

we denote the function $t-u$ by r

$ds^2 = 2du\,dt - du^2 - r^2 d\Omega^2$ (M)

$R^h{}_{ijk} = 0$.

B

For gravitational field of a mass particle ($R_{ik} = 0$)

$ds^2 = 2du\,dt - (1 + \frac{2m}{r})du^2 - r^2(d\alpha^2 + \sin^2\alpha\, d\beta^2)$ (S)

$r = (t-u)$

C

~~For~~ A tachion cannot be reduced to rest. So its gravitational field is axially symmetric. Take

$ds^2 = 2du\,dt - 2L\,du^2 - M^2 \cancel{d\Omega^2} (d\alpha^2 + \sin^2\alpha\, d\beta^2)$

$L = L(r, \alpha)$ $M = M(r, \alpha)$ $r = t - ku$

Solve $R_{ik} = 0$. You get

$2L = 1 - V^2 + \frac{2m}{r}$ $M^2 = \frac{r^2}{(1 - V\cos\alpha)^2}$ $r = t - (1-V^2)u$

so that the metric finally becomes

$$ds^2 = 2\,du\,dt - \left(1 - V^2 + \frac{2m}{r}\right)du^2 - \frac{r^2}{(1 - V\cos\alpha)^2}\left(d\alpha^2 + \sin^2\alpha\, d\beta^2\right) \quad (T)$$

$$r = t - (1 - V^2)u$$

~~Of~~ T reduces to S if $V = 0$. If V is < 1, T can be transformed to S ~~a~~

$$\beta' = \beta \qquad \cos\alpha' = \frac{\cos\alpha - V}{1 - V\cos\alpha}$$

$$u' = u\sqrt{(1 - V^2)} \qquad t' = \frac{t}{\sqrt{(1 - V^2)}}$$

$$r' = r \Big/ \sqrt{1 - V^2}, \qquad m' = \frac{m}{(1 - V^2)^{3/2}}$$

Lorentz transformations

So $V < 1$ T gives ~~mass fo~~ gravitational field of a mass particle moving with uniform vel. V along Z axis. If V is > 1 this particle moves with a vel. $>$ than that of light. So it becomes a tachian

D

Gravitational field of rotating source is given by Kerr metric

$$ds^2 = 2\,(du + b\sin^2\alpha\, d\beta)\,dt - \left(1 + \frac{2mr}{r^2 + b^2\cos^2\alpha}\right)\left(du + b\sin^2\alpha\, d\beta\right)^2$$

$$- (r^2 + b^2\cos^2\alpha)(d\alpha^2 + \sin^2\alpha\, d\beta^2) \qquad (K)$$

$$r = t - u$$

If we put ~~r~~ $b = 0$ in (K) we get (S). So parameter ~~b~~ b is a measure of rotation of the source

If this source move with Vel V along the Z-axis let the new geometry be given by

$$ds^2 = 2(du + g\sin\alpha\, d\beta)\,dt - 2L\,(du + g\sin\alpha\, d\beta)^2$$

$$- M^2 (d\alpha^2 + \sin^2\alpha\, d\beta^2)$$

with $g = g(\alpha)$ $\quad L = L(r, \alpha)$ $\quad M = M(r, \alpha)$

$r = t - ku$

Solve for $R_{ik} = 0$ Final solution is

$$ds^2 = 2\left(du + \frac{b\sin^2\alpha}{(1 - V\cos\alpha)^2}\, d\beta\right)dt - \left(1 - V^2 + \frac{2mr}{r^2 + y^2}\right)\left(\quad\right)^2$$

$$- \frac{(r^2 + y^2)}{(1 - V\cos\alpha)^2}\left(d\alpha^2 + \sin^2\alpha\, d\beta^2\right)$$

$y = -b\cos\alpha \qquad r = t - (1 - V^2)\,u$

$b' = \dfrac{b}{1 - V^2} \qquad y' = y\,/\,V(1 - V^2),$

E

M is metric for flat space

If the space is spherical of radius R

$$ds^2 = 2\,du\,dt - du^2 - \left(\sin^2\frac{r}{R}\right)R^2\,(d\alpha^2 + \sin^2\alpha\, d\beta^2) \qquad (E)$$

~~if $\frac{r}{R} = a$ ∞ $R \to \infty$, $a \to a$~~

This is the geometry of Einstein Universe ~~$ds^2 = 2\,du\,dt$~~

If $R \to \infty$ in (E) E changes to M

For a mass particle in Einstein Universe

$$ds^2 = 2\,du\,dt - \left(1 + \frac{2m\cos\frac{r}{R}}{R\sin\frac{r}{R}}\right)du^2 - R^2\sin^2\frac{r}{R}\,d\Omega^2 \qquad (ES)$$

To go to a tachion in Einstein Universe

Take $ds^2 = 2\,du\,dt - 2L\,du^2 - M^2\,d\Omega^2$

$L = L(r,\alpha)$, $M = M(r,\alpha)$ $\quad r = t - ku$

But now not $R_{ik} = 0$. ~~Fif~~ Find ϕ, ρ in ES. ~~A~~ Then ~~...~~ in the new set up keep ϕ ρ invariant

$$2L = 1 - V^2 + \frac{2m\cos\frac{r}{R}}{R\sin\frac{r}{R}} \qquad M^2 = \frac{R^2\sin^2\frac{r}{R}}{(1 - V\cos\alpha)^2} \qquad r = t - (1-V^2)u$$

$$ds^2 = 2\,du\,dt - \left(1 - V^2 + \frac{2m\cos\frac{r}{R}}{R\sin\frac{r}{R}}\right) du^2$$

$$- \frac{R^2 \sin^2\frac{r}{R}}{(1 - V\cos\alpha)^2}\left(d\alpha^2 + \sin^2\alpha\, d\beta^2\right) \qquad (ET)$$

If $V < 1$ (ET) can be transformed to ES by the same transformations that took T to S with the additional ~~s~~ transformation

$$R' = \frac{R}{\sqrt{(1-V^2)}},$$

5 સુધી નહિ પણ 6 સુધી ઉપરનો ગુણધર્મ લાગુ પડશે. 1 થી શરૂ કરતાં આવી $n+1$ સંખ્યાઓ 6, 10, 12, 14, 15, 16, 18 વિગેરે અનેક હોઈ શકે. એક વાત તો નક્કી જ કે $n+1$ કોઈ અવિભાજય સંખ્યા હોઈ શકે નહિ. કારણ કે અવિભાજય સંખ્યાના અવયવો પડે નહિ.

પ્રશ્ન (2) નો જવાબ :- આ પ્રશ્નમાં તંત્રીશ્રીએ પ્રશ્નને વધુ વ્યાપક બનાવીને $n+1$ થી $n+7$ સુધી લંબાવેલ છે. આનો અર્થ એ થયો કે n અને $n+k$ એવી બે અવિભાજય સંખ્યાઓ શોધવી જોઈએ કે જેના વચ્ચે 7 વિભાજય સંખ્યાઓ હોય. બે અવિભાજય સંખ્યાઓ વચ્ચેનું અંતર શોધવા માટે કોઈ ગાણિતિક સૂત્ર પ્રાપ્ય નથી. તેથી બધી પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ તપાસવી પડે. ડૉ. આઈ. એચ. શેઠ લિખિત Prime Numbers ની પુસ્તિકાના પાના નં. 20 ઉપર જણાવેલ છે કે 1 થી 100 વચ્ચે 25 અવિભાજય સંખ્યાઓ છે. આ 25 અવિભાજય સંખ્યાઓ તપાસતાં (સદનસીબે !) 89 અને 97 સંખ્યાઓ વચ્ચે 7 નો તફાવત છે. આનો અર્થ એ થયો કે 1 થી 89 ની સંખ્યાઓનો લ.સા.અ. કાઢી તેમાંથી 1 બાદ કરતાં જે સંખ્યા આવે તેને આ ગુણધર્મ લાગુ પડે. આ સંખ્યા ળા છે $2^6 \times 3^4 \times 5^2 \times 7^2 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 \times 23 \times 29 \times 31 \times 37 \times 41 \times 43 \times 47 \times 53 \times 59 \times 61 \times 67 \times 71 \times 73 \times 77 \times 79 \times 83 \times 89 - 1$. આ સંખ્યા ગણીને લખવામાં સુગણિતમ્ નું કદાચ આખું પાનું ભરાઈ જાય તથા તંત્રીશ્રી મારા આ દાખલાને ખોટો ઠરાવે તો મહેનત માથે પડે તે દહેશતથી આખી રકમ ઊકેલી નથી !

10, સુવર્ણનગર સોસાયટી, **નૌતમભાઈ વખારિયા**
મેમનગર રોડ, અમદાવાદ 380 052

નોંધ : લેખકે જે યાદી આપી છે તેમાં 16 ન હોવી જોઈએ. ખરેખર તો n વિભાજય હોય અને તે કોઈ અવિભાજય સંખ્યાનો ઘાત ન હોય તો જ એવું બને કે $1, 2, 3, \ldots, n-1$ ના લ.સા.અ. ને n વડે નિશેષ ભાગી જ શકાય. બીજા પ્રશ્નનો લેખકનો ઉત્તર સાવ સાચો છે.

3. જાદુઈ શ્રેણિકો : એક નમૂનારૂપ ઉદાહરણ

સુગણિતમ્ ના અંક 172 ના પાના નં. 32 પર 3×3 પ્રકારના જાદુઈ ચોરસ શ્રેણિકોનો ઝગમગતો ચમકારો થયો. આ વીજળીક ચમકારાની ચિનગારી શ્રી કોરી સત્યશરણ આર. ના ફળદ્રુપ ભેજામાં સડસડાટ કરતી પસાર થઈ ગઈ. વિસ્ફોટ થતાં, શ્રી કોરીના મગજમાં શાંત રહેલાં વિચારોમાં તરંગો પેદાં થયાં. પરિણામ-સ્વરૂપે જાદુઈ શ્રેણિકોના ગુણાકાર વિષેની વધુ રસપ્રદ માહિતીઓ મેળવી. આવી બધઈ ભેગી થયેલી માહિતીઓ સુગણિતમ્ ના અંક 174 માં પ્રગટ થઈ. જીજ્ઞાસુ વાંચકોમાં પણ અજબ-ગજબની હલચલ મચી ગઈ. શ્રી કોરીએ તેમના લેખમાં અચરજભર્યા પરિણામોની વિસ્તૃત ચર્ચા કરી. આ એમનું દાદ માગી લે તેવું પ્રશંસનીય કાર્ય ગણાય.

તેમણે જે પરિણામોની છણાવટ કરી છે તે ફરી યાદ કરી લઈએ :-

(1) કોઈપણ 3×3 પ્રકારના જાદુઈ શ્રેણિકને U_1, U_2 અને U_3 ના રેખીય સંયોજન તરીકે દર્શાવી શકાય. જયાં પાયાના ત્રણ જાદુઈ શ્રેણિકો

$$U_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ અને}$$

$$U_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ છે.}$$

આ પરિણામ વિષે વધુ રસ પડે એ આશયથી પૂછવાનું મન થાય છે :-

જાદુઈ શ્રેણિક $\begin{pmatrix} 11 & 6 & 10 \\ 8 & 9 & 10 \\ 8 & 12 & 7 \end{pmatrix}$ ãg U_1, U_2 અને U_3 ના રેખીય સંયોજન તરીકે દર્શાવો.

પાયાના આ ત્રણ શ્રેણિકનો વચ્ચેના કેટલાક મૂળભૂત સંબંધો નીચે પ્રમાણે છે તેની નોંધ ફરીથી કરી લઈએ :-

(a) $U_1' = U_1$ અર્થાત U_1 સંમિત શ્રેણિક છે.
(b) $U_3 = U_2'$. (c) $U_1^2 = U_2 U_3 = U_3 U_2$.
(d) $U_1 U_2 = U_3 U_1$. (e) $U_2 U_1 = U_1 U_3$.
(f) $U_3^2 = U_2^2$. નોંધી લો કે U_1^2, U_2^2, U_3^2 જાદુઈ શ્રેણિકો નથી.

(2) કોઈપણ ત્રણ 3×3 પ્રકારના જાદુઈ શ્રેણિકોનો ગુણાકાર જાદુઈ શ્રેણિક છે. આ પરથી સરળતાથી તારવી શકાય કે જો કોઈ જાદુઈ શ્રેણિક A હોય તો