યંત્રવિદ્યાનું સરળ પાઠ્યપુસ્તક

યંત્રવિદ્યાનું
સરળ પાઠ્યપુસ્તક

: લેખક :

પ્રહ્લાદ ચુ. વૈદ્ય,

એમ. એસસી., પીએચ. ડી.

ગણિતના પ્રાધ્યાપક,

ગુજરાત યુનિવર્સિટી, અમદાવાદ

[પાંચમી સુધારેલી આવૃત્તિ : ગુજરાતી]

૧૯૬૨

ચરોતર બુક સ્ટોલ

તુલસી સદન, સ્ટેશન રોડ, આણંદ

પ્રથમ આવૃત્તિ : ૧૯૫૪ (અંગ્રેજી)
બીજી આવૃત્તિ : ૧૯૫૫ (અંગ્રેજી)
ત્રીજી આવૃત્તિ : ૧૯૫૬ (ગુજરાતી)
ચોથી આવૃત્તિ : ૧૯૫૭ (ગુજરાતી)
પાંચમી આવૃત્તિ : ૧૯૬૨ (ગુજરાતી)

કિંમત રૂ. ૫·૦૦

પ્રકાશક : શ્રી. રમણભાઈ ચુ. પટેલ,
ચરોતર બુક સ્ટોલ, આણંદ
મુદ્રક : રેવ. એન. હર્નાન્ડેઝ, એસ. જે.,
આણંદ પ્રેસ, આણંદ (જી. ખેડા)

PREFACE TO THE FIRST EDITION

This elementary book is written with a view to cover the syllabus of mechanics in the Mathematics papers at the Intermediate examinations of various universities in Bombay state. I have been teaching this subject for more than ten years by now, and the method of presentation adopted in this book has been evolved during this period of continuous teaching. I hope the wider circle of readers to whom this presentation is now commended, will appreciate this method. I shall indeed be grateful to anyone who will send me his criticisms or suggestions for any topic covered in this book.

I have now to perform the pleasant duty of expressing my thanks for the help received by me. Professor R. J. Thaker of Birla Vishvakarma Mahavidyalaya has prepared the sketches for blocks in this book. I express my grateful thanks to him. I also thank my colleague Shri R. A. Raman who has helped me with the work of proof correction.

Lastly the management of Charotar Printing Press deserves our thanks for the courtesy shown to us throughout the printing of this book.

Vallabh Vidyanagar

25th May, 1954 **P. C. VAIDYA**

પ્રસ્તાવના

[પ્રથમ ગુજરાતી આવૃત્તિ]

Text Book of Elementary Mechanicsનું ગુજરાતી ભાષાન્તર ગુજરાતના વિદ્યાર્થીઓ તથા શિક્ષકો સમક્ષ રજુ કરતાં આનંદ થાય છે. આ વર્ષથી ગુજરાત યુનિવર્સિટીના ઈન્ટર વર્ગના વિદ્યાર્થીઓ ગુજરાતી મારફત ગણિત શીખશે તેથી આ ભાષાન્તરની જરૂર પડી છે.

પારિભાષિક શબ્દો યોજવા માટે યુનિવર્સિટી સિન્ડિકેટે એક સમિતિ નીમી છે. પરંતુ તે સમિતિ પોતાનું કાર્ય પૂરું કરે તે પહેલાં તો પુસ્તક પ્રસિદ્ધ કરવાનો સમય આવી લાગ્યો એટલે મને ઉચિત લાગ્યા તે શબ્દોનો ઉપયોગ આ પુસ્તકમાં કર્યો છે. સંક્રાન્તિકાળમાં પારિભાષિક શબ્દો અંગે થોડા મતભેદો તો રહેવાના જ; પરંતુ કાળ જતાં જે શબ્દો રૂઢ થશે તે જ ચાલુ રહેશે.

ગુજરાતી માધ્યમ થતાં એક ફાયદો તો જરૂર થયો છે કે ઘરમાં આબાલવૃદ્ધ સર્વે હવે પ્રુફ તપાસવામાં મદદ કરી શકે છે એટલે તે માટે કોનો આભાર માનવો?

અંગ્રેજી પુસ્તક વાપરનાર શિક્ષક તથા વિદ્યાર્થીબન્ધુઓ તરફથી આવેલાં સૂચનો માટે આભાર વ્યકત કરવાની આ તક લઉં છું અને ભવિષ્યમાં પણ આવાં સૂચનો સાભાર સ્વીકારતો રહીશ.

ગુજરાત કૉલેજ,
અમદાવાદ—૬
૧૯ જૂન, ૧૯૫૬

પ્ર. ચુ. વૈદ્ય

પ્રસ્તાવના

[ત્રીજી ગુજરાતી આવૃત્તિ]

પુસ્તક વાપરનાર શિક્ષક તથા વિદ્યાર્થીસમુદાયનું એક સામાન્ય સૂચન હતું કે કેટલાંક પ્રકરણોને છેડે આપેલાં મનોયત્નોમાં જરા વધારે પ્રમાણમાં દાખલા હોય તો પસંદગી કરવામાં સરળતા થાય. આ સૂચનને લક્ષમાં રાખીને લગભગ બધાં જ મનોયત્નોમાં થોડા થોડા દાખલા ઉમેર્યા છે અને આમ આખા પુસ્તકમાં ચાળીસ ઉપરાંત નવા દાખલા મૂકયા છે. વળી પુસ્તકને છેડે ૧૯૫૯થી ૧૯૬૧ સુધીના ગુજરાત યુનિવર્સિટીના ઈન્ટરસાયન્સ પરીક્ષાના યંત્રવિદ્યાના પ્રશ્નપત્રો પણ આપેલા છે. અને તેથી ઉપર જણાવેલી પુસ્તકની ઊણપ કંઈક અંશે ઓછી થશે.

પરીક્ષાના પ્રશ્નપત્રો છાપવાની પરવાનગી આપવા માટે ગુજરાત યુનિવર્સિટીના રજીસ્ટ્રારનો આભાર માનવાની આ તક લઉં છું. પુસ્તકની સુઘડ છપાઈ તથા છાપકામ દરમિયાન વિવેકપૂર્ણ સહકાર બદલ આણંદ પ્રેસનો પણ મારે આભાર માનવો જોઈએ.

ગુજરાતના શિક્ષકો અને વિદ્યાર્થીઓએ એક સામટો જે આ પુસ્તકને આવકાર આપ્યો છે તે માટે હું તેમનો ઋણી છું.

ગુજરાત યુનિવર્સિટી
વિજ્ઞાન ભવન,
અમદાવાદ—૯
તા. ૧-૭-૧૯૬૧

પ્ર. ચુ. વૈદ્ય

અનુક્રમણિકા

ભાગ ૧

સ્થૈતિકી

પ્રકરણ		પાન
૧	પરિચય	૧
૨	કણસ્થૈતિકી	૧૦
૩	દૃઢ પદાર્થ પર કાર્ય કરતાં બળો	૫૪
૪	ગુરુત્વકેન્દ્ર	૮૦
૫	દૃઢ પદાર્થની સમતુલા	૧૦૨

ભાગ ૨

પ્રવૈગિકી

૬	સુરેખામાં ગતિ	૧૧૯
૭	ન્યૂટનના ગતિનિયમો	૧૪૩
૮	વેગમાન અને શકિતના સિદ્ધાન્તો	૧૭૨
૯	વક્રરેખામાં ગતિ	૧૯૮
૧૦	સાપેક્ષવેગ	૨૧૭
	ગુજરાત યુનિવર્સિટીની પરીક્ષાના પ્રશ્નપત્રો	૨૩૩
	પરિશિષ્ટ	૨૪૪

સ્થૈતિકી

[STATICS]

પ્રકરણ ૧

પરિચય

૧. પ્રાસ્તાવિક.

આપણે પરિવર્તનશીલ દુનિયામાં વસીએ છીએ. પ્રતિક્ષણ આપણી આસપાસની વસ્તુઓમાં પરિવર્તન થતું આપણે નિહાળીએ છીએ. નાનાશાં બિયામાંથી પાંગરતો અને ફૂલતો છોડ — કલાકે કલાકે આકાશમાં પોતાનું સ્થાન-પરિવર્તન કરતો સૂર્ય — બૉઈલરનાં પાણીનું બાષ્પીભવન અને વરાળની મદદથી દોડતી આગગાડીઓ — આવાં દુનિયામાં થતાં પરિવર્તનોનાં અનેક ઉદાહરણો રોજીન્દાં અવલોકનોમાં જોવા મળે છે. બારીમાંથી ડોકિયું કાઢીને બહાર નજરે પડતાં પરિવર્તનો ઉપર મનન કરવાની આદત કેળવવા જેવી ખરી. એક રીતે જોતાં વિજ્ઞાનની એવી વિસ્તૃત વ્યાખ્યા પણ કરી શકાય કે વિજ્ઞાન એટલે પદાર્થમાં થતાં પરિવર્તનોનો તથા તેનાં કારણોનો અભ્યાસ.

આવાં પરિવર્તનોનાં ઊંડાં અધ્યયનને અંતે ફ્રેન્ચ ગણિતી અને તત્ત્વવેત્તા હેન્રી પોઈન્કારેએ (૧૮૫૪-૧૯૧૨) એક સુન્દર પરિણામ તારવ્યું. તેણે વિધાન કર્યું કે કોઈ પણ પદાર્થ જે અનેક પ્રકારનાં પરિવર્તનો પામી શકે છે તેમાંનાં સર્વથી સાદાં કે સરળ પરિવર્તનો તે સ્થાનપરિવર્તનો. આ રીતે વિચારતાં, જેમાં આ સર્વથી સરળ પરિવર્તનો — સ્થાનપરિવર્તનો — નો અભ્યાસ કરવામાં આવે તે વિજ્ઞાનને સરળમાં સરળ વિજ્ઞાન ગણી શકાય. આ સરળ વિજ્ઞાનને યંત્રવિજ્ઞાન કે યંત્રવિદ્યાનું નામ આપવામાં આવ્યું છે. આપણે યંત્રવિદ્યાની નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યા આપી શકીએ:

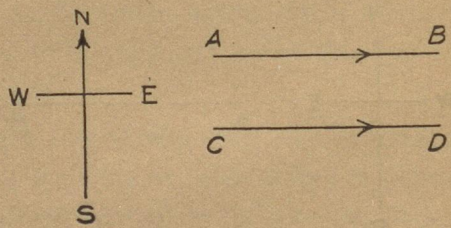
વિજ્ઞાનની જે શાખામાં પદાર્થ અને તેનાં સ્થાનપરિવર્તનનો અભ્યાસ કરવામાં આવે છે, તેને યંત્રવિદ્યા કહેવામાં આવે છે.

યંત્રવિદ્યાના અભ્યાસનો પ્રારંભ આપણે આ વ્યાખ્યાની સમજૂતીથી કરીશું. આ પ્રકરણમાં વ્યાખ્યામાં આવતા નીચેના ખ્યાલોની ચર્ચા કરીશું:

AB. આ પુસ્તકમાં આપણે આ બન્ને સંકેતોનો ઉપયોગ કરીશું. **AB** એક સદિશ છે. તેનું મહત્ત્વ ABની લંબાઈની બરાબર છે અને તેની દિશા A થી B તરફની છે. સદિશ **BA** ની એજ લંબાઈ છે; પરંતુ તેની દિશા B થી A તરફની છે, એટલે કે પહેલા સદિશ કરતાં તેની દિશા ઊલટી છે. આ વસ્તુ નીચેના સમીકરણ વડે દર્શાવી શકાય:

$$\mathbf{AB} = -\mathbf{BA}$$

સદિશની ઊલટી દિશા દર્શાવવા માટે આપણે ઋણની નિશાની વાપરી છે.



આકૃતિ ૨

આ. (૨)માં $AB = CD = l$ અને $AB \parallel CD$ છે. તો **AB** નું મહત્ત્વ l થયું. તેની દિશા પૂર્વ તરફની છે. સદિશ **CD**નું મહત્ત્વ પણ l છે અને તેની દિશા પણ પૂર્વ તરફની છે. તેથી આપણે લખી શકીએ કે

$$\mathbf{AB} = \mathbf{CD}.$$

આગળ વધતાં આપણે એમ પણ લખી શકીએ કે

$$\mathbf{AB} = -\mathbf{DC}.$$

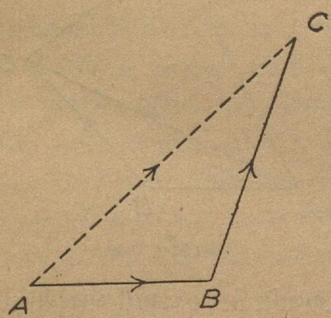
હવે **આ.** (૩) તરફ જુઓ. A કોઈ કણનું પ્રાથમિક સ્થાન છે. કણ ખસવા માંડે છે. થોડા સમય પછી તે B માં આવે છે.

સદિશ **AB** તેનું સ્થળાન્તર કે સ્થાનપરિવર્તન દર્શાવે છે. કણ ફરી પાછું ખસવા લાગે છે. અને થોડા સમય બાદ C બિન્દુએ પહોંચે છે. એટલે કે તેનું સ્થળાન્તર **BC** થયું. કણ કુલ બે સ્થળાન્તર પામ્યું. **AB** અને **BC** અને તેના ફળસ્વરૂપ, તેનું મૂળ સ્થાન A હતું તે બદલાઈને તેનું છેવટનું સ્થાન C થયું. એટલે કે એક પછી એક બે ક્રમિક સ્થળાન્તરો **AB** અને **BC** ને પરિણામે

કણનું કુલ સ્થળાન્તર **AC** થયું. આપણે **AC** ને પરિણામી સ્થળાન્તર કહીશું અને તેને

$$\mathbf{AC} = \mathbf{AB} + \mathbf{BC} \quad \text{અથવા} \quad \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} \ldots (1)$$

એમ લખીશું. "એક પછી એક મળતાં બે સ્થળાન્તરો **AB** અને **BC** ને પરિણામે એક કણને કુલ સ્થળાન્તર **AC** મળે છે" સમીકરણ (1) આ હકીકત દર્શાવવાની એક ટૂંકી રીતમાત્ર છે. તેથી વધારે તે સમીકરણમાં કાંઈજ વાંચવાનું નથી. સ. ક. (1)માં આવતી ધન નિશાની, આપણે જે પ્રાથમિક શાળામાં શીખી ગયા છીએ તેવા સરવાળાની દ્યોતક નથી. સ. ક. (1)માં આવતી + નિશાનીનો



આકૃતિ ૩

એક વિશિષ્ટ અર્થ છે અને તે અર્થ **આ.** (૩)માં બતાવવામાં આવ્યો છે. આપણે એમ કહી શકીએ કે સ. ક. (1)ની + નિશાની નીચેની ભૌમિતિક રચનાની સૂચક છે. સુરેખા AB દોરો. B માંથી સુરેખા BC આપેલી દિશામાં દોરો. A અને C ને જોડી દો. એટલે **AB** + **BC** બરાબર સદિશ **AC** મળશે. સ. ક. (1)માં આવતો સરવાળો એ, આ રીતે જોતાં, ભૌમિતિક સરવાળો છે. આપણે તેને સદિશ સરવાળો પણ કહીશું.

ઉદાહરણ :

સિદ્ધ કરો કે $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = \overline{AD}$.

આપણે સ. ક. (1)ને આ રીતે લખીએ:

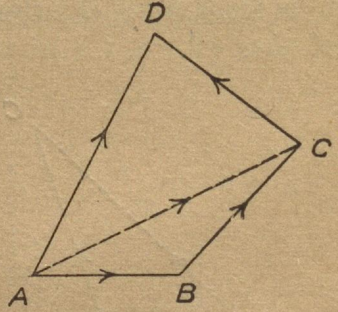
$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$

હવે $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}$ શોધવું સરળ છે. **આ.** (૪) જુઓ. $\overline{AB}$ અને $\overline{BC}$ને સદિશ સરવાળાનો નિયમ લગાડો, એટલે

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC} \text{ થશે.}$$

હવે સદિશ $\overline{CD}$ બન્ને બાજુએ ઉમેરો:

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}=\overline{AC}+\overline{CD}.$$



આકૃતિ ૪

ફરી પાછો સદિશ સરવાળાનો નિયમ જમણી બાજુથી વાપરો.

$$\therefore \quad \overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}=\overline{AC}+\overline{CD}$$

$$=\overline{AD}$$

$$\therefore \quad \overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}=\overline{AD}.$$

આ નિયમનું સાધારણીકરણ કરવું બહુ સહેલું છે:

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}=\overline{AE};$$

અને એજ પ્રમાણે આગળ વધી શકાય.

ઉપસિદ્ધાન્ત:

$$\mathbf{AB}+\mathbf{BA}=\mathbf{AA}.$$

પરંતુ સ્થળાન્તર **AA**નો અર્થ એજ કે સ્થાનનું પરિવર્તન થયુંજ નથી, તેથી **AA** $=0$ લખી શકાય.

$$\therefore \quad \mathbf{AB}+\mathbf{BA}=0 \text{ અર્થાત્ } \mathbf{AB}=-\mathbf{BA}.$$

આ વિભાગમાં આપણે સદિશની કેટલીક વિશિષ્ટતાઓ સમજવાનો પ્રયાસ કર્યો છે. આપણી જૂની અને જાણીતી સંખ્યાઓ સાથે દિશાનો કોઈ પણ ખ્યાલ સંકળાયેલો નથી. કોઈ વિદ્યાર્થીની ઉંમર ૧૬ વર્ષની હોય તો આપણે એમ નથી કહેતા કે તેની ઉંમર ઉત્તર દિશામાં ૧૬ વર્ષની છે! ઉંમર શુદ્ધ સંખ્યા છે, તે સદિશ નથી. આવી શુદ્ધ સંખ્યાને આપણે નિર્દિશ કહીશું. આપણા જાણીતા આંકડાઓ નિર્દિશ સંખ્યાઓ છે. આવી બે નિર્દિશ સંખ્યાઓનો સરવાળો કેમ કરવો તે તો આપણી પ્રાથમિક શાળાના દિવસો દરમિયાન આપણે શીખ્યા. આ વિભાગમાં આપણે બે સદિશ સંખ્યાઓનો સરવાળો કરતાં શીખ્યા છીએ. સદિશ સરવાળાની રીત એટલે **આ.** (૩)માં બતાવેલી ભૌમિતિક રચના. સ્પષ્ટ છે કે પ્રાથમિક શાળાની નિર્દિશ સંખ્યાઓના સરવાળા કરવાની રીત અને આપણી આ સદિશ સંખ્યાઓના સરવાળા કરવાની રીતો બિલકુલ ભિન્ન છે. જો કે બન્ને પ્રકારના સરવાળા દર્શાવવા માટે આપણે એક જ જાતની $(+)$ નિશાની વાપરીએ છીએ, છતાં પણ જ્યારે આપણે $3+5$ કે $x+y$ લખીએ છીએ ત્યારે આપણા મગજમાં સામાન્ય બીજગણિતના સરવાળાનો ખ્યાલ હોય છે અને જ્યારે $\overline{AB}+\overline{BC}$ કે $\overline{P}+\overline{Q}$ લખીએ છીએ ત્યારે આપણને સદિશ સરવાળાનો ખ્યાલ હોય છે. ખરૂં પૂછો તો સદિશ સંખ્યાઓ ઉપર દોરેલી લીટી જ સરવાળો સદિશ છે એમ સૂચવી જાય છે. જ્યારે આપણે સદિશ સંખ્યાઓ જોડે કામ કરતા હોઈએ ત્યારે એ બહુજ જરૂરનું છે કે આપણે આવી સંખ્યાઓ ઉપરની લીટી દોરવી ભૂલીએ નહિ. નીચેનાં ઉદાહરણથી આ વસ્તુ વધારે સ્પષ્ટ થશે.

ઉદાહરણ :

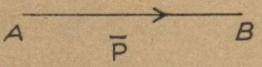
દર્શાવો કે $AB+BC \neq AC$ કિન્તુ $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$. અહિં $AB+BC$ સામાન્ય સરવાળો સૂચવે છે, અને ભૂમિતિનું એક પ્રમેય કહી જાય છે કે ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાજુનો સરવાળો ત્રીજી કરતાં વધારે હોય. એટલે કે $AB+BC > AC$. પરંતુ સ. ક. (1)માં દર્શાવેલો સદિશ સરવાળાનો નિયમ કહી જાય છે કે $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$. $AB+BC > AC$ નો અર્થ એ થયો કે જો AB 5 સેમી. હોય, BC 3 સેમી. હોય તો AC ની લંબાઈ 8 સેમી.થી ઓછી આવે. પરંતુ $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$ નો અર્થ એ થાય છે કે

પહેલાં તમે A થી B સુધી જાઓ, પછી B થી C સુધી જાઓ તો તમે ખરેખર A થી C સુધી ગયા છો. આ રીતે સામાન્ય સરવાળાના નિયમ પ્રમાણે $AB + BC \neq AC$, જ્યારે સદિશ સરવાળાના નિયમ અનુસાર $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$. તેથીજ તો એ નિતાન્ત આવશ્યક છે કે જ્યારે આપણે સદિશ સરવાળાનો ઉપયોગ કરતા હોઈએ ત્યારે સદિશ સંખ્યાઓ ઉપરની રેખા દોરવી જ જોઈએ.

૫. બળ.

સ્થાનપરિવર્તન વિષે ચર્ચા કર્યા પછી હવે આપણે આ સ્થાનપરિવર્તન ઉત્પન્ન કરનારાં કારણો તરફ આપણું ધ્યાન કેન્દ્રિત કરીએ. "પદાર્થ સ્થાન-પરિવર્તન પામે છે" અને "પદાર્થ ગતિ કરે છે" આ બન્ને વિધાનો એક જ હકીકત સૂચવે છે. આપણે જાણીએ છીએ કે આગગાડી ગતિ કરે છે કારણ કે એન્જિન તેને ખેંચે છે. પેલું ઈતિહાસપ્રસિદ્ધ ન્યૂટનનું સફરજન જમીન ઉપર પડ્યું કારણ કે પૃથ્વીએ તેને આકર્ષ્યું; અર્થાત્ સફરજનની અધોગતિ (નીચે તરફની ગતિ) માટે પૃથ્વીનું આકર્ષણબળ જવાબદાર હતું.

કોઈ પણ પદાર્થની ગતિ માટેનું કારણ શું એ જાણવા જઈએ તો હમેશાં તે ગતિ માટે કોઈ બળ જવાબદાર છે એમ જણાશે. પદાર્થ ઉપર કોઈ ખાસ બળ કાર્ય કરે છે અને તેથી પદાર્થ ગતિ કરે છે. આપણે બળની નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યા કરી શકીએ: **કોઈ પણ પદાર્થનું સ્થાનપરિવર્તન કરવાનો યત્ન કરનાર કાર્યસાધક તે એ પદાર્થ ઉપર કામ કરનાર બળ છે.**



આકૃતિ ૫

બળ સ્થળાન્તર ઉત્પન્ન કરવાનો યત્ન કરે છે. પરંતુ સ્થળાન્તર તો સદિશ છે. એટલે જ તો તેવું સ્થળાન્તર ઉત્પન્ન કરનાર બળ પણ સદિશ હોવું જોઈએ. પ્રત્યેક બળને મહત્ત્વ હોય છે અને એક દિશા પણ હોય છે. ધારો કે બળનું મહત્ત્વ P છે અને સુરેખા AB તેની કાર્યદિશા સૂચવે છે. (**આ.** ૫). આ હકીકત દર્શાવવા માટે આપણે નીચેનો વાકય-પ્રયોગ વાપરી શકીએ— "AB દિશામાં કાર્ય કરતું બળ P છે." અથવા તો સદિશ સંકેત વાપરીને આપણે ટૂંકું અને ટચ વિધાન કરીએ કે "બળ $\overline{P}$ છે."

૬. સ્થૈતિકી અને પ્રવૈગિકી.

ઉપર આપેલી બળની વ્યાખ્યા કહી જાય છે કે પદાર્થ ઉપર કાર્ય કરતાં બળો પદાર્થનું સ્થાનપરિવર્તન કરવા પ્રયત્ન કરે છે; અર્થાત્ બળો પદાર્થમાં ગતિ ઉત્પન્ન કરવા પ્રયત્નશીલ હોય છે. પોતાના પ્રયત્નમાં આ બળો સફળ થશે કે કેમ? થાય પણ ખરાં. અને ન પણ થાય. રેલ્વે પુલનો દાખલો લઈએ તો, જ્યારે આગગાડી પુલ પરથી પસાર થાય છે, ત્યારે કેટલાંક બળો પુલને ગતિમાન કરવા પ્રયત્ન કરે છે. શું આપણે એમ ઈચ્છીશું કે આ બળો તેમના પ્રયત્નમાં સફળ થાય? અલબત્ત નહિ. જ્યારે જ્યારે ઉપરથી ગાડી પસાર થાય ત્યારે ત્યારે જો પુલ પણ ગતિ પકડવા માંડે તો તો મોટી આપત્તિ ઊભી થાય! આપણી સમક્ષ બે વિકલ્પો ઉપસ્થિત થાય છે. પદાર્થ ઉપર કાર્ય કરતાં બળો પદાર્થને સ્થિર રાખે અથવા ગતિમાન કરે. રેલ્વે પુલ ઉપર કાર્ય કરતાં બળોએ પુલને ગતિ આપવી જોઈએ નહિ; રેલ્વે ટ્રેન પર કાર્ય કરતાં બળોએ ટ્રેનને ગતિ આપવી જ જોઈએ. આ બે વિકલ્પોના અનુસંધાનમાં આપણે યંત્રવિદ્યાની બે શાખાઓ પાડીએ છીએ. આપણે આ શાખાઓને પુલનું યંત્રવિજ્ઞાન અને ટ્રેનનું યંત્રવિજ્ઞાન એમ નામ આપી શકીએ અથવા તો સ્થિતિવિજ્ઞાન અને ગતિવિજ્ઞાન એમ કહી શકીએ. તેનાં શાસ્ત્રીય નામ છે: સ્થૈતિકી અને પ્રવૈગિકી.

યંત્રવિદ્યાની જે શાખામાં પદાર્થ ઉપર કાર્ય કરવા છતાં તેમાં ગતિ ઉત્પન્ન ન કરી શકનાર બળો તથા તે પદાર્થની સ્થિરતાનો અભ્યાસ કરવામાં આવે છે તેને સ્થૈતિકી કહે છે.

યંત્રવિદ્યાની જે શાખામાં પદાર્થ ઉપર કાર્ય કરી તેમાં ગતિ ઉત્પન્ન કરતાં બળો તથા ઉત્પન્ન થતી પદાર્થની ગતિનો અભ્યાસ કરવામાં આવે છે તેને પ્રવૈગિકી કહે છે.

આપણે આ પુસ્તકમાં વિજ્ઞાનની આ બન્ને શાખાઓનો અભ્યાસ કરીશું. હવે પછીના પ્રકરણમાં આપણે સ્થૈતિકીથી શરૂઆત કરીશું.

પ્રકરણ ૨

કણસ્થૈતિકી

ભાગ ૧ લો

[કણ ઉપર કાર્ય કરતાં બે બળો]

---

૧. સ્થૈતિકીનો પ્રધાન કૂટપ્રશ્ન.

બળની વ્યાખ્યા ઉપરથી આપણે જાણીએ છીએ કે પદાર્થ ઉપર કાર્ય કરતું બળ પદાર્થને ગતિમાન કરવાનો પ્રયાસ કરે છે. ગતિ ઉત્પન્ન કરવી એ તો બળનું સ્વાભાવિક લક્ષણ છે. છતાં પણ આપણે એવા દાખલાઓ જાણીએ છીએ (દા. ત. રેલ્વે પુલ) જ્યાં બળોના કાર્ય કરવા છતાં પણ પદાર્થ ગતિ પકડતા નથી. આવા દાખલાઓમાં પદાર્થ ઉપર કાર્ય કરતું પ્રત્યેક બળ, તેના સ્વભાવ પ્રમાણે પદાર્થમાં ગતિ ઉત્પન્ન કરવાનો પ્રયત્ન કરે છે તેમ છતાં બધાં બળોનાં કાર્યને સરવાળે પદાર્થને કુલ ગતિ જરાપણ મળતી નથી. બળો એકબીજાની અસરનો છેદ ઉડાડી દેતાં હોય તેવું જણાય છે. સ્વભાવિક રીતે જ આપણા મનમાં સવાલ ઊઠે છે: એવી તે કેવી બળોની ગોઠવણ કરી છે જેથી તેઓ એકબીજાની અસર નાબૂદ કરી શકે છે? આ સવાલનો જવાબ આપવો એ જ સ્થૈતિકીના અભ્યાસનો મુખ્ય હેતુ છે. સ્થૈતિકીનો પ્રધાન કૂટપ્રશ્ન આ છે: પદાર્થ ઉપર કાર્ય કરતાં બળોની એ વ્યવસ્થા શોધી કાઢવી કે જે વ્યવસ્થાને કારણે બળોના કાર્ય કરવા છતાં પણ પદાર્થને ગતિ પ્રાપ્ત થતી નથી.

આ કૂટપ્રશ્નનો ઉકેલ શોધવા માટે, આપણે સર્વપ્રથમ આપણા સરળતમ પદાર્થ—કણ—ને લઈશું; અને કણ ઉપર કાર્ય કરતાં બળોનો અભ્યાસ કરીશું. ક્રમાનુસાર નીચેના વિકલ્પોનો વિચાર કરીશું. (૧) કણ ઉપર એક બળનું કાર્ય (૨) એક કણ ઉપર કાર્ય કરતાં બે બળ (૩) એક કણ ઉપર કાર્ય કરતાં ત્રણ બળ

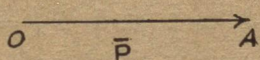
વગેરે વગેરે. અને પ્રત્યેક વિકલ્પમાં બળોની એ વ્યવસ્થા શોધી કાઢીશું કે જેને પરિણામે બળોના કાર્ય કરવા છતાં પણ કણને ગતિ પ્રાપ્ત થતી નથી. જ્યારે આ રીતે આપણે સર્વ વિકલ્પોનો અભ્યાસ કરી લઈશું ત્યારે કણસ્થૈતિકીનો અભ્યાસ પૂરો થયો ગણાશે.

જ્યારે પદાર્થ ઉપર બળો કાર્ય કરે છે છતાં પણ પદાર્થ સ્થિર રહે છે ત્યારે આપણે એમ કહી શકીએ કે **पदार्थ समतुलित छे** કે **पदार्थ समतुलतामां छे** અથવા તો **बळो पदार्थने समतुलित राखे छे.** એમ પણ કહી શકાય કે **बळो परस्पर समतुलित छे.** આ બધા પારિભાષિક વાકયખંડો, સ્થૈતિકીની પેલી સીધી સાદી હકીકત જ સૂચવે છે કે “બળો કાર્ય કરવા છતાં પણ પદાર્થો ગતિ પકડતા નથી.”

કણસ્થૈતિકીના પ્રધાન પ્રશ્નના વિકલ્પ વાર અભ્યાસની હવે આપણે શરૂઆત કરીએ.

૨. કણ પર કાર્ય કરતું એક બળ.

કણનું સ્થાન O છે. OA દિશામાં **P** બળ તેની ઉપર કાર્ય કરે છે. આ બળ કણને પોતાની દિશામાં ગતિમાન કરવા પ્રયત્ન કરશે. આ પ્રયત્નનો વિરોધ કરનાર કાંઈ જ નથી. તેથી બળ **P** કણને ગતિ આપવામાં સફળ થશે. કણ ઉપર જો એક જ બળ કાર્ય કરે તો તે હમેશાં કણને ગતિમાન કરશે. કણ ઉપર કાર્ય કરતું એક બળ સમતુલા સર્જી શકે નહિ. આ વિકલ્પનો અભ્યાસ સ્થૈતિકીના ક્ષેત્રમાં નહિ પરંતુ પ્રવૈગિકીનાં ક્ષેત્રમાં આવે છે.

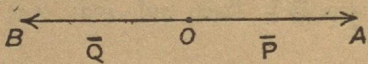


આકૃતિ ૬

બળ સદિશ છે એ તો આપણે જાણીએ છીએ. તેને મહત્ત્વ અને દિશા બન્ને હોય છે. બળનું ફક્ત મહત્ત્વ દર્શાવવા માટે આપણે સાદો (નીરેખ) P વાપરીશું અને જ્યારે જ્યારે બળનું મહત્ત્વ અને દિશા બન્ને દર્શાવવાં હશે ત્યારે રેખાંકિત $\overline{P}$ અથવા તો કાળો **P** વાપરીશું.

૩. કણુ પર કાર્ય કરતાં બે બળો.

O માં રહેલા કણ ઉપર બે બળો **P** અને **Q** કાર્ય કરે છે. બળ **P** પોતાની કાર્ય દિશા *OA*માં કણને ગતિ આપવાનો પ્રયત્ન કરશે. પરંતુ જો કણ સ્થિર રહેવાનું હોય તો બીજા બળ **Q**એ તે પ્રયત્નનો વિરોધ કરવો રહ્યો. બળ **Q**નું કાર્ય બળ **P**ની અસર નાબૂદ કરવાનું જ છે એટલે બળ **Q**ની દિશા *OB*, બળ **P**ની દિશા *OA* કરતાં ઊલટી હોવી જોઈએ, એટલું જ નહિ પણ બન્નેનું મહત્ત્વ તો સરખુંજ હોવું જોઈએ.



આકૃતિ ૭

આ રીતે જોતાં કહી શકાય કે જો બે બળો એક કણને સ્થિર રાખવાનાં હોય તો તે બળોની વ્યવસ્થા નીચે પ્રમાણે હોવી જરૂરી છે.

जो बे बळो एक कण पर कार्य करे छतां पण कण समतुलित रहे तो ते बन्ने बळो (१) सममहत्त्वनां होवां जोईए (२) विरुद्ध दिशानां होवां जोईए अने (३) एकज सुरेखामां कार्य करतां होवां जोईए।

સદિશ સંકેત વાપરીએ તો આ વ્યવસ્થા સમજવી બહુ સહેલી છે. કણ ગતિમાન થતું નથી. એટલે કે બન્ને બળોની કુલ અસર શૂન્ય છે.

$$\therefore \quad \mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0 \qquad \therefore \quad \mathbf{P} = -\mathbf{Q}.$$

$\therefore$ જો **P**ને **OA** વડે દર્શાવીએ તો **Q**ને **AO** વડે દર્શાવી શકાય.

$\therefore$ બન્ને બળોનાં મહત્ત્વ સરખાં છે ($= OA$ની લંબાઈ).

બન્નેની દિશા પરસ્પર વિરોધી છે (*OA* અને *AO*).

બન્ને એકજ સુરેખા *BOA*માં કાર્ય કરે છે.

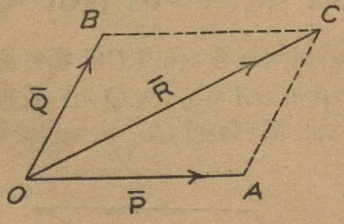
હવે જો બે બળો સમમહત્ત્વનાં, વિરુદ્ધ દિશાનાં કે એકજ સુરેખામાં કાર્ય કરતાં ન હોય તો તેમની અસર નીચે કણ સ્થિર રહેશે નહિ. તેવાં બળો કણને ગતિમાન્ કરશે. પરંતુ એક ત્રીજા બળનો ઉપયોગ કરીને આપણે કણને ગતિ કરતું રોકી શકીએ. આ ત્રીજું બળ પહેલાં બે બળોની અસરને સમતોલ કરે તેવું હોવું જરૂરી

છે. પણ આ રીતે તો આપણે કણ ઉપર કાર્ય કરતાં ત્રણ બળોના વિકલ્પના અભ્યાસ તરફ જઈ રહ્યા છીએ. તે વિકલ્પનું રીતસરનું અધ્યયન કરીએ તે પહેલાં સમતુલા ઉત્પન્ન ન કરી શકનાર બે બળોની અસર શોધવી જરૂરી બને છે. સદિશ સંકેતમાં કહીએ તો: જો $\mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0$ હોય તો કણ સમતુલિત રહે છે, અને આ પરિસ્થિતિનો આપણે પૂરો અભ્યાસ કરેલો છે. જો $\mathbf{P} + \mathbf{Q} \neq 0$ તો માનો કે $\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{R}$ છે. હવે આપણે આ સદિશ **R** શોધવાની તજવીજ કરીશું. આપણે **R** ને **P** અને **Q** નું પરિણામી બળ કહીશું. बे बलोनुं परिणामी बळ ए एक एवुं बल छे के जेनी असर बन्ने बळोनी सहियारी असर बराबर होय।

૪. કણ પર કાર્ય કરતાં બે બળોનું પરિણામી બળ.

સમાન્તર બાજુ ચતુષ્કોણનો નિયમ.

*O*માં રહેલા કણ ઉપર બે બળો **P** અને **Q** કાર્ય કરે છે. બળ સદિશ છે એટલે તેને એક સુરેખા વડે દર્શાવી શકાય. **આ.** (૮)માં સુરેખા *OA* બળ **P**



આકૃતિ ૮

દર્શાવે છે. એનો અર્થ એ થયો કે *OA*ની લંબાઈ *P* છે અને બળની દિશા *O*થી *A* તરફની છે. એજ રીતે સુરેખા *OB* બળ **Q** દર્શાવે છે. *OA* અને *OB* ઉપર સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણ *OACB* દોરો. તેનો વિકર્ણ *OC* દોરો. બળો માટેનો સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણનો નિયમ કહી જાય છે કે વિકર્ણ **OC** એ **P** અને **Q**ના પરિણામી બળ **R**ને દર્શાવે છે. આ નિયમ પ્રયોગસૂચિત છે. આપણે તેને સ્વયંસિદ્ધ સૂત્ર તરીકે સ્વીકારી લઈશું અને તેની સાબિતી આપવાનો પ્રયત્ન કરીશું નહિ.

જરાક વિચાર કરતાં તરત જ જણાઈ આવશે કે આ સ. બા. ચ. કોણનો નિયમ અને પહેલાં અપાઈ ગએલો આપણો સદિશ સરવાળાનો નિયમ બન્ને સરખા જ છે. **આ.** (૮)માં જોતાં જણાશે કે સ. બા ચ. કોણના નિયમાનુસાર

P અને **Q**નું પરિણામી **R** છે.

એટલે કે **OA** અને **OB**નું પરિણામી **OC** છે.

અથવા તો, સદિશ સંકેતમાં

$$\mathbf{OC} = \mathbf{OA} + \mathbf{OB}$$

પરંતુ $\quad OB = AC,\ OB \parallel AC$

$\therefore \quad \mathbf{OB} = \mathbf{AC}.$

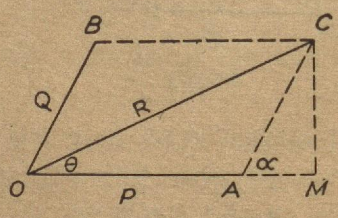
હવે સ. ક. (1) જણાવશે કે

$$\mathbf{OC} = \mathbf{OA} + \mathbf{AC}$$

જે સદિશ સરવાળાનો નિયમ છે.

૫. પરિણામીનાં મહત્ત્વ અને દિશા માટેનાં સૂત્રો.

P અને **Q** આપેલાં બળો છે અને તે Oમાં રહેલા કણ ઉપર કાર્ય કરે છે. બળ **P** દર્શાવવા માટે સુરેખા OA દોરો, બળ **Q** માટે સુરેખા OB દોરો. સ.બા. ચ. કો. $OACB$ પૂરો કરો. તેનો વિકર્ણ OC, એ આપેલાં બે બળોનું પરિણામી



આકૃતિ ૯

R થશે. આપણે તેનું મહત્ત્વ R શોધીશું અને તેની દિશા જાણવા માટે કોણ $\angle COA = \theta$ ની કિંમત ગણી કાઢીશું. **R, P** જોડે જે ખૂણો બનાવે છે તેજ θ. (**આ.** ૯ જુઓ).

બળ **P** અને **Q** વચ્ચેના ખૂણાને α કહો, એટલે કે $\angle BOA = \alpha$. $\triangle OAC$ માંથી જણાશે કે

$$OC^2 = OA^2 + AC^2 - 2OA.AC \cos OAC.$$

$$\therefore \quad R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ \cos (180^\circ - \alpha).$$

$$\therefore \quad R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha. \qquad (1)$$

સ. ક. (1) પરિણામી બળનું મહત્ત્વ આપે છે. તેની દિશા શોધવા માટે આપણે કોણ θ શોધીશું. તે માટે CM ને OA ઉપર લંબ દોરો. (જરૂર પડે તો OAને લંબાવવી.) પછી $\triangle COM$ માંથી પ્રાપ્ત થશે કે

$$\tan \theta = \frac{CM}{OM}.$$

$\tan \theta$ મેળવવા માટે આપણે CM અને OM ની કિંમત શોધીશું.

CMની ગણતરી

કાટકોણ $\triangle CAM$ માં

$$\sin \alpha = \frac{CM}{AC}$$

$$\therefore \quad CM = AC \sin \alpha$$

અર્થાત્ $$CM = Q \sin \alpha.$$

OMની ગણતરી

$$OM = OA + AM = P + AM.$$

ફરી એક વાર કાટકોણ $\triangle CAM$ નો ઉપયોગ કરીએ.

$$\cos \alpha = \frac{AM}{AC}.$$

$$\therefore \quad AM = AC \cos \alpha = Q \cos \alpha$$

તેથી $$OM = P + Q \cos \alpha.$$

હવે $\tan \theta$ શોધવા માટેની આપણી તૈયારી સંપૂર્ણ થઈ ગઈ છે.

$$\tan\ \theta = \frac{CM}{OM} = \frac{Q\ \sin\ \alpha}{P + Q\ \cos\ \alpha} \qquad (2)$$

આ રીતે પરિણામી બળનાં મહત્ત્વ અને દિશા શોધવા માટેનાં નીચેનાં બે સૂત્રો આપણને પ્રાપ્ત થયાં.

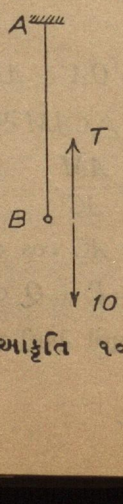
$$\boxed{R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\ \cos\ \alpha} \qquad (1)$$

$$\boxed{\tan\ \theta = \frac{Q\ \sin\ \alpha}{P + Q\ \cos\ \alpha}} \qquad (2)$$

જેમ આપણે **R**ને **P** અને **Q**નું પરિણામી બળ કહીએ છીએ તેમ **P** અને **Q**ને **R**નાં સંઘટક બળો કહી શકીએ. ઉપરનાં સૂત્રોનો ઉપયોગ દર્શાવતાં કેટલાંક ઉદાહરણો હવે આપણે લઈશું.

૬. ઉદાહરણો.

(૧) દોરીનો તણાવ : *10 ગ્રામ વજનની લોખંડની એક નાની ગોળી દોરીને એક છેડે બાંધેલી છે. દોરી તેના બીજા છેડાથી નીચે લટકે છે. દોરી ઉપર શું ખેંચાણ થાય છે તે શોધી કાઢો.*



આકૃતિ ૧૦

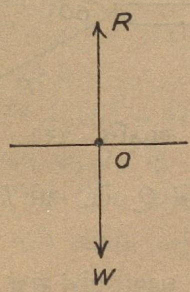
A સ્થિર બિન્દુ છે, અને AB દોરી છે. ગોળી Bની જગ્યાએ બાંધેલી છે. હવે પ્રત્યેક પદાર્થને પૃથ્વી પોતાની તરફ આકર્ષે છે. અને આ આકર્ષણબળને તે પદાર્થનું વજન કહેવામાં આવે છે. આ દડીનું વજન ૧૦ ગ્રામ છે. તેથી ૧૦ ગ્રા. વજનનું એક બળ દડી ઉપર નીચે તરફની લંબક દિશામાં કાર્ય કરે છે. જો આ એકજ બળ કાર્યકારી હોત તો તો દડી નીચે તરફની દિશામાં ગતિ કરત. પરંતુ તેમ થતું નથી કારણ કે દડી દોરી વડે બાંધેલી છે. દોરી દડીને નીચે પડતાં રોકે છે. એટલે કે દોરી દડીને ઉપર તરફ ખેંચી રાખતી હોવી જોઈએ. દોરી દડી ઉપર જે બળ અજમાવે છે તેને T કહો. હવે દડી સમતુલિત છે, એટલે તેની ઉપર કાર્ય કરતાં બળો સમ-મહત્ત્વનાં, વિરુદ્ધ દિશાનાં અને એકજ સુરેખામાં કાર્ય કરતાં હોવાં જોઈએ. તેથી

$$T = 10.$$

$\therefore$ દોરીમાં 10 ગ્રામ વજનનાં મહત્ત્વવાળું ઉપર તરફનું ખેંચાણ છે.

દોરી વડે આપણે કોઈ પદાર્થને ખેંચી શકીએ. દોરી મારફતે પદાર્થ ઉપર જે ખેંચાણ કાર્ય કરે છે તેને દોરીનો તણાવ કહે છે.

(૨) લીસાં ફલકની પ્રતિક્રિયા: *W વજનનું એક કણ લીસા ક્ષૈતિજ ટેબલ ઉપર પડેલું છે. કણ ઉપરનાં બળોની ચર્ચા કરો.*



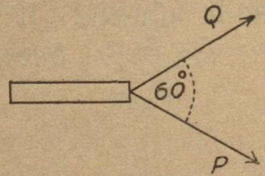
આકૃતિ ૧૧

કણનું ટેબલ પરનું સ્થાન O છે. કણ પર નીચેની લંબક દિશામાં કાર્ય કરતું તેનું વજન W એ એક બળ છે. જો આ એક જ બળ કણ ઉપર કાર્ય કરતું હોત તો તો કણ તે બળની દિશામાં ગતિ કરવા લાગત. પરંતુ તેમ થતું નથી કારણ કે ટેબલ તેને નીચે પડતું રોકે છે. એટલે કે ટેબલ કણને ઉપર તરફ ધકેલતું હોવું જોઈએ, કે જેથી

Wના કણને નીચે તરફ ખેંચવાના પ્રયત્નને તે નાબૂદ કરી શકે. ટેબલ તરફથી કણને લાગતા આ ઉપર તરફના ધક્કાને ટેબલની પ્રતિક્રિયા કહેવામાં આવે છે. કણ ટેબલને નીચેની તરફ દબાવે છે અને તેની પ્રતિક્રિયા રૂપે ટેબલ કણ પર ઉપર તરફનું બળ અજમાવે છે. કણની સમતુલા માટે આ પ્રતિક્રિયા ઉપર તરફની લંબક દિશામાં હોવી જોઈએ અને તેનું મહત્ત્વ $R = W$ હોવું જોઈએ.

લીસી સપાટી પર રહેલા કણ ઉપર તે સપાટી તરફથી જે બળ અજમાવવામાં આવે તેને સપાટીની પ્રતિક્રિયા કહે છે અને તેની કાર્યદિશા સપાટીને લંબ હોય છે.

(૩) એક લોઢાના ટુકડાને બે દોરડાં વડે ખેંચવામાં આવે છે. દોરડાં વચ્ચે 60° નો ખૂણો પડે છે અને તેમાં 30 પા. અને 20 પા. વજનનું ખેંચાણ છે. તો ટુકડા પરના પરિણામી ખેંચાણનું મહત્ત્વ અને દિશા માલૂમ કરો.



આકૃતિ ૧૨

દોરડાંના તણાવને P અને Q કહો. ત્યારે $P = 30$, $Q = 20$ અને $\alpha = 60°$ છે.

$\therefore$ પરિણામી બળ R કાઢવા માટેનું સૂત્ર જણાવશે કે

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha$$

$$= (20)^2 + (30)^2 + 2 \times 20 \times 30 \times \cos 60°$$

$$= 1900 \qquad \therefore \quad R = 10\sqrt{19}.$$

જો R, P જોડે θ કોણ બનાવે તો

$$\tan\ \theta = \frac{Q \sin\ \alpha}{P + Q \cos \alpha} = \frac{20\ .\ \frac{\sqrt{3}}{2}}{30 + 20 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

ટુકડા ઉપરનું કુલ પરિણામી બળ $10\sqrt{19}$ પા.વ.નું છે અને તે P જોડે $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ નો કોણ બનાવતી દિશામાં કાર્ય કરે છે.

(૪) એક કણ પર કાર્ય કરતાં બે બળો P અને Qનું પરિણામી બળ R છે. જો Qની દિશા બદલાવ્યા સિવાય તેનું મહત્ત્વ બેવડું કરવામાં આવે તો માલૂમ પડે છે કે પરિણામી બળનું મહત્ત્વ $2R$ થઈ જાય છે. જો Qનું મહત્ત્વ ન બદલાતાં ફક્ત તેની દિશા ઊલટાવવામાં આવે તો પણ પરિણામીનું મહત્ત્વ $2R$ થાય છે. સિદ્ધ કરો કે

$$P : Q : R :: \sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{2}.$$

માનો કે P અને Q એકબીજી જોડે α કોણ બનાવતી દિશાઓમાં કાર્ય કરે છે. R તેનું પરિણામી બળ છે.

$$\therefore\quad R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos\ \alpha. \qquad (1)$$

P અને $2Q$નું પરિણામી બળ $2R$ છે.

$$\therefore\quad 4R^2 = P^2 + 4Q^2 + 4PQ \cos\ \alpha. \qquad (2)$$

P અને $-Q$ નું પરિણામી બળ પણ $2R$ છે.

$$\therefore\quad 4R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ \cos\ \alpha. \qquad (3)$$

સ. ક. (1), (2) અને (3) વચ્ચે આપણે α નું નિરસન કરીશું.

સ. ક. (1) અને (3) માંથી પ્રાપ્ત થશે કે

$$5R^2 = 2P^2 + 2Q^2. \qquad (4)$$

સ. ક. (1) અને (2) માંથી પ્રાપ્ત થશે કે

$$2R^2 = -P^2 + 2Q^2. \qquad (5)$$

સ. ક. (4) અને (5) ઉપરથી જણાશે કે $3R^2 = 3P^2$ અથવા તો

$$R = P.$$

અને હવે સ. ક. (4) બતાવે છે કે

$$3P^2 = 2Q^2$$

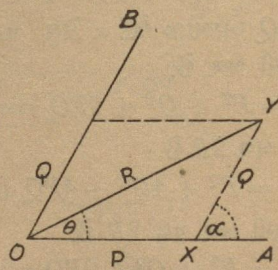
$\therefore$ $$P:Q = \sqrt{2}:\sqrt{3}.$$

પરંતુ $$P:R = 1:1$$
$$= \sqrt{2}:\sqrt{2}$$

$\therefore$ $$P:Q:R = \sqrt{2}:\sqrt{3}:\sqrt{2}.$$

(૫) P અને Q બળોની કાર્યદિશા OA અને OB છે. અને તેમની વચ્ચેનો કોણ α છે. તેઓનું પરિણામી બળ R, OA જોડે θ કોણ બનાવે છે. હવે P અને Q' બળો એ જ સુરેખા OA અને OB માં કાર્ય કરતાં પરિણામી બળ R' ધરાવે કે જે OA જોડે θ' ખૂણો બનાવે તો સિદ્ધ કરો કે

$$R' \sin (\alpha - \theta') = R \sin (\alpha - \theta).$$



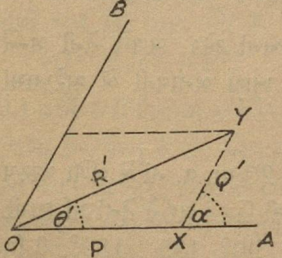
આકૃતિ ૧૩

પહેલો ભાગ : P અને Q નું પરિણામી બળ R છે. **આ.** (૧૩)માં બળોનું સ. બા. ચ. કોણ દોરેલું છે. $\triangle OXY$ ઉપરથી માલૂમ પડશે કે

$$\frac{R}{\sin \alpha} = \frac{P}{\sin (\alpha - \theta)} = \frac{Q}{\sin \theta} \qquad (1)$$

બીજો ભાગ : P અને Q' નું પરિણામી બળ R' છે. **આ.** (૧૪) માં આ બળોનું સ. બા. ચ. કોણ દોરેલું છે. $\triangle OXY'$ ઉપરથી માલૂમ પડશે કે

$$\frac{R'}{\sin\ \alpha} = \frac{P}{\sin\ (\alpha - \theta')} = \frac{Q'}{\sin \theta'} \qquad (2)$$



આકૃતિ ૧૪

સ. ક. (1) બતાવે છે કે $\quad R\ \sin\ (\alpha - \theta) = P \sin\ \alpha.$

સ. ક. (2) બતાવે છે કે $\quad R'\ \sin\ (\alpha - \theta') = P\ \sin\ \alpha.$

અને છેવટે ફલિત થાય છે કે

$$R\ \sin\ (\alpha - \theta) = R'\ \sin\ (\alpha - \theta').$$

મનોયત્ન I.

(૧) પરસ્પર α નો ખૂણો બનાવતાં બે બળો P અને Q નું પરિણામી બળ R છે અને તે P જોડે θ કોણ બનાવે છે. નીચેના કિસ્સાઓમાં R અને θ શોધો.

(i) $P = 3, \quad Q = 4, \quad \alpha = 90°.$

(i) $P = 6, \quad Q = 6, \quad \alpha = 120°.$

(iii) $P = 5, \quad Q = 2, \quad \alpha = 180°.$

(૨) પરસ્પર $45°$ નો ખૂણો બનાવતાં બે બળોનું પરિણામી બળ 12 પા. વ. (પાઉન્ડ વજન) છે. જો તેમાંનું એક બળ 7 પા. વ.નું હોય તો બીજા બળનું મહત્ત્વ શોધી કાઢો.

(૩) 3 અને 4 પા. વ.નાં બળો પરસ્પર $60°$ નો કોણ બનાવતી કાર્ય દિશાઓમાં કાર્ય કરે છે. તેઓનું પરિણામી બળ શોધો.

(૪) બે બળો (જેમાંનું એક 4 પા. વ.નું છે)નું પરિણામી બળ 7 પા. વ. છે અને તેની કાર્યદિશા 4 પા. વ.નાં બળ જોડે 90° નો કોણ બનાવે છે, તો બીજાં બળનું મહત્ત્વ અને કાર્યદિશા શોધી કાઢો.

(૫) 100 ગ્રામ વજનનાં એક બળને તેની બન્ને બાજુએ અનુક્રમે 30° અને 60° ના ખૂણા બનાવતી બે સુરેખામાં કાર્ય કરતાં સંઘટકોમાં વિભાજીત કરો.

(૬) 10 પા. વ. અને 20 પા. વ. નાં બે બળો પરસ્પર θ ને ખૂણે કાર્ય કરે છે. θની નીચે આપેલી કિંમત લઈને તેનાં પરિણામી બળનું મહત્ત્વ R મેળવો. $\theta = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ$. θ વિરુદ્ધ Rનો આલેખ દોરો. જ્યારે R 20 પા. વ. હોય ત્યારે θની શી કિંમત હશે તે આલેખમાંથી શોધો.

(૭) સિદ્ધ કરો કે બે સમમહત્ત્વ બળોનું પરિણામી બળ તેમની વચ્ચેના ખૂણાને દુભાગે છે.

(૮) 10 પા. વ. નું એક લંબક બળ બે સમમહત્ત્વ સંઘટકોમાં વિભાજીત કરવામાં આવે છે. જેમાંનો એક સંઘટક લંબક જોડે 30° નો ખૂણો બનાવે છે, તો બીજા સંઘટકનું મહત્ત્વ અને દિશા શોધો.

(૯) ચોક્કસ બિન્દુ ઉપર નિશ્ચિત દિશામાં એક આપેલું બળ કાર્ય કરે છે. અને તે બે સમમહત્ત્વ બળોનું પરિણામી બળ છે. તો સિદ્ધ કરો કે તે બે સમમહત્ત્વ બળોને દર્શાવતી સુરેખાઓના છેડા હમેશાં એક નિશ્ચિત રેખા ઉપર જ પડશે.

(૧૦) એક બળ kP ને બે સમમહત્ત્વ સંઘટકોમાં વિભાજીત કરવામાં આવે છે. પ્રત્યેક સંઘટક lP છે. સિદ્ધ કરો કે તે બે સમમહત્ત્વ સંઘટકો વચ્ચેનો ખૂણો $2\cos^{-1}(k/2l)$ છે.

(૧૧) બે બળો એવાં છે કે જો તેઓ પરસ્પર કાટખૂણે કાર્ય કરે તો તેમનું પરિણામી બળ $\sqrt{14}$ પા. વ. થાય અને જો તેઓ એકબીજાં જોડે 120° નો ખૂણો બનાવે તો તેમના પરિણામીનું મહત્ત્વ $\sqrt{13}$ પા. વ. થાય, તો તે બે બળોનાં મહત્ત્વ શોધી કાઢો.

(૧૨) OC દિશામાં કાર્ય કરતું એક બળ R, OA દિશાનાં બળ Q અને OB દિશાનાં સમમહત્ત્વનાં બીજાં બળ Q નું પરિણામી બળ છે. OCમાં કાર્ય કરતું એજ બળ R, OAમાં કાર્ય કરતાં બળ $2Q$ અને બીજાં કોઈ બળ Pનું પણ પરિણામી બળ છે. સિદ્ધ કરો કે

$$4Q^2 = R^2 + P^2.$$

(૧૩) એક કણ ઉપર OA અને OB દિશામાં કાર્ય કરતાં બે બળો P અને Q નું પરિણામી બળ OCમાં કાર્ય કરતું R છે. એવું માલૂમ પડે છે કે જો Q ની દિશા ઊલટાવવામાં આવે તો નવું પરિણામી OCને કાટખૂણે કાર્ય કરે છે. અને તેનું મહત્ત્વ $R/\sqrt{3}$ થઈ જાય છે. દર્શાવો કે

$$\angle AOC = \angle BOC = \pi/6.$$

(૧૪) OA અને OBની દિશામાં કાર્ય કરતાં બે બળો P અને Q નું પરિણામી બળ OAને કાટખૂણે કાર્ય કરે છે. એજ OA અને OBની દિશામાં કાર્ય કરતાં બે બળો P' અને Q'નું પરિણામી બળ OBને કાટખૂણે કાર્ય કરે છે. સિદ્ધ કરો કે

$$P : Q : : Q' : P'.$$

(૧૫) AB અને AC અનુક્રમે 66 પા. વ. અને 50 પા. વ.નાં બે બળો દર્શાવે છે. જો CD AB ને લંબ દોરવામાં આવે તો AD, એજ સ્કેલ ઉપર, 30 પા. વ.નું બળ દર્શાવશે. સિદ્ધ કરો કે AB અને AC વડે દર્શાવાયેલાં બળોના પરિણામી બળનું મહત્ત્વ 104 પા. વ. થાય છે.

(૧૬) ABC ત્રિકોણની AB તથા BC બાજુઓમાં તે તે બાજુના વ્યસ્ત પ્રમાણનાં મહત્ત્વવાળાં બે બળો કાર્ય કરે છે. સાબિત કરો કે તેમનું પરિણામી બળ ત્રિકોણના પરિવર્તુલને B ઉપર દોરેલી સ્પર્શરેખાની દિશામાં કાર્ય કરશે.

(૧૭) બે બળો P તથા Q જ્યારે θ ખૂણે કાર્ય કરે છે ત્યારે તેમનાં પરિણામીનું મહત્ત્વ $(2m+1)\ (P^2+Q^2)^{\frac{1}{2}}$ થાય છે પરંતુ જ્યારે $90^\circ - \theta$ ખૂણે કાર્ય કરે છે ત્યારે આ મહત્ત્વ $(2m-1)\ (P^2+Q^{2^{\frac{1}{2}}}$ થાય છે. સાબિત કરો કે

$$\tan\theta = \frac{m-1}{m+1}.$$

(૧૮) એક કણ પર P તથા Q બળો θ ખૂણે કાર્ય કરે છે. જો P Qની જગ્યાએ અને Q Pની જગ્યાએ કાર્ય કરે તો સાબિત કરો કે પરિણામીની દિશા α ખૂણો ફરી જશે જ્યાં

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{P-Q}{P+Q}\tan\frac{\theta}{2}.$$

(૧૯) $ABCD$ એક સમાન્તર બાજુ ચતુષ્કોણ છે જેના વિકર્ણો એકબીજાને Pમાં મળે છે. જો સદિશ $\overline{AB} = \overline{a}$ તથા $\overline{AD} = \overline{b}$ હોય તો સાબિત કરો કે

$$\overline{AP} = \frac{\overline{a}+\overline{b}}{2},\ \overline{BP} = \frac{\overline{b}-\overline{a}}{2}.$$

જવાબો :

(૧) $R=5,\ \theta=\tan^{-1}\frac{4}{3},\ R=6,\ \theta=60°,\ R=3,\ \theta=0.$ (૨) $(\sqrt{239}-7)/\sqrt{2}$ પા. વ. (૩) $\sqrt{19}$ પા. વ., મોટાં બળ જોડે $\tan^{-1}(\sqrt{3}/4)$ ને ખૂણે. (૪) $\sqrt{65}$ પા. વ.; 4પા. વ. ના બળ જોડે $[\pi-\tan^{-1}(7/4)]$ ના ખૂણે. (૫) $50\sqrt{3}$ અને 50 ગ્રા. વ. (૬) $\cos\theta=-1/4;\ \theta=104°,\ 30'$. (૮) $10/\sqrt{3}$ પા. વ.; લંબકની બન્ને બાજુએ 30° ના ખૂણે. (૧૧) $(2+\sqrt{3})$ અને $(2-\sqrt{3})$ પા. વ.

ભાગ ૨

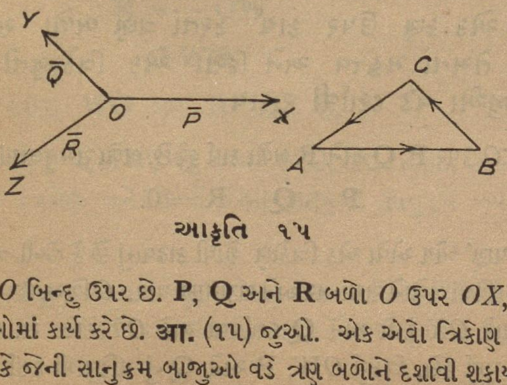
કણ પર કાર્ય કરતાં ત્રણ બળો

૭. પ્રાસ્તાવિક.

કણ પર કાર્ય કરતાં બે બળોનું પરિણામી બળ કેમ શોધવું તે આપણે જોયું. હવે આપણે આ પરિણામી બળને સમતુલિત કરે તેવું ત્રીજું બળ દાખલ કરીએ તો તે ત્રણ બળોની અસર નીચે કણ સ્થિર રહેશે. હવે પછીનાં પ્રમેયમાં આપણે આ જ તરકીબ અજમાવીશું. અને ત્રણ બળોની અસર નીચે સ્થિર રહેતાં કણની પરિસ્થિતિ તપાસીશું. કણ પર કાર્ય કરવા છતાં કણને સ્થિર રાખતાં ત્રણ બળોની વ્યવસ્થા, બળત્રિકોણનાં પ્રમેયમાં ચર્ચવામાં આવી છે. આપણે હવે તે પ્રમેય તરફ વળીશું.

૮. બળત્રિકોણનું પ્રમેય.

કણ પર કાર્ય કરતાં ત્રણ બળોનાં મહત્ત્વ અને દિશાઓને કોઈ એક ત્રિકોણની સાનુક્રમ ત્રણ બાજુઓ વડે દર્શાવી શકાય, તો તે ત્રણ બળો સમતુલિત થાય.



આકૃતિ ૧૫

કણ O બિન્દુ ઉપર છે. **P, Q** અને **R** બળો O ઉપર OX, OY અને OZ દિશાઓમાં કાર્ય કરે છે. **આ.** (૧૫) જુઓ. એક એવો ત્રિકોણ ABC પણ આપેલો છે કે જેની સાનુક્રમ બાજુઓ વડે ત્રણ બળોને દર્શાવી શકાય. એટલે કે

AB બળ **P** દર્શાવે છે.

BC ,, **Q** ,, ,,

CA ,, **R** ,, ,,

આપણે એ સિદ્ધ કરવું છે કે આ ત્રણ બળોની અસર નીચે કણ ગતિ કરતું નથી અથવા તો બળોની કુલ અસર શૂન્ય છે એટલે કે આપણે સિદ્ધ કરીશું કે

$$\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{R} = 0.$$

પ્રમેયના પક્ષમાં આપેલું છે કે

$$\mathbf{P} = \mathbf{AB},\ \mathbf{Q} = \mathbf{BC},\ \mathbf{R} = \mathbf{CA}.$$

$$\therefore \quad \mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{AB} + \mathbf{BC}$$

$$= \mathbf{AC}. \quad \text{(સદિશ સરવાળાના નિયમાનુસાર)}$$

$$\therefore \quad \mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{R} = \mathbf{AC} + \mathbf{R}$$

$$= \mathbf{AC} + \mathbf{CA}$$

$$= 0.$$

$\therefore$ બળો **P**, **Q** અને **R** સમતુલામાં છે.

૯. બળત્રિકોણના પ્રમેયનું પ્રતીપ.

જો એક કણ ઉપર કાર્ય કરતાં ત્રણ બળો સમતુલામાં હોય તો તેમનાં મહત્ત્વ અને દિશા એક ત્રિકોણની સાનુક્રમ ત્રણ બાજુઓ વડે દર્શાવી શકાય.

કણ *O* ઉપર **P**, **Q** અને **R** બળો કાર્ય કરે છે. બળો સમતુલામાં છે, એટલે કે

$$\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{R} = 0.$$

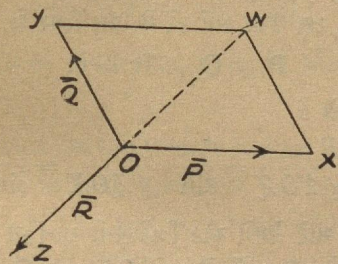
આપણું ધ્યેય એવો એક ત્રિકોણ શોધી કાઢવાનું છે કે જેની ત્રણ બાજુઓ સાનુક્રમે આપેલાં બળોને સમાન્તર અને સપ્રમાણ થાય. *O* બિન્દુ ઉપરનાં **P** બળને દર્શાવવા માટે *OX* દોરો અને **Q** દર્શાવવા માટે *OY* દોરો. સ. બા. ચ. કોણ *OXWY* પૂર્ણ કરો. વિકર્ણ *OW*, **P** અને **Q**નું પરિણામી દર્શાવશે. કારણ કે

$$P = OX,$$

$$Q = OY = XW$$

$$\therefore \quad P + Q = OX + XW$$

$$= OW.$$



આકૃતિ ૧૬

કિન્તુ આપણા પક્ષમાં આપેલું છે કે

$$\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{R} = 0$$

$$\therefore \quad \mathbf{OW} + \mathbf{R} = 0$$

$$\therefore \quad \mathbf{R} = -\mathbf{OW}$$

$$= \mathbf{WO}$$

∴ સદિશ **WO** બળ **R** દર્શાવે છે.

એટલે કે OX, **P** ને, XW, **Q** ને અને WO, **R** ને દર્શાવે છે. તેથી OXW એક એવો ત્રિકોણ બને છે કે જેની બાજુઓ સાનુક્રમે આપેલાં બળોને દર્શાવે છે.

આ પ્રમેયમાં આવતી ત્રણ બળોની વ્યવસ્થા ત્રિકોણમિતિની પરિભાષામાં પણ વ્યકત કરી શકાય; આમ કરવાથી આપણને લામીનું પ્રમેય મળશે. આપણે હવે તે પ્રમેય લઈશું.

૧૦. લામીનું પ્રમેય.

એક કણ પર કાર્ય કરતાં ત્રણ બળો જો કણને સમતુલામાં રાખે, તો પ્રત્યેક બળનું મહત્ત્વ બાકીનાં બે બળો વચ્ચેના કોણની જ્યા (sine) ના પ્રમાણમાં થાય.

આ. (૧૬) જુઓ. કણ O ઉપર છે. **P**, **Q** અને **R** બળો OX, OY અને OZ ની દિશામાં કણ ઉપર કાર્ય કરે છે. કણ સ્થિર છે. એટલે કે

$$\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{R} = 0.$$

આપણે સિદ્ધ કરવું છે કે

$$\frac{P}{\sin\ \angle YOZ} = \frac{Q}{\sin\ \angle ZOX} = \frac{R}{\sin\ \angle XOY}.$$

બળો સમતુલામાં છે, માટે તેમને એક ત્રિકોણની સાનુક્રમ બાજુઓ વડે દર્શાવી શકાય. ધારો કે OX બળ **P** દર્શાવે છે અને OY, બળ **Q** દર્શાવે છે. સ. બા. ચ. કોણ $OXWY$ પૂરું કરો. તેમાંનો $\triangle OXW$ એ બળત્રિકોણ થશે.

$$\therefore\quad \mathbf{OX} = \mathbf{P},\ \mathbf{XW} = \mathbf{Q},\ \mathbf{WO} = \mathbf{R}.$$

પરંતુ આ પ્રમેયમાં આપણે બળોનાં મહત્ત્વ તથા દિશાને જુદાં જુદાં લઈએ છીએ. માટે જ્યાં સુધી મહત્ત્વ સાથે સંબંધ છે ત્યાં સુધી તો

$$OX = P,\ XW = Q,\ WO = R.$$

$\triangle OXW$ માંથી માલૂમ પડશે કે

$$\frac{OX}{\sin \angle OWX} = \frac{XW}{\sin \angle XOW} = \frac{WO}{\sin \angle WXO}.$$

$$\therefore\quad \frac{P}{\sin\ \angle OWX} = \frac{Q}{\sin\ \angle XOW} = \frac{R}{\sin\ \angle WXO}. \qquad (1)$$

પરંતુ $\sin\ \angle OWX = \sin\ \angle YOW = \sin\ (180^\circ - \angle YOZ)$
$= \sin\ \angle YOZ$

$$\sin\ \angle XOW = \sin\ (180^\circ - \angle ZOX) = \sin\ \angle ZOX$$

$$\sin\ \angle WXO = \sin\ (180^\circ - \angle XOY) = \sin\ \angle XOY$$

∴ સ. ક. (1)માંથી પ્રાપ્ત થશે કે

$$\frac{P}{\sin\angle YOZ}=\frac{Q}{\sin\angle ZOX}=\frac{R}{\sin\angle XOY}.$$

કોઈકવાર આપણે આ સ. ક. ને નીચે પ્રમાણે પણ લખીએ છીએ.

$$\frac{P}{\sin(\widehat{Q,R})}=\frac{Q}{\sin(\widehat{R,P})}=\frac{R}{\sin(\widehat{P,Q})}$$

ઉપર વપરાયેલા સંકેતો તો સમજાય તેવા છે $(\widehat{QR})$ એટલે બળો Q અને R વચ્ચેનો કોણ.

અહિં સિદ્ધ કરેલાં પ્રમેયોનો ઉપયોગ દર્શાવતાં કેટલાંક ઉદાહરણો હવે આપણે લઈશું. આ ઉદાહરણોમાં પદાર્થો ઉપર બળ અજમાવવાની જે જુદી જુદી રીતો છે—જેવી કે ખેંચવું, દાબવું, ધકકો મારવો વગેરે— તેનો પરિચય થશે. ખેંચવાની, દાબવાની કે ધકકો મારવાની ક્રિયા પરથી આપણને તેના આનુષંગિક બળની દિશાનું કાંઈક સૂચન મળી રહેશે. અને જો પરિણામે કણ ગતિ પકડતું ન હોય તો અજમાવાયેલા બળનું મહત્ત્વ બળત્રિકોણના પ્રમેયની મદદથી કે લામીના પ્રમેયની મદદથી જાણી શકાશે. અને આ રીતે કણ ઉપર કાર્ય કરતાં બળોની સંપૂર્ણ માહિતી મેળવી શકાશે. આ યોજના વ્યવહારમાં કેવી કામ આવે છે તે આપણે નીચેનાં ઉદાહરણો પરથી જોઈશું.

૧૧. ઉદાહરણો.

(૧) ક્ષિતિજ સાથે α નો કોણ બનાવતા એક લીસા ઢાળ ઉપર W વજનનું એક કણ રહેલું છે. મહત્તમ ઢોળાવની દિશા જોડે θ નો કોણ બનાવતું P બળ કણને ઢાળ ઉપર ટેકવી રાખે છે. θ આપેલો હોય તો P નું મહત્ત્વ અને ઢાળની પ્રતિક્રિયા શોધી કાઢો.

AB મહત્તમ ઢોળાવની દિશા છે. કણ ઢાળ ઉપર O બિન્દુએ છે. કણ ઉપર નીચેનાં બળો કાર્ય કરે છે.

(૧) તેનું વજન W, નીચે તરફની લંબક દિશામાં.

(૨) ઢાળની પ્રતિક્રિયા R, જેની દિશા ઢાળને લંબ સુરેખામાં છે.

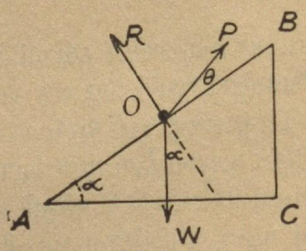
(૩) બહારનું બળ P, જે AB જોડે θ નો કોણ બનાવે છે.

આ ત્રણ બળોની સમતુલા માટે આપણે લામીનું પ્રમેય વાપરીશું. તે માટે આપણે જુદાં જુદાં બળો વચ્ચેના કોણની કિંમત લખી કાઢીએ.

R અને W વચ્ચેનો કોણ $90^\circ + 90^\circ - \alpha = 180^\circ - \alpha$ છે.

W અને P ,, ,, $\theta + 90^\circ + \alpha = 90^\circ + \theta + \alpha$ છે.

P અને R ,, ,, $90^\circ - \theta$ છે.



આકૃતિ ૧૭

હવે લામીનું પ્રમેય બતાવશે કે

$$\frac{W}{\sin\,(90^\circ - \theta)} = \frac{P}{\sin\,(180^\circ - \alpha)} = \frac{R}{\sin\,(90^\circ + \theta + \alpha)}$$

$$\therefore \quad \frac{W}{\cos\,\theta} = \frac{P}{\sin\,\alpha} = \frac{R}{\cos\,(\theta + \alpha)}$$

$$\therefore \quad P = \frac{W \sin\,\alpha}{\cos\,\theta} \text{ અને } R = \frac{W \cos\,(\theta + \alpha)}{\cos\,\theta}.$$

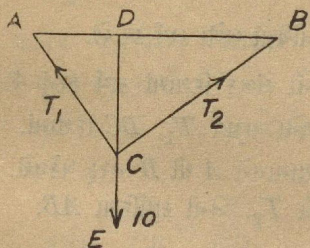
(૨) 3 અને 4 ફૂટ લાંબી બે દોરી એક છેડે એકમેકને બાંધેલી છે. અને ત્યાંથી 10 પા. નું વજન લટકે છે. બન્ને દોરીના બીજા છેડા એક જ ક્ષૈતિજમાં 5 ફૂટને અંતરે આવેલાં બે બિન્દુએ જોડેલા છે. તો પ્રત્યેક દોરીનો તણાવ શોધો.

કણનું સ્થાન C છે. AC અને BC દોરીઓ છે તે બે સ્થિર બિન્દુ A અને B માં બાંધેલી છે. AB ક્ષૈતિજ છે. $AB=5'$, $AC=3'$ અને $BC=4'$. કણ ઉપર નીચેનાં ત્રણ બળો કાર્ય કરે છે.

(૧) નીચે તરફની લંબક દિશામાં 10 પા. નું વજન.

(૨) CA દોરીનો તણાવ T_1, CA દિશામાં.

(૩) CB દોરીનો તણાવ T_2, CB દિશામાં.



આકૃતિ ૧૮

કણની સમતુલા માટે લામીના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીએ.

$$\therefore \quad \frac{10}{\sin \angle ACB} = \frac{T_1}{\sin \angle BCE} = \frac{T_2}{\sin \angle ACE}$$

$$\therefore \quad \frac{10}{\sin \angle C} = \frac{T_1}{\sin \angle BCD} = \frac{T_2}{\sin \angle ACD}$$

$$\therefore \quad \frac{10}{\sin \angle C} = \frac{T_1}{\cos \angle B} = \frac{T_2}{\cos \angle A} \qquad (1)$$

A, B અને C ખૂણાના ગુણોત્તરો $\triangle ABC$ માંથી મેળવી શકાશે. અહિં તો એ બહુ સહેલું છે કારણ કે આપણા $\triangle ABC$ માં

$AB^2 = AC^2 + CB^2$. તેથી $\triangle ABC$ કાટકોણ $\triangle$ છે.

$\therefore \quad C = 90^\circ, \quad \cos A = \frac{3}{5}, \quad \cos B = \frac{4}{5}$.

સ. ક. (1) માંથી હવે જણાશે કે

$T_1 = 10 \times \frac{4}{5} = 8$ પા. વ, અને $T_2 = 10 \times \frac{3}{5} = 6$ પા. વ.

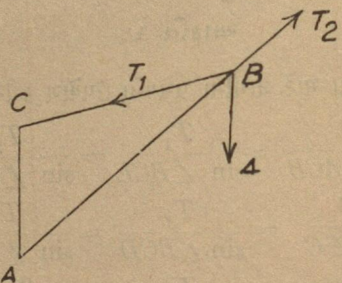
(૩) એક સાદો ઊંટડો નીચેની રીતે બનાવવામાં આવ્યો છે. 12 ફૂ. લાંબા એક દંડ AB ને 6 ફૂ. લાંબી સાંકળ BC વડે ટેકવવામાં આવેલો છે. સાંકળનો C છેડો A ની ઉપર લંબક દિશામાં 8 ફૂ. ઊંચે બાંધેલો છે. જો 4 ટન વજનનો સામાન B ઉપરથી લટકાવવામાં આવે તો સાંકળનો તણાવ અને દંડનો ધક્કો શોધો.

B બિન્દુ ઉપર નીચેનાં બળો કાર્ય કરે છે.

(૧) નીચે તરફની લંબક દિશામાં કાર્ય કરતું 4 ટનનું વજન.

(૨) BC સાંકળનો તણાવ T_1, BC દિશામાં.

(૩) દંડ AB સામાનને A થી B તરફ ધકેલશે. દંડ વડે અજમાવાતું આ બળ તે દંડનો ધક્કો T_2. તેની કાર્યદિશા AB.



આકૃતિ ૧૯

આ. (૧૯) માં ABC ત્રિકોણ એવો છે કે તેની બાજુઓ ઉપરનાં બળોને સમાન્તર છે. એટલે સમતુલા માટે આપણે બળત્રિકોણના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી શકીશું. $\triangle ABC$ માં

CA	બળ	4	ને	સમાંતર છે.
AB	,,	T_2	,,	,,
BC	,,	T_1	,,	,,

તેથી આ બાજુઓ તે તે બળોને સપ્રમાણ પણ હોવી જોઈએ.

$$\therefore \quad \frac{4}{CA} = \frac{T_2}{AB} = \frac{T_1}{BC}$$

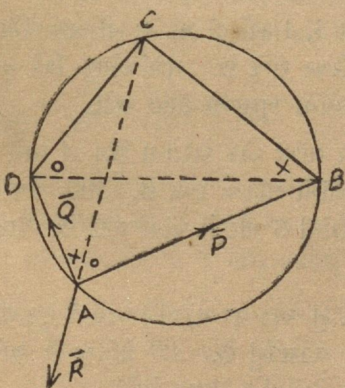
$$\therefore \quad \frac{4}{8} = \frac{T_2}{12} = \frac{T_1}{6}$$

$$\therefore \quad T_1 = 3 \text{ ટન વજન}$$

$$T_2 = 6 \text{ ટન વજન.}$$

(૪) એક ચક્રીય ચતુષ્કોણ $ABCD$ ની AB અને AD બાજુમાં બે બળો P અને Q કાર્ય કરે છે. વિકર્ણ CA માં C થી A તરફની દિશામાં કાર્ય કરતું બળ R તેમને સમતુલિત કરે છે. સિદ્ધ કરો કે

$$\frac{P}{CD} = \frac{Q}{CB} = \frac{R}{BD}.$$



આકૃતિ ૨૭

લામીનું પ્રમેય વાપરતાં જણાશે કે

$$\frac{P}{\sin \angle DAC} = \frac{Q}{\sin \angle BAC} = \frac{R}{\sin \angle DAB}.$$

$$\therefore \quad \frac{P}{\sin \angle DBC} = \frac{Q}{\sin \angle BDC} = \frac{R}{\sin \angle DCB}.$$

પરંતુ $\triangle BCD$ માંથી પ્રાપ્ત થશે કે

$$\frac{DC}{\sin \angle DBC} = \frac{BC}{\sin \angle BDC} = \frac{DB}{\sin \angle DCB}.$$

$\therefore$ અન્તે

$$\frac{P}{DC} = \frac{Q}{BC} = \frac{R}{BD}.$$

મનોયત્ન II.

(૧) એક કણ ઉપર કાર્ય કરતાં ત્રણ બળો સમતુલામાં છે; જો તેમનાં મહત્ત્વ સરખાં હોય તો તેમની કાર્યદિશા વચ્ચેના ખૂણાઓ શોધી કાઢો.

(૨) અનુક્રમે 3, 4 અને 5 પા. વ. નાં ત્રણ બળો એક કણ ઉપર કાર્ય કરે છે અને કણને સ્થિર રાખે છે. બળત્રિકોણ વિષે તમે શું કહી શકશો? બળોની કાર્યદિશા વચ્ચેના ખૂણાઓ શોધી કાઢો.

(૩) 7 મીટર લાંબાં એક દોરડાંના છેડા A અને B ખૂંટીએ બાંધેલા છે. AB 5 મીટર લાંબી ક્ષૈતિજ રેખા છે. 500 ગ્રામ વજનનો એક પદાર્થ દોરડાં ઉપરથી એક છેડેથી 3 મીટરને અંતરે લટકે છે. દોરડાંના બે ભાગમાં શા તણાવ હશે?

(૪) 26 પા. નું એક વજન, 12 અને 5 ફૂટ લાંબી દોરી AC અને BC વડે C ઉપરથી લટકાવેલું છે. AB ક્ષૈતિજ છે અને કોણ ACB એક કાટખૂણો છે. પ્રત્યેક દોરીમાંનો તણાવ શોધો.

(૫) એક સ્થિર બિન્દુ પરથી દોરી વડે W વજન નીચે લટકે છે. અને 2 પા. વ. નું એક ક્ષૈતિજ બળ તેને બાજુએ ખેંચે છે. સમતુલિત સ્થિતિમાં દોરી લંબકની દિશા જોડે 45° નો ખૂણો બનાવે છે. દર્શાવો કે $W = 2$ પા. વ. દોરીનો તણાવ પણ શોધી કાઢો.

(૬) ૧ પા. વજનનું એક દ્રવ્ય દોરી વડે લટકાવવામાં આવ્યું છે. દ્રવ્ય પર એક બળના કાર્ય કરવાને લઈને દોરી લંબક જોડે ૩૦° નો ખૂણો બનાવતી દિશામાં સ્થિર રહે છે. બળનું ઓછામાં ઓછું મહત્ત્વ કેટલું હોવું જોઈએ અને ત્યારે દોરીનો તણાવ કેટલો થશે તે શોધી કાઢો.

(૭) ક્ષિતિજ જોડે 30° નો કોણ બનાવતા એક લીસા ઢાળ ઉપર 2 ગ્રા. વજનના એક કણને સ્થિર ટેકાવી રાખવા માટે કેટલા મહત્ત્વનું ક્ષૈતિજ બળ જોઈશે?

(૮) મહત્તમ ઢોળાવની દિશામાં કાર્ય કરતું બળ P, α ઢોળાવના ઢાળ ઉપર W વજનને સ્થિર રાખે છે. સિદ્ધ કરો કે એ જ બળ P જો ક્ષૈતિજ દિશામાં કાર્ય કરે તો તે જ ઢાળ ઉપર $W \cos \alpha$ વજનના કણને સ્થિર રાખી શકે. આ બીજા વિકલ્પમાં ઢાળની પ્રતિક્રિયા શોધી કાઢો.

(૯) W વજનને એક લીસા ઢાળ ઉપર, P મહત્ત્વનું ક્ષૈતિજ બળ સ્થિર રાખી શકે છે. એ જ વજનને એ જ ઢાળ ઉપર મહત્તમ ઢોળાવની દિશામાં કાર્ય કરતું બળ Q પણ સ્થિર રાખી શકે છે. સાબિત કરો કે

$$\frac{1}{Q^2} = \frac{1}{P^2} + \frac{1}{W^2}.$$

(૧૦) મહત્તમ ઢોળાવની દિશામાં કાર્ય કરતું જે બળ, 10 પાઉન્ડ વજનને એક લીસા ઢાળ ઉપર સ્થિર રાખી શકે તે બળનું મહત્ત્વ શોધો. બળ, ઢાળની પ્રતિક્રિયા તથા વજન સમાન્તર શ્રેણીમાં છે એમ આપેલું છે.

(૧૧) એક દોરીને બે છેડે બાંધેલાં બે વજન બે ઢાળો ઉપર સ્થિર રહેલાં છે. બન્ને ઢાળ સરખી ઊંચાઈના છે અને એકબીજાની પીઠ અડકાડીને ગોઠવેલા છે. તેમના સામાન્ય શિરોબિન્દુ ઉપર એક લીસી ગરગડી ગોઠવેલી છે જેની ઉપરથી વજનોને બાંધેલી દોરી પસાર થાય છે. સાબિત કરો કે વજન તે તે ઢાળની લંબાઈના પ્રમાણમાં છે.

(૧૨) A અને C બે સ્થિર બિન્દુઓ છે. C, A ની ઉપર લંબક દિશામાં છે, ACની લંબાઈનો એક હળવો દંડ AB, Aમાં નકૂચા વડે જોડેલો છે અને

તેનો B છેડો C સ્થિર બિન્દુ જોડે દોરડાં વડે બાંધેલો છે. સિદ્ધ કરો કે સર્વ-સંયોગોમાં દંડમાંનો ધક્કો B ઉપરથી લટકતા વજન Wની બરાબર થશે અને જ્યારે AB ક્ષિતિજ જોડે θ નો કોણ બનાવશે ત્યારે દોરડાંનો તણાવ $2W \sin (45^\circ - \frac{\theta}{2})$ થશે.

(૧૩) બે હળવા દંડ AB અને BC, Bમાં જોડેલા છે. તેના A અને C છેડા એક દિવાલમાં બે સ્થિર બિન્દુએ નકૂચા વડે જડેલા છે. C લંબક દિશામાં Aની ઉપર આવેલું છે. Bમાંથી 40 પા. નું. એક વજન લટકે છે. જો $AC = 16''$, $AB = 5''$ અને $BC = 14''$ હોય તો દંડ વડે અજમાવાતાં બળો શોધો અને તે બળો તણાવ છે કે ધક્કો તે કહો.

(૧૪) A અને B એક ક્ષૈતિજ સુરેખામાં c અન્તરે આવેલાં બે બિન્દુઓ છે. b અને a લંબાઈની બે દોરી AC અને BC, Cમાં રહેલા એક વજનને સ્થિર રાખે છે. સિદ્ધ કરો કે દોરીઓના તણાવ

$$b\ (c^2 + a^2 - b^2) : a\ (b^2 + c^2 - a^2)$$

ના ગુણોત્તરમાં છે.

(૧૫) 5 પાઉન્ડ વજનની એક કીટસન બત્તી રસ્તાની વચ્ચોવચ બે તાર વડે લટકાવેલી છે. પ્રત્યેક તાર ક્ષિતિજ જોડે 10°નો કોણ બનાવે છે અને રસ્તાની સામસામી બાજુ આવેલા બે થાંભલા ઉપર એક જ સરખી ઊંચાઈએ બાંધેલા છે. પ્રત્યેક તારનો તણાવ શોધો.

(૧૬) ક્ષિતિજ જોડે β ખૂણો બનાવતી એક દોરી વડે એક કણને α ઢોળાવવાળા એક લીસા ઢાળ ઉપર ટેકવી રાખવામાં આવ્યું છે. જો, દોરીની દિશા બદલાવ્યા વગર, ઢાળનો ઢોળાવ વધારીને γ બનાવવામાં આવે તો માલૂમ પડે છે કે દોરીનો તણાવ બમણો થઈ જાય છે. સિદ્ધ કરો કે

$$\cot\alpha = \tan\beta + 2 \cot\gamma.$$

(૧૭) ત્રણ સમતલ બળો O બિન્દુ ઉપર કાર્ય કરે છે. Oમાંથી પસાર થતું અને બળોની કાર્યદિશાને A, B અને Cમાં કાપતું એક વર્તુળ દોરવામાં આવે

છે. જો બળો સમતુલામાં હોય તો દર્શાવો કે બળોનાં મહત્ત્વ ત્રિકોણ ABCની બાજુઓના પ્રમાણમાં છે.

(૧૮) ત્રણ બિલકુલ મામુલી વજનની દોરીમાંથી ગાંઠ વાળીને એક સમભુજ ત્રિકોણ ABC બનાવવામાં આવ્યો છે. A બિન્દુ ઉપરથી W વજન લટકાવવામાં આવ્યું છે; જો ત્રિકોણને BC ક્ષૈતિજ રાખીને BC જોડે $\frac{3\pi}{4}$ ના ખૂણા બનાવતી બે દોરી વડે લટકાવવામાં આવે તો સિદ્ધ કરો કે BCનો તણાવ $W(3-\sqrt{3})/6$ થશે.

(૧૯) એક જ લેવલ ઉપર એકબીજાથી a અન્તરે આવેલી બે લીસી ખૂંટી પરથી પસાર થતી એક હલકી દોરીને બે છેડે $2W$ તથા $3W$ વજનનાં બે કણ બાંધેલાં છે તથા ખીંટી વચ્ચેની દોરીના ભાગ પરના કોઈ એક બિન્દુએ બાંધેલું W' વજનનું કણ તેમને સ્થિર રાખે છે. જો દોરીના બે ત્રાંસા ભાગ વચ્ચેનો ખૂણો $120°$ હોય તો W' ની કીમત શોધો તથા ખીંટીના લેવલથી તે કેટલું નીચું રહેશે તે શોધી કાઢો.

જવાબો :

(૧) $120°$. (૨) $90°$, $\pi - \cos^{-1}(4/5)$, $\pi - \cos^{-1}(3/5)$. (૩) 300, 400 ગ્રા. વજન. (૪) 10, 24 પા. વ. (૫) $2\sqrt{2}$ પા. વ. (૬) $\frac{1}{2}$ પા. વ., $\frac{\sqrt{3}}{2}$ પા. વ. (૭) $(2/\sqrt{3})$ ગ્રા. વ. (૮) W. (૧૦) 6 પા. વ. (૧૩) 12·5 પા. વ. નો ABમાં ધક્કો, 35 પા. વ.નો BCમાં તણાવ. (૧૫) લગભગ 144 પા. વ.

ભાગ ૩

કણ પર કાર્ય કરતાં અનેક બળો

૧૨. પ્રાસ્તાવિક.

આપણે આપણા અધ્યયનની શરૂઆત કણ પર કાર્ય કરતા એક બળના વિકલ્પથી કરી અને જોયું કે એક જ બળ કણને સ્થિર રાખી શકે નહિ પછી કણ પર કાર્ય કરતાં બે બળોના વિચાર કર્યો અને આપણે જોયું કે જો કણ સ્થિર રહેવાનું હોય તો તે બે બળો સમમહત્ત્વનાં, પરસ્પર વિરોધી દિશામાં અને એક જ સુરેખામાં કાર્ય કરતાં હોવાં જોઈએ. પરંતુ જો બે બળોની અસર નીચે કણ સ્થિર ન રહે તો તે પરિસ્થિતિમાં આપણે તે બે બળોનું પરિણામી કેવી રીતે શેાધવું તે પણ જોયું છે.

ત્યાર પછી ત્રણ બળોના વિકલ્પનો આપણે અભ્યાસ કર્યો અને જેને આપણે સમતુલાની શરતો કહીએ તે શરતો આપણે શેાધી કાઢી. આ શરતો બળત્રિકોણના પ્રમેયમાં અથવા તો લામીના પ્રમેયમાં દર્શાવવામાં આવી છે. હવે આગળ શું? અલબત્ત જો ત્રણ બળો કણને સમતુલામાં ન રાખે તો તે ત્રણ બળોનું પરિણામી બળ શેાધવું રહ્યું. પરંતુ હકીકત એવી છે કે ત્રણ બળોનું પરિણામી શેાધવાની રીત, ચાર બળોનું પરિણામી શેાધવાની રીત કે તેથી વધુ બળોનું પરિણામી શેાધવાની રીત — આ બધી રીતો સરખી જ છે. એટલે આપણે સીધે સીધો કણ પર કાર્ય કરતાં અનેક બળોનો વિકલ્પ લઈશું અને તે અનેક બળોનું પરિણામી શેાધવાનો પ્રયત્ન કરીશું. આને માટે બે પદ્ધતિઓ વપરાશમાં છે (૧) સદિશ પદ્ધતિ કે ભૂમિતિની પદ્ધતિ (૨) વિભાજીત અંશોની પદ્ધતિ કે બીજગણિતની પદ્ધતિ. આપણે આ બન્ને પદ્ધતિઓનો અભ્યાસ કરીશું.

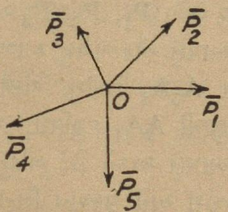
૧૩. સદિશ પદ્ધતિ.

કણ O પર રહેલું છે. $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \ldots \mathbf{P}_n$ એક કણ પર કાર્ય કરતાં n બળો છે. આપણે આ બળોનું પરિણામી બળ શેાધવું છે એટલે કે આપણે

$$\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 + \ldots . \ \mathbf{P}_n$$

ની કિંમત શેાધવી છે.

પહેલાં આપણે ત્રણ બળો $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ અને $\mathbf{P}_3$ લઈશું. સમતલના કોઈ પણ બિન્દુ Aમાંથી બળ $\mathbf{P}_1$ દર્શાવતું સદિશ $\mathbf{AA}_1$ દોરો. [**આ.** (૨૨) જુઓ]. $\mathbf{P}_2$ દર્શાવવા માટે A_1 માંથી $\mathbf{A}_1$ $\mathbf{A}_2$ દોરો.

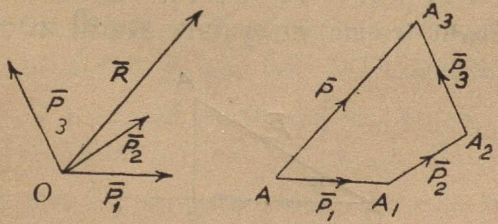


આકૃતિ ૨૧

બળ $\mathbf{P}_3$ દર્શાવવા માટે A_2 માંથી $\mathbf{A}_2$ $\mathbf{A}_3$ દોરો. AA_3 જોડી દો. ત્યારે $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ અને $\mathbf{P}_3$ નું પરિણામી બળ સદિશ $\mathbf{AA}_3$ દર્શાવશે. આ સાબિત કરવું બહુ સહેલું છે.

આપણે $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3$ શોધવું છે. ચાલો ત્યારે

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 &= \mathbf{AA}_1 + \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2\mathbf{A}_3\\ &= \mathbf{AA}_2 + \mathbf{A}_2\mathbf{A}_3\\ &= \mathbf{AA}_3.\end{aligned}$$



આકૃતિ ૨૨

$\mathbf{AA}_3$ પરિણામી બળ દર્શાવે છે. એક વસ્તુ ધ્યાનમાં રહેવી જોઈએ કે બળો O બિન્દુ ઉપર કાર્ય કરે છે. તેથી પરિણામી બળ પણ O બિન્દુ ઉપર જ કાર્ય કરશે. પરિણામીની વાસ્તવિક સ્થિતિ માલૂમ કરવા માટે આપણે O માંથી

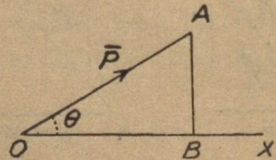
AA_3ને સમાન્તર અને સપ્રમાણ સુરેખા દોરવી જોઈશે. તે સુરેખા આપેલ બળોનું પરિણામી દર્શાવશે.

આ પદ્ધતિને ત્રણ કરતાં વધુ બળોને આવરી લેતું વ્યાપક સ્વરૂપ આપવું સહેલું છે. જો આપણે ચાર બળો $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$ અને $\mathbf{P}_4$ નું પરિણામી શોધવું હશે તો ઉપરની રચનાને આપણે એક પગલું આગળ વધારીશું. A_3માંથી બળ $\mathbf{P}_4$ દર્શાવવા માટે સદિશ $\mathbf{A}_3\mathbf{A}_4$ દોરીશું. પછી AA_4 જોડી દઈશું. અને આપેલાં ચાર બળોનું પરિણામી $\mathbf{AA}_4$ દર્શાવશે. આ રીતે ગમે તેટલાં બળોનું પરિણામી શોધી શકાય. આપણે એકને છેડે બીજું એ પ્રમાણે આપેલાં બળો દર્શાવતાં સદિશ દોરતા જઈશું અને પ્રસ્થાન બિન્દુથી અંતિમ બિન્દુને જોડતી સુરેખા તે સર્વ બળોનું પરિણામી બળ દર્શાવશે.

૧૪. બળનો વિભાજીત અંશ.

વિભાજીત અંશની પદ્ધતિનો હવે આપણે બે તબક્કામાં વિકાસ કરીશું. પહેલાં તો આપણે "કોઈ આપેલી દિશામાં બળના વિભાજીત અંશ"ની વ્યાખ્યા કરીશું અને પછી આ વિભાજીત અંશ વિષેનું એક પ્રમેય સાબિત કરીશું. આ પ્રમેયની મદદથી, છેવટે, આપણે અનેક બળોનું પરિણામી શોધી શકીશું.

વ્યાખ્યા: એક બળનો કોઈ પણ દિશામાં વિભાજીત અંશ, તે બળનું મહત્ત્વ અને બળ તથા આપેલી દિશા વચ્ચેના ખૂણાની કોજ્યા (cosine) નો ગુણાકાર કરવાથી પ્રાપ્ત થાય છે.



આકૃતિ ૨૩

બળ **P** O બિન્દુએ કાર્ય કરે છે. આપણે તે બળનો OX દિશામાં વિભાજીત અંશ કાઢવો છે. તે અંશ $P\cos\theta$ થશે. અહિં એક વસ્તુ ખ્યાલ પર લાવવી જરૂરી બને છે. ઉપરની વ્યાખ્યાનુસાર વિભાજીત અંશ એક નિર્દિશ

સંજ્ઞા છે. $P\cos\theta$ એક સંખ્યા જ છે. **P નો OX દિશામાં વિભાજિત અંશ** એમ કહીને જ આપણે વિભાજીત અંશની દિશા અલગ કરીને સૂચવી દઈએ છીએ અને પછી તો તે અંશની કિંમત $P\cos\theta$ ફક્ત સંખ્યા જ હોઈ શકે. અલબત્ત વિભાજીત અંશ ધન અથવા ઋણ હોઈ શકે. આનું કારણ એ છે કે વિભાજીત અંશના અવયવમાં $\cos\theta$ આવે છે. અને જો θ ગુરૂકોણ હોય તો $\cos\theta$ ઋણ થાય અને એ પરિસ્થિતિમાં વિભાજીત અંશ પણ ઋણ થશે.

આ. (૨૩) માં સદિશ **OA** બળ **P** દર્શાવે છે. $AB \perp OX$ દોરો. $\triangle OBA$માંથી જોઈ શકાશે કે

$$OB = OA\ \cos\theta = P\cos\theta$$

તેથી OX દિશામાં **P**નો વિભાજીત અંશ એટલે OX ઉપર OA નો પ્રક્ષેપ. વિભાજીત અંશનો આ અર્થ હવે પછીના પ્રમેયમાં બહુ ઉપયોગી નીવડશે.

૧૫. વિભાજિત અંશનું પ્રમેય.

કણ ઉપર કાર્ય કરતાં P અને Q બળોનું પરિણામી બળ R છે. પરિણામી R નો કોઇ પણ દિશા OX માં વિભાજિત અંશ એ P અને Q ના એ જ દિશાના વિભાજિત અંશોના સરવાળા બરાબર થાય.

આ. (૨૪)માં OA બળ **P** દર્શાવે છે, અને OB બળ **Q** દર્શાવે છે. સ. બા. ચ. કોણ $OACB$ પૂર્ણ કરો. વિકર્ણ OC પરિણામી **R** દર્શાવશે.

માની લો કે OA, OB અને OC OX જોડે, અનુક્રમે, α, β અને θ કોણ બનાવે છે. AM, BN અને CS સર્વે $\perp OX$ દોરો.

OX દિશામાં **P** નો વિભાજીત અંશ $= P\cos\alpha = OM;$

„ „ **Q** „ „ „ $= Q\cos\beta = ON;$

„ „ **R** „ „ „ $= R\cos\theta = OS.$

આપણે સાબિત કરવું છે કે $R\cos\theta = P\cos\alpha + Q\cos\beta$

એટલે કે „ „ „ „ $OS = OM + ON.$

એ સાબિત કરવા માટે $AT \perp CS$ દોરો.

તો પછી $OS = OM + MS$

$$= OM + AT \text{ થશે.} \qquad (1)$$

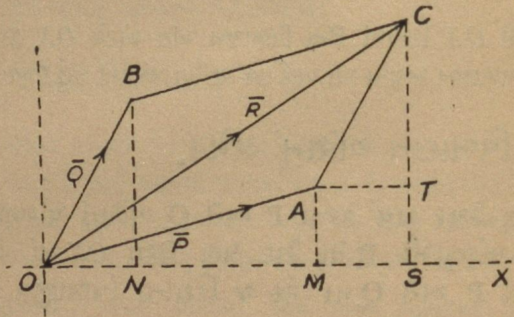
પરંતુ $\triangle$ OBN અને ACT સર્વ રીતે સમાન છે.

$\therefore \quad ON = AT.$

હવે સ. ક. (1)માંથી તરત જ જણાઈ આવશે કે

$$OS = OM + ON$$

અને આપણે આ જ સિદ્ધ કરવાનું હતું.



આકૃતિ ૨૪

કણ પર કાર્ય કરતાં બે બળો લઈને આપણે આ વિભાજીત અંશોનું પ્રમેય સિદ્ધ કર્યું છે. પરંતુ પ્રમેય બે કરતાં વધુ બળોના વિકલ્પમાં પણ સાચું જ છે. આપણે અહિં એ વધુ વ્યાપક સ્વરૂપમાં પ્રમેયની પ્રતિજ્ઞા આપીશું પરંતુ તેને સિદ્ધ કરવાનો આ સરળ પાઠ્યપુસ્તકમાં પ્રયત્ન કરીશું નહિ. જીજ્ઞાસુ વાચક **આ.** (૨૪) ના સ. બા. ચ. કોણને બદલે સદિશ પદ્ધતિની **આ.** (૨૨) નો ઉપયોગ કરીને વ્યાપક પ્રમેય સિદ્ધ કરી શકશે.

વિભાજીત અંશોનાં વ્યાપક પ્રમેયની પ્રતિજ્ઞા આ પ્રમાણે થશે:

એક કણ પર કાર્ય કરતાં અનેક બળોનાં પરિણામી બળનો કોઈ દિશામાં વિભાજીત અંશ તે તે બળોના તે જ દિશાના વિભાજીત અંશોના સરવાળા બરાબર થાય.

કણ પર કાર્ય કરતાં અનેક બળોનું પરિણામી બળ શોધવા માટેની વિભાજીત અંશોની પદ્ધતિ વિકસાવવામાં આપણે આ વ્યાપક પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીશું.

૧૬. વિભાજીત અંશોની પદ્ધતિ.

$\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$... બળો O બિન્દુ પર રહેલા એક કણ પર કાર્ય કરે છે. સગવડ પડતી કોઈ બે પરસ્પર લંબ સુરેખા OX અને OYને અક્ષ તરીકે પસંદ કરો. આપણે $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$... નું પરિણામી બળ $\mathbf{R}$ શોધવું છે.

$\mathbf{P}_1$ OX સાથે જે ખૂણો બનાવે તેને α_1 કહો.

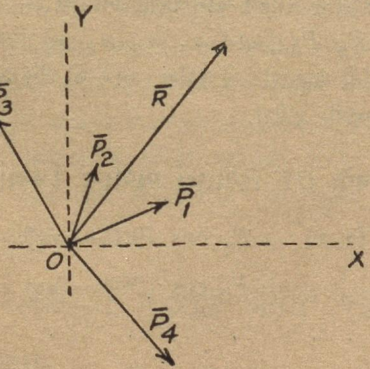
$\mathbf{P}_2$,, ,, ,, ,, ,, ,, α_2 ,,

$\mathbf{P}_3$,, ,, ,, ,, ,, ,, α_3 ,,

. . . .

. . . .

અને $\mathbf{R}$ OX સાથે જે ખૂણો બનાવે તેને θ કહો.



આકૃતિ ૨૫

આપણે પરિણામીનાં મહત્ત્વ અને દિશા શોધવાં છે એટલે કે આપણે R અને θ ની કિંમત જાણવી છે.

પહેલાં OX દિશામાં બળોનું વિભાજન કરીએ :

OX દિશામાં $\mathbf{P}_1$ નો વિભાજીત અંશ $P_1\cos\alpha_1$ છે.

„ „ $\mathbf{P}_2$ „ „ „ $P_2\cos\alpha_2$ „

. . . .

. . . .

„ „ R „ „ „ $R\cos\theta$ „

વિભાજીત અંશોનું વ્યાપક પ્રમેય કહી જાય છે કે

પરિણામીનો વિભાજીત અંશ = બળોના વિભાજીત અંશોનો સરવાળો.

$$\therefore \quad R\cos\theta = P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + P_3\cos\alpha_3 + \ldots$$

હવે $P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + P_3\cos\alpha_3 + \ldots + P_n\cos\alpha_n$ માટે X વાપરો.

$$\therefore \qquad R\cos\theta = X. \qquad (1)$$

આપણને બળોનાં મહત્ત્વ અને દિશા આપેલાં છે. એનો અર્થ એ થયો કે આપણને $P_1, P_2, P_3\ldots$ અને $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\ldots$ની કિંમત આપેલી છે. આ ઉપરથી આપણે Xની ગણતરી કરી શકીશું. અને એ રીતે સ. ક. (1)ની જમણી બાજુની કિંમત જાણી શકીશું.

હવે આપણે OY દિશામાં બળોનું વિભાજન કરીએ :

OYમાં $\mathbf{P}_1$ નો વિ. અં. $= P_1 \cos (90^\circ - \alpha_1) = P_1\sin\alpha_1$;

„ „ $\mathbf{P}_2$ „ „ „ $= P_2 \cos (90^\circ - \alpha_2) = P_2\sin\alpha_2$;

. . . . ;

, ... ;

OYમાં $\mathbf{R}$ નો વિ. અં. $= R\sin\theta$.

ફરી એક વખત વિ. અં. ના વ્યાપક પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં માલૂમ પડશે કે

$$R\sin\theta = P_1\sin\alpha_1 + P_2\sin\alpha_2 + P_3\sin\alpha_3 + \dots.$$

$P_1\sin\alpha_1 + P_2\sin\alpha_2 + P_3\sin\alpha_3 + \dots$ માટે Y વાપરો.

$$\therefore \qquad R\sin\theta = Y. \tag{2}$$

પરંતુ ઉપર જોઈ ગયા પ્રમાણે P_1, P_2, P_3...અને $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$...ની કિંમત આપણને આપેલી છે તેથી આપણે Yની કિંમત ગણી શકીશું. આ રીતે સ. ક. (2)ની જમણી બાજુની કિંમત જાણી શકીશું.

(1) અને (2) એ R અને θ શોધવા માટેનાં બે સમીકરણો થયાં. બન્ને બાજુએ વર્ગ લઈ સરવાળો કરતાં પ્રાપ્ત થશે કે

$$R^2 = X^2 + Y^2, \; R = \sqrt{X^2 + Y^2}; \tag{3}$$

અને સ. ક. (2)ને સ. ક. (1) વડે ભાગતાં જણાશે કે

$$\tan\,\theta = \frac{Y}{X}. \tag{4}$$

હવે X અને Yની કિંમત તો ગણી કાઢેલી છે એટલે (3) અને (4) પરિણામીનાં મહત્ત્વ R અને દિશા θ માટેનાં સૂત્રો થયાં. આપણે સંક્ષેપમાં વિભાજીત અંશની આ પદ્ધતિનું વિવરણ આ રીતે કરી શકીએ. સગવડ પડતી પરસ્પર લંબ સુરેખા OX, OY પસંદ કરો. પ્રત્યેક આપેલા બળનો OX દિશામાં વિ. અં. કાઢો. તે બધા અંશોનો સરવાળો કરો અને X મેળવો. એ જ રીતે OY દિશામાં પ્રત્યેક બળના વિ. અં.નો સરવાળો કરીને Y મેળવો. પછી $R^2 = X^2 + Y^2$ અને $\tan\,\theta = Y/X$ એ સૂત્રો વડે પરિણામીનાં મહત્ત્વ અને દિશા શોધી શકાશે.

૧૭. અનેક બળોની અસર નીચે રહેલા કણનું સમતોલન.

કણને સ્થિર રાખવા માટે તે પર કાર્ય કરતાં અનેક બળોની શી વ્યવસ્થા હોવી જોઈએ તે હવે આપણે શોધી શકીશું. સમતુલાની આ શરતો મેળવવા માટે આપણે સર્વ પ્રથમ તો આગલા પરિચ્છેદમાં બતાવ્યા પ્રમાણે સર્વ બળોનું

પરિણામી બળ શોધી કાઢીશું. અને પછી સમતુલાની શરત તરીકે આ પરિણામી બળને શૂન્ય બરાબર મૂકી દઈશું. આ શરતો પ્રાપ્ત કરવા માટે આપણે વિભાજીત અંશની પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરીશું.

કણની સ્થિતિ Oમાંથી પસાર થતી સગવડ પડતી કોઈ પણ બે પરસ્પર લંબ રેખાઓ OX, OY પસંદ કરો. આપેલાં બળોનાં મહત્ત્વ P_1, P_2, $P_3 \ldots$ છે અને તેમની કાર્ય દિશા, OX જોડે તેમણે બનાવેલા ખૂણાઓ α_1, α_2, $\alpha_3 \ldots$, બતાવે છે. [**આ.** (૨૫) જુઓ]. હવે આપેલાં બળોને OX દિશામાં વિભાજીત કરો અને વિભાજીત અંશોનો સરવાળો કરો. આ રીતે આપણે X મેળવીશું.

$$X = P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + \ldots \tag{1}$$

એ જ રીતે આપેલાં બળોને OY દિશામાં વિભાજીત કરી, વિભાજીત અંશોનો સરવાળો કરીને Y મેળવી શકાશે.

$$Y = P_1\sin\alpha_1 + P_2\sin\alpha_2 + \ldots \tag{2}$$

પછી વિભાજીત અંશોની પદ્ધતિ પ્રમાણે પરિણામીનું મહત્ત્વ R નીચેના સૂત્રથી પ્રાપ્ત થશે.

$$R^2 = X^2 + Y^2. \tag{3}$$

સમતુલા માટે $R = 0$. $\therefore$ $X^2 + Y^2 = 0$. પરંતુ આ સમીકરણની ડાબી બાજુએ બે ધન સંખ્યાનો સરવાળો છે આથી જ્યારે તે દરેક સંખ્યા શૂન્ય થશે ત્યારે જ સરવાળો શૂન્ય થઈ શકશે.

$$\therefore \quad X = 0, \; Y = 0. \tag{4}$$

સ. ક. (4) એ સમતુલાની શરતો થઈ. કણ પર અનેક બળોનાં કાર્ય કરવા છતાં પણ જો કણ સ્થિર રહેવાનું હોય તો બળોએ આ શરતો પાળવી જ રહી. આ શરતોને વિગતે નીચે પ્રમાણે લખી શકાય.

કણ પર કાર્ય કરતી એક બળસંસ્થા જો સમતુલિત હોય તો

(૧) $X = 0$, એટલે કે બળોના કોઈ પણ દિશા OX માંના વિભાજીત અંશોનો સરવાળો શૂન્ય થવો જોઈએ.

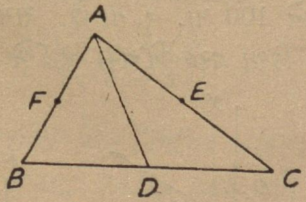
(૨) $Y = 0$, એટલે કે બળોના OX ને લંબ દિશા OY માંના વિભાજીત અંશોનો સરવાળો પણ શૂન્ય થવો જોઈએ.

અનેક બળોની અસર નીચેના કણની સમતુલા માટેની આ શરતો છે. અને તેથી, સગવડ પડતી હોય, તો આ શરતોનો ઉપયોગ બે કે ત્રણ બળોના આગલા વિકલ્પોમાં પણ કરી શકાય.

આ રીતે આપણે કણસ્થૈતિકીનો પ્રધાન કૂટપ્રશ્ન હલ કર્યો. આ કૂટપ્રશ્નની પ્રતિજ્ઞા પ્રકરણની શરૂઆતમાં આપી દીધેલી છે. આ ભાગમાં આવેલી પદ્ધતિઓના ઉપયોગ દર્શાવતાં કેટલાંક ઉદાહરણો ગણીને કણસ્થૈતિકીની આ ચર્ચા આપણે સમેટી લઈશું.

૧૮. ઉદાહરણો.

ABC ત્રિકોણમાં, D, E અને F તેની ત્રણ બાજુઓનાં મધ્ય-બિન્દુ છે. એક કણ પર કાર્ય કરતાં બળોને $2AD$, $2BE$ અને $2CF$ વડે દર્શાવી શકાય તેમ હોય તો સાબિત કરો કે તે બળો સમતુલામાં છે.



આકૃતિ ૨૬

આપણે સિદ્ધ કરવું છે કે

$$\mathbf{2AD} + \mathbf{2BE} + \mathbf{2CF} = 0.$$

આપણે સદિશ પદ્ધતિ વાપરીશું. એ તો જાણીતું છે કે

$$\mathbf{AB} + \mathbf{BD} = \mathbf{AD}.$$

તેજ પ્રમાણે $\mathbf{AC} + \mathbf{CD} = \mathbf{AD}.$

સરવાળો કરતાં માલૂમ પડશે કે

$$AB + AC + BD + CD = 2AD. \qquad (1)$$

પરંતુ **આ.** (૨૬)માંથી દેખાશે કે

$$BD = DC \quad \therefore \quad BD = -CD \quad \therefore \quad BD + CD = 0.$$

આ રીતે સ. ક. (1) માંથી જોઈ શકાશે કે

$$AB + AC = 2AD.$$

એ જ પ્રમાણે આપણે બીજાં બે સમીકરણો લખી શકીએ:

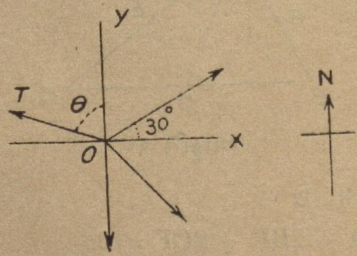
$$BA + BC = 2BE$$

$$CB + CA = 2CF.$$

આ ત્રણે સમીકરણોનો સરવાળો કરો:

$$\therefore \quad 2AD + 2BE + 2CF = 0.$$

(૨) એક તારના થાંભલા ઉપર ક્ષૈતિજ સમતલમાં ત્રણ તારો પસાર થાય છે; એક દક્ષિણ તરફ, બીજો અગ્નિ (દક્ષિણ-પૂર્વ) ખૂણા તરફ અને ત્રીજો ઉ. 60° પૂ. (N60°E) તરફ. તારમાં તણાવ અનુક્રમે 80, 40 અને 100 પા. વ. ના છે. સમતુલા ઉત્પન્ન કરવા માટે ચોથો તાર કઈ દિશા તરફ ખેંચવો જોઈએ તે શોધી કાઢો.



આકૃતિ ૨૭

તારમાંથી પસાર થતા ક્ષૈતિજ સમતલમાં **આ.** (૨૭) દોરેલી છે. O તારના થાંભલાનું મથાળું છે. આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે OX અને OY પસંદ કરો.

ચોથા તારની દિશા $N\theta°W$ લો. અને તેનો તણાવ T છે, એમ માની લો. હવે આપણે X અને Y ની ગણતરી કરીશું.

OX દિશામાં બળોને વિભાજીત કરો :

$$X = 80\cos 90° + 40\cos 45° + 100\cos 30° + T\cos(90°+\theta)$$

$$= \frac{40}{\sqrt{2}} + 100.\frac{\sqrt{3}}{2} - T\sin\theta. \qquad (1)$$

OY દિશામાં બળોને વિભાજીત કરો :

$$Y = -80 - \frac{40}{\sqrt{2}} + \frac{100}{2} + T\cos\theta. \qquad (2)$$

સમતુલા માટે $X = 0$, $Y = 0$. તેથી સ. ક. (1) અને (2) માંથી જણાશે કે

$$T\sin\theta = 20\sqrt{2} + 50\sqrt{3}, \qquad (3)$$

$$T\cos\theta = 20\sqrt{2} + 30; \qquad (4)$$

અને છેવટે ભાગાકાર કરવાથી θ મળી રહેશે:

$$\tan\theta = \frac{2\sqrt{2} + 5\sqrt{3}}{2\sqrt{2} + 3}.$$

(૩) $ABCDEF$ એક નિયમિત ષટ્કોણ છે. A ઉપર કાર્ય કરતાં અને AB, $2AC$, $3AD$, $2AE$ અને AF વડે દર્શાવતાં બળોનું પરિણામી શોધો.

જો $AB = a$ હોય તો

$$AC = a\sqrt{3} = AE,\ AD = 2a.$$

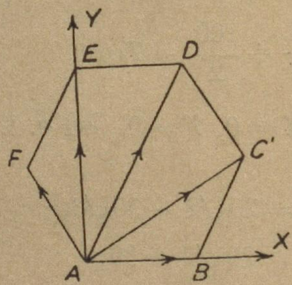
બળોનાં મહત્ત્વ અનુક્રમે a, $2a\sqrt{3}$, $6a$, $2a\sqrt{3}$ અને a છે. $X-$ અક્ષ તરીકે AB અને $Y-$ અક્ષ તરીકે AE ને પસંદ કરો. બળોને $X-$ અક્ષ તરફ વિભાજીત કરતાં જણાશે કે

$$X = a + 2a\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} + 6a.\frac{1}{2} - a.\frac{1}{2} = \frac{13a}{2}. \qquad (1)$$

એ જ પ્રમાણે

$$Y = 2a\sqrt{3}.\frac{1}{2} + 6a.\frac{\sqrt{3}}{2} + 2a\sqrt{3} + a\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{13a}{2}\sqrt{3}.$$



આકૃતિ ૨૮

$\therefore$ માલૂમ પડશે કે $R = \sqrt{X^2 + Y^2} = 13a = \frac{13}{2}AD$

અને　　$\tan\theta = \sqrt{3} \quad \therefore \quad \theta = 60°.$

$\therefore$ પરિણામીનું મહત્ત્વ $\frac{13}{2}$ AD છે અને તેની કાર્યદિશા AD છે.

મનોયત્ન III

(૧) કણ પર કાર્ય કરતાં નીચેનાં બળોનું પરિણામી શોધો. $3\frac{1}{2}$ પા. વ. પૂર્વ તરફ; 4 પા. વ. અગ્નિ તરફ; 1 પા. વ. ઈશાન તરફ અને $6\frac{1}{2}$ પા. વ. ઉત્તર તરફ.

(૨) 2 પા. વ. નાં ત્રણ સમમહત્ત્વનાં બળો કણ ઉપર કાર્ય કરે છે. પહેલા અને બીજા બળ વચ્ચે 30° નો ખૂણો પડે છે; બીજા અને ત્રીજા બળ વચ્ચે 60° નો ખૂણો પડે છે. તો બળોનું પરિણામી બળ શોધો.

(૩) N30°E માં કાર્ય કરતું R પા. વ. નું એક બળ નીચેનાં ત્રણ બળોનું પરિણામી છે. (i) 5 પા. વ. પૂર્વ તરફ (ii) 3 પા. વ. ઉત્તર તરફ (iii) P પા. વ. N30°W તરફ. P અને R ની કિંમત શોધી કાઢો.

(૪) $ABCD$ એક ચતુષ્કોણ છે. એક કણ પર કાર્ય કરતાં બળો **AB, AD, BC** અને **DC** વડે દર્શાવી શકાય છે. સાબિત કરો કે તેમનું પરિણામી **2AC** વડે દર્શાવી શકાય. તદુપરાંત **BA, BC, DA** અને **CD** વડે દર્શાવી શકાતાં બળોનું પરિણામી પણ શોધી કાઢો.

(૫) $ABCD$ એક સ. બા. ચ. કોણ છે. સિદ્ધ કરો કે **AC** અને **DB** વડે દર્શાવાયેલાં બે બળોનું પરિણામી **2AB** વડે દર્શાવી શકાય.

(૬) ચતુષ્કોણ $ABCD$ ના સમતલ ઉપર એક એવું બિન્દુ O મેળવો કે OA, OB, OC તથા OD વડે દર્શાવી શકાતાં ચાર બળો એક કણને સમતુલામાં રાખી શકે.

(૭) OA અને OB સુરેખાઓ એકબીજી જોડે 60° નો કોણ બનાવે છે. O બિન્દુ પર કાર્ય કરતું એક બળ એવું છે કે તેનો OA માં વિભાજીત અંશ 3 પા. વ. નો છે અને OB માં વિભાજીત અંશ 4 પા. વ. નો છે. તો તે બળનાં મહત્ત્વ અને દિશા શોધો.

(૮) એક નિયમિત ષટ્કોણની બાજુઓને સાનુક્રમે સમાન્તર છ બળો એક બિન્દુ ઉપર કાર્ય કરે છે. બળોનાં મહત્ત્વ 3, 4, 6, 8, 10 અને 11 પા. વ. છે. સિદ્ધ કરો કે તેના પરિણામીનું મહત્ત્વ 11 પા. વ. છે.

(૯) $ABCDEF$ એક નિયમિત ષટ્કોણ છે. **AC, AD** અને **AE** વડે દર્શાવાતાં બળો A ઉપર કાર્ય કરે છે. સિદ્ધ કરો કે તે બળોનું પરિણામી $\frac{5}{2}$ **AD** વડે દર્શાવી શકાય.

(૧૦) $ABCD$ એક સમચોરસ છે અને E, BCનું મધ્યબિન્દુ છે. 3, $2\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$ અને 3 મહત્ત્વનાં બળો અનુક્રમે AB, AE, AC અને AD દિશામાં કાર્ય કરે છે. બળોનું પરિણામી શોધો.

(૧૧) a અન્તરે એક જ સપાટી ઉપરનાં A અને B બિન્દુએ l લંબાઈની એક દોરી બાંધેલી છે. ($l > a$). W વજનની એક કડી દોરી ઉપર સરકતી રાખી છે, અને તેની ઉપર એક ક્ષૈતિજ બળ X કાર્ય કરે છે જેને પરિણામે કડી બરાબર લંબક દિશામાં Bની નીચે સ્થિર રહે છે. સિદ્ધ કરો કે $X = \frac{a}{l} W$ અને દોરીનો તણાવ $W(a^2 + l^2)/2l^2$ થશે.

(૧૨) નિયમિત ત્રિકોણ ABCની BC, CA, AB બાજુઓને સમાન્તર દિશામાં, એક બિન્દુ ઉપર, P, $P+Q$ અને $P+Q+R$ મહત્ત્વનાં બળો અનુક્રમે કાર્ય કરે છે. બળોનું પરિણામી શોધો.

(૧૩) P, Q, R એક બિન્દુ ઉપર કાર્ય કરતાં સમતલ બળો છે અને અનુક્રમે Q અને R, R અને P તથા P અને Q વચ્ચેના ખૂણાઓ α, β અને γ છે. બતાવો કે બળોના પરિણામીનું મહત્ત્વ F નીચેના સમીકરણમાંથી મળી શકશે:

$$F^2 = P^2 + Q^2 + R^2 + 2PQ\cos\gamma + 2QR\cos\alpha + 2RP\cos\beta.$$

(૧૪) ત્રિકોણ ABCનાં કોણીય બિન્દુઓમાંથી સામી બાજુને લંબ દિશામાં બળો કાર્ય કરે છે. જો બળોનાં મહત્ત્વ તે તે ખૂણાઓની કોજ્યા (cosine)ના પ્રમાણમાં હોય તો સિદ્ધ કરો કે પરિણામીનું મહત્ત્વ $\sqrt{1 - 8\cos A\cos B\cos C}$ ના પ્રમાણમાં છે.

(૧૫) એક કણ ઉપર, પરસ્પર 2β નો કોણ બનાવતી દિશામાં $(A+B)$ અને $(A-B)$ મહત્ત્વનાં બે બળો કાર્ય કરે છે. જો તેમનું પરિણામી તેમની વચ્ચેના ખૂણાના દુભાજક જોડે α કોણ બનાવે તો સિદ્ધ કરો કે

$$A\tan\alpha = B\tan\beta.$$

(૧૬) એક વર્તુળના પરિધ ઉપર ત્રણ બિન્દુઓ A, B અને C લેવામાં આવ્યાં છે. AB અને BC સુરેખામાં તે તે રેખાની લંબાઈનાં વ્યસ્ત પ્રમાણનાં મહત્ત્વવાળાં બળો કાર્ય કરે છે. સિદ્ધ કરો કે બળોનું પરિણામી વર્તુળની B ઉપરની સ્પર્શરેખામાં કાર્ય કરે છે.

જવાબો :

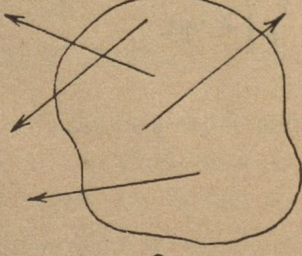
(૧) $R^2 = \frac{143}{2} - 2\sqrt{2}$, દિશા : $N\theta E$ જેમાં $\tan\theta = (7+5\sqrt{2})/(13-3\sqrt{2})$. **(૨)** $R = 2\sqrt{4+\sqrt{3}}$; દિશા : પહેલા બળ જોડે $\tan^{-1}\left(\frac{3}{2+\sqrt{3}}\right)$ને ખૂણે. **(૩)** $R = (5+\sqrt{3})$ પા. વ., $P = (5-\sqrt{3})$ પા. વ.; **(૪)** $2\mathbf{BA}$. **(૭)** $\sqrt{(52/3)}$ પા. વ; OA જોડે $\tan^{-1}(5/3\sqrt{3})$ ને ખૂણે. **(૧૦)** 10, AB જોડે $\tan^{-1}(3/4)$ ના ખૂણે. **(૧૨)** $\sqrt{(Q^2+QR+R^2)}$, દિશા : BC જોડે $\pi - \tan^{-1}\left(\frac{R\sqrt{3}}{2Q+R}\right)$ ને ખૂણે.

પ્રકરણ ૩

દૃઢ પદાર્થ પર કાર્ય કરતાં બળો

૧. પ્રાસ્તાવિક.

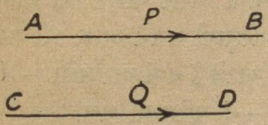
હવે આપણે આપણું ધ્યાન કણ ઉપરથી ફેરવીને વિસ્તૃત પદાર્થ ઉપર કેન્દ્રિત કરીશું. મોટા કદના પદાર્થ ઉપર બળના કાર્યથી બે પ્રકારની અસર નિપજાવી શકાય. એક અસર તો પદાર્થને ગતિમાન કરવાની. બીજી અસર પદાર્થના આકાર બદલવાની. આપણે રબરના એક પટ્ટાને ખેંચીશું તો તેની લંબાઈ વધશે. આ બળથી નીપજતી બીજા પ્રકારની અસર છે. યંત્રવિદ્યામાં આપણને ફક્ત પહેલા પ્રકારની (એટલે ગતિ ઉત્પન્ન કરતી) અસર સાથે જ સંબંધ છે' તેથી અહિં આપણે એવા જ પદાર્થોની ચર્ચા કરીશું કે જેમનાં કદ અથવા આકાર બળના પ્રયોગથી બદલાતાં નથી. આવા પદાર્થોને દૃઢ પદાર્થ કહે છે. આ પ્રકરણમાં આપણે આવા દૃઢ પદાર્થની સ્થૈતિકીનો અભ્યાસ કરીશું.



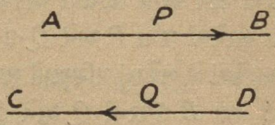
આકૃતિ ૨૯

કણ O પર કાર્ય કરતાં સર્વ બળો, અલબત્ત, O માંથી પસાર થવાં જોઈએ. એનો અર્થ એ થયો કે કણ પર કાર્ય કરતાં બળો એકબિન્દુગામી સુરેખાઓ વડે જ દર્શાવી શકાય. પરંતુ પદાર્થ પર કાર્ય કરતાં બળો માટે આવું કાંઈ જરૂરી નથી. દૃઢ પદાર્થ પર કાર્ય કરતાં બળો દર્શાવતી સુરેખાઓ એકબિન્દુગામી હોવી જરૂરી

નથી. એટલુંજ નહિ પરંતુ આમાંની કેટલીક સુરેખાઓ સમાન્તર પણ હોઈ શકે. [**આ.** (૨૯) જુઓ]. પદાર્થની સ્થૈતિકીનો અભ્યાસ આપણે પદાર્થ પર કાર્ય કરતાં બે સમાન્તર બળોની ચર્ચાથી શરૂ કરીશું.



આકૃતિ ૩૦(क)



આકૃતિ ૩૦(ख)

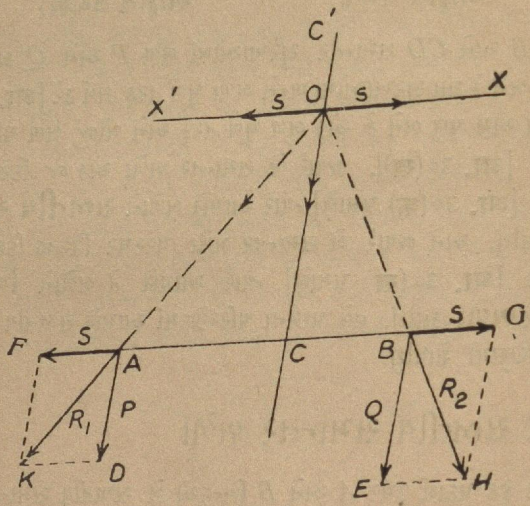
AB અને *CD* સમાન્તર સુરેખાઓમાં બળ *P* અને *Q* કાર્ય કરે છે. હવે એવું બને કે આ સુરેખાઓમાં બન્ને બળો પૂર્વ તરફ કાર્ય કરે [**આ.** ૩૦(क)] અથવા તો એમ પણ બને કે એક બળ પૂર્વ તરફ અને બીજું બળ પશ્ચિમ તરફ કાર્ય કરે. [**આ.** ૩૦(ख)]. જ્યારે બે સમાન્તર બળો એક જ દિશામાં કાર્ય કરતાં હોય [**આ.** ૩૦(क) પ્રમાણે] ત્યારે આપણે બળોને **સજાતીય સમાન્તર બળો** કહીશું, અને જ્યારે બે સમાન્તર બળો પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાં કાર્ય કરતાં હોય [**આ.** ૩૦(ख) પ્રમાણે] ત્યારે આપણે તે બળોને **વિજાતીય સમાન્તર બળો** કહીશું. હવે પછીના પરિચ્છેદમાં આપણે સજાતીય સમાન્તર બળોનું પરિણામી શોધીશું.

૨. બે સજાતીય સમાન્તર બળો

એક દૃઢ પદાર્થ ઉપર *A* અને *B* બિન્દુએ બે સજાતીય સમાન્તર બળો *P* અને *Q* કાર્ય કરે છે. બળોની કાર્યદિશા અનુક્રમે *AD* અને *BE* છે. આપણે તેમનું પરિણામી શોધવું છે. વધારે ચોક્કસ રીતે કહીએ તો આપણે ત્રણ વસ્તુ શોધવાની છે: (૧) પરિણામીનું મહત્ત્વ (૨) પરિણામીની દિશા (૩) જે બિન્દુએ આ પરિણામી કાર્ય કરે છે તે પદાર્થનું બિન્દુ.

આ પરિણામી શોધવા માટે આપણે સ. બા. ચ. કોણનો નિયમ નહિ વાપરી શકીએ કારણ કે બે સમાન્તર બળો સ. બા. ચ. કોણની સંલગ્ન બાજુઓ થઈ શકે નહિ. તેમ છતાં પણ સ. બા. ચ. કોણનો નિયમ વાપરીને જ આપણે આ પરિણામી શોધીશું! આમ કેમ બને છે તે હવે આપણે જોઈએ.

AB જોડી દો. A અને B ઉપર, બે સમમહત્ત્વનાં (પ્રત્યેક મહત્ત્વ $=S$) પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશાનાં અને એક જ સુરેખા ABમાં કાર્ય કરતાં બળો દાખલ કરો. આ બે વધારાનાં બળો, સમમહત્ત્વનાં, વિરુદ્ધ દિશાનાં અને એક જ સુરેખામાં કાર્ય કરતાં હોવાથી એકબીજાંની અસર નાબૂદ કરી નાખશે અને તેથી તેઓ આપેલાં બળો P અને Qના પરિણામી બળને અસર કરી શકશે નહિ. આ રીતે આપેલાં બે બળોનું પરિણામી બળ એટલે કે નવાં ચાર બળો — A ઉપરનાં P અને S તથા B ઉપરનાં Q અને S — નું પરિણામી બળ.



આકૃતિ ૩૧

A બિન્દુ ઉપર:

સ. બા. ચ. કોણ $ADKF$ પૂર્ણ કરો. વિકર્ણ $AK = R_1$ એ A ઉપર કાર્ય કરતાં P અને S નું પરિણામી થશે.

B બિન્દુ ઉપર:

સ. બા. ચ. કોણ $BGHE$ પૂર્ણ કરો. વિકર્ણ $BH = R_2$ એ B ઉપર કાર્ય કરતાં Q અને S નું પરિણામી થશે.

KA અને HB ને લંબાવો કે જેથી તેઓ O માં મળે. O બિન્દુ બન્ને બળો R_1 અને R_2 ની કાર્યરેખાઓ પર આવેલું છે. R_1 અને R_2 નાં કાર્ય-બિન્દુને O ઉપર લઈ જાઓ.

O બિન્દુ ઉપર :

$XOX' \parallel AB$ અને $COC' \parallel AD$ અથવા BE દોરો. O ઉપર કાર્ય કરતાં R_1 ને તેના બે સંઘટકોમાં વિભાજીત કરો:

(૧) OX' દિશામાં S

(૨) OC દિશામાં P.

O ઉપર કાર્ય કરતાં $\mathbf{R}_2$ ને તેના બે સંઘટકોમાં વિભાજીત કરો:

(૧) OX દિશામાં S

(૨) OC દિશામાં Q.

OX અને OX' દિશાના સંઘટકો S, સમમહત્ત્વના, વિરુદ્ધ દિશાના, તથા એક જ સુરેખામાં કાર્ય કરતા હોવાથી એકબીજાને સમતુલિત કરશે અને એ રીતે નાશ પામશે; અને આપણી પાસે OC દિશામાં કાર્ય કરતા બે સંઘટકો P અને Q જ રહેશે. આ રીતે માલૂમ પડે છે કે બે સજાતીય સમાન્તર બળો P અને Q ના પરિણામીનું મહત્ત્વ $P+Q$ છે; તેની દિશા આપેલાં બળોને સમાન્તર છે. આપણે હવે તેનું કાર્યબિન્દુ શોધવાનું છે. આ માટે પરિણામી સુરેખા AB ને જે બિન્દુમાં છેદે છે તે બિન્દુ C આપણે શોધીશું. ગુણોત્તર $AC : CB$ ગણીને આપણે C બિન્દુ જાણી શકીશું.

$AC : CB$ શોધવું.

$\triangle$ OCA અને ADK સરૂપ છે.

$$\therefore \quad \frac{AC}{KD} = \frac{OC}{AD} \text{ અથવા તો } \frac{AC}{S} = \frac{OC}{P}.$$

$$\therefore \quad AC = \frac{S \cdot OC}{P}. \qquad (1)$$

વળી $\triangle$ OCB અને BEH સરૂપ છે.

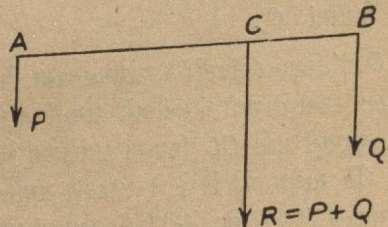
$$\therefore \quad \frac{CB}{EH} = \frac{OC}{BE} \text{ અથવા તો } \frac{CB}{S} = \frac{OC}{Q}$$

$$\therefore \quad CB = \frac{S \cdot OC}{Q}. \qquad (2)$$

સ. ક. (1) ને સ. ક. (2) વડે ભાગતાં જણાશે કે

$$\frac{AC}{CB} = \frac{Q}{P}.$$

એટલે કે C ABને બળોના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં છેદે છે. આપણે નીચેનું પરિણામ તારવી શકીએ. બે સજાતીય સમાન્તર બળો P અને Qનું પરિણામી બળ એક સજાતીય સમાન્તર બળ છે; તેનું મહત્ત્વ $P+Q$ છે અને તેની કાર્યદિશા આપેલાં બળો વચ્ચે દોરેલી કોઈ પણ છેદિકાને બળોના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં ભાગે છે.



આકૃતિ ૩૨

ઉપપ્રમેય : બે સમાન્તર સજાતીય બળો P અને Qનું પરિણામી બળ R છે. એક સુરેખા આ બળોને અનુક્રમે A, B અને Cમાં છેદે છે. સિદ્ધ કરો કે

$$\frac{P}{CB} = \frac{Q}{AC} = \frac{R}{AB}.$$

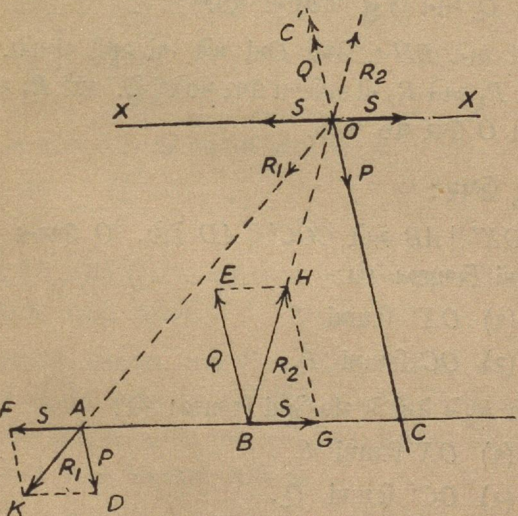
આપણે જાણીએ છીએ કે $R = P + Q$ અને

$$\frac{AC}{CB} = \frac{Q}{P}$$

એટલે કે $\dfrac{P}{CB} = \dfrac{Q}{AC} = \dfrac{P+Q}{AC+CB} = \dfrac{R}{AB}.$

૩. વિજાતીય સમાન્તર બળો.

એક દૃઢ પદાર્થ ઉપર A અને B બિન્દુએ બે વિજાતીય સમાન્તર બળો P અને Q કાર્ય કરે છે. બળોની કાર્યરેખા અનુક્રમે AD અને BE છે. આપણે તેમનું પરિણામી બળ શેાધવું છે. એ માટે સજાતીય બળો માટે વાપરેલી પદ્ધતિને મળતી પદ્ધતિનો ઉપયેાગ કરીશું.



આકૃતિ ૩૩

AB જોડી દો. A અને B ઉપર બે સમમહત્ત્વનાં (પ્રત્યેક મહત્ત્વ $=S$) પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશાનાં અને એક જ સુરેખા ABમાં કાર્ય કરતાં બળો દાખલ કરો. આ બે વધારાનાં બળો, સમમહત્ત્વનાં, વિરુદ્ધ દિશાનાં તથા એક જ સુરેખામાં કાર્ય કરતાં હોવાથી એકબીજાંની અસર નાબૂદ કરી નાખશે. અને તેથી તેઓ આપેલાં બળો P અને Qના પરિણામી બળને અસર કરી શકશે નહિ.

આ રીતે આપેલાં બે બળોનું પરિણામી બળ એટલે કે નવાં ચાર બળો—A ઉપરનાં P અને S તથા B ઉપરનાં Q અને S — નું પરિણામી બળ.

A બિન્દુ ઉપર :

સ. બા. ચ. કોણ $ADKF$ પૂર્ણ કરો. વિકર્ણ $AK = R_1$ એ A ઉપર કાર્ય કરતાં P અને S નું પરિણામી થશે.

B બિન્દુ ઉપર :

સ. બા. ચ. કોણ $BGHE$ પૂર્ણ કરો. વિકર્ણ $BH = R_2$ એ B ઉપર કાર્ય કરતાં Q અને S નું પરિણામી થશે.

KA અને BHને, તેઓ Oમાં મળે ત્યાં સુધી લંબાવો. O બિન્દુ બન્ને બળો R_1 અને R_2 ની કાર્યરેખા ઉપર આવેલું છે. માટે R_1 અને R_2 ના કાર્યબિન્દુને O ઉપર લઈ જાઓ.

O બિન્દુ ઉપર :

$XOX' \parallel AB$ અને $COC' \parallel AD$ દોરો. O ઉપરના R_1ને તેના બે સંઘટકોમાં વિભાજીત કરો:

(૧) OX' દિશામાં S

(૨) OC દિશામાં P.

O ઉપરના R_2 ને તેના બે સંઘટકોમાં વિભાજીત કરો:

(૧) OX દિશામાં S

(૨) OC' દિશામાં Q.

OX અને OX' દિશાના સંઘટકો S, સમમહત્ત્વના, વિરુદ્ધ દિશાના તથા એક જ સુરેખામાં કાર્ય કરતા હોવાથી એકબીજાને સમતુલિત કરશે અને એ રીતે નાશ પામશે, અને આપણી પાસે CO દિશામાં કાર્ય કરતું, $Q-P$ મહત્ત્વનું ફક્ત એક જ બળ રહેશે. તેની કાર્યરેખા AB ને બહારની તરફ Cમાં છેદે છે. આ C બિન્દુ બેમાંનાં મહત્તર બળ Qની નજદિક છે. હવે આપણે $AC:CB$ ગુણોત્તર શોધીશું.

$AC : CB$ શોધવું.

$\triangle OCA$ અને ADK સરૂપ છે.

$$\therefore \quad \frac{AC}{KD} = \frac{OC}{AD} \text{ અર્થાત્ } \frac{AC}{S} = \frac{OC}{P}.$$

$$\therefore \quad AC = \frac{S \cdot OC}{P}. \qquad (1)$$

વળી $\triangle OCB$ અને HGB પણ સરૂપ છે.

$$\therefore \quad \frac{BC}{BG} = \frac{OC}{GH} \text{ અર્થાત્ } \frac{BC}{S} = \frac{OC}{Q}.$$

$$\therefore \quad BC = \frac{S \cdot OC}{Q}. \qquad (2)$$

સ. ક. (1) ને સ. ક. (2) વડે ભાગતાં પ્રાપ્ત થશે કે

$$\frac{AC}{CB} = \frac{Q}{P}.$$

એટલે કે C ABને $Q{:}P$ના ગુણોત્તરમાં બાહ્ય બિન્દુએ છેદે છે. આપણે નીચેનું પરિણામ તારવી શકીએ:

બે વિજાતીય સમાન્તર બળો P અને Qનું પરિણામી બળ પણ એક સમાન્તર બળ છે; તેનું મહત્ત્વ $Q-P$ છે તે મોટા બળ Qની દિશામાં કાર્ય કરે છે અને તેની કાર્યરેખા આપેલાં બળો વચ્ચે દોરેલી કોઈ પણ છેદિકાને બાહ્ય-બિન્દુએ બળોનાં વ્યસ્ત પ્રમાણમાં ભાગે છે.

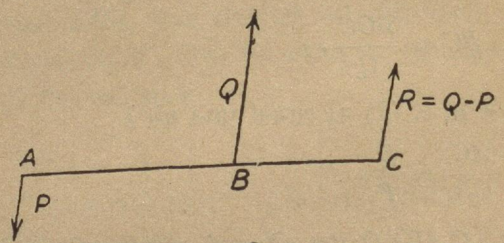
જો $Q=P$ હોય તો આપણી આ રચના પડી ભાંગે કારણ કે ત્યારે KA અને BH સમાન્તર થશે અને આપણને O બિન્દુ મળી શકશે નહિ. અને તેથી બે સમમહત્ત્વનાં વિજાતીય સમાન્તર બળોનું પરિણામી શોધવું શક્ય નથી. આવાં સમમહત્ત્વનાં વિજાતીય સમાન્તર બળોનું એક **યુગ્મ** બને છે તેમ કહેવાય છે. યુગ્મ બનાવતાં બે બળોનું પરિણામી બળ શોધવું શક્ય નથી. આવાં યુગ્મોનો અભ્યાસ ઘણો રસપ્રદ છે, પરંતુ આપણા આ સરળ પાઠયપુસ્તકની મર્યાદા બહાર છે.

ઉપપ્રમેય: બે વિષમ વિજાતીય સમાન્તર બળો P અને Qનું પરિણામી R છે. બળોની કાર્યરેખાને એક સુરેખા, અનુક્રમે, A, B અને Cમાં છેદે છે. સિદ્ધ કરો કે

$$\frac{P}{CB} = \frac{Q}{AC} = \frac{R}{AB}.$$

માનો કે બે બળમાંથી મહત્તર બળ Q છે. આપણે જાણીએ છીએ કે $R = Q - P$ અને

$$\frac{AC}{CB} = \frac{Q}{P}.$$



આકૃતિ ૩૪

એટલે કે $\frac{P}{CB} = \frac{Q}{AC} = \frac{Q-P}{AC-CB} = \frac{R}{AB}$.

૪. ઉદાહરણો.

(૧) 30 ગ્રા. વ. ના એક બળને એવા બે વિજાતીય સમાન્તર સંઘટકોમાં વિભાજીત કરો કે બે સંઘટકો વચ્ચેનું અન્તર 18 સેમી. હોય અને બેમાંથી મહત્તર સંઘટક આપેલા બળથી 8 સેમી. દૂર હોય.

આ. (૩૪) જુઓ. માનો કે સંઘટકો P અને Q છે. આગળ આવી ગયેલા ઉપપ્રમેય ઉપરથી પ્રાપ્ત થાય છે કે

$$\frac{P}{8} = \frac{Q}{26} = \frac{30}{18}$$

$$\therefore \quad P = \frac{8 \times 30}{18} = 13\tfrac{1}{3} \text{ ગ્રા. વ.}$$

$$Q = \frac{26 \times 30}{18} = 43\tfrac{1}{3} \text{ ગ્રા. વ.}$$

(૨) P અને Q બે સમાન્તર સજાતીય બળો છે. પોતાને સમાન્તર રાખીને x અંતર દૂર ખસેડવામાં આવે તો સિદ્ધ કરો કે P અને Qનું પરિણામી $\dfrac{Qx}{P+Q}$ અંતર ખસશે.

બળોને લંબ દોરેલી સુરેખા P, Q અને Rને જે બિન્દુઓમાં કાપે તેમને A, B અને C કહો. [**આ.** (૩૨) જુઓ]. ત્યારે

$$\frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{P+Q}{AB} \text{ અથવા } AC = \frac{Q}{P+Q}AB. \qquad (1)$$

હવે Q, B માંથી ખસીને B' માં જાય છે. $BB' = x$ અથવા $AB' - AB = x$. માનો કે પરિણામી C ઉપરથી ખસીને C' માં જાય છે. અને $CC' = d$ અથવા તો $AC' - AC = d$. આપણે આ d શોધવું છે.

ફરી આપણે ઉપપ્રમેયનો ઉપયોગ કરીને લખીશું કે

$$\frac{P}{B'C'} = \frac{Q}{AC'} = \frac{P+Q}{AB'}$$

$$\text{અથવા } AC' = \frac{Q}{P+Q}AB'. \qquad (2)$$

સ. ક. (2) માંથી સ. ક. (1) બાદ કરો.

$$\therefore \quad AC' - AC = \frac{Q}{P+Q}(AB' - AB)$$

$$\therefore \quad d = \frac{Qx}{P+Q}.$$

$\frac{P}{CB} = \frac{Q}{\ }$

મનોયત્ન IV(ક)

...ન્તર બળસંસ્થાઓનું સંઘટન કરીને પરિણામી શોધો.

માનો કે બે ...ને Q છે. અને તેમનાં કાર્યબિન્દુઓ A અને B છે.

$R = Q - P$ ... $= 6,\quad Q = 8,\quad AB = 2\frac{1}{3},\quad P, Q$ સજાતીય.

AC ... $P = 8,\quad Q = 6,\quad AB = 2\frac{1}{3},\quad P, Q$ વિજાતીય.

(iii) $P = 7,\quad Q = 5,\quad AB = 4{\cdot}5,\quad P, Q$ વિજાતીય.

(૨) બે સમાન્તર સજાતીય બળોનું પરિણામી 16 પા. વ. છે અને તે એક બળથી 2 ફૂ. ને અંતરે અને બીજા બળથી 6 ફૂ. ને અન્તરે કાર્ય કરે છે. આ બળોનાં મહત્ત્વ શોધી કાઢો.

(૩) બે વિજાતીય સમાન્તર બળોનું પરિણામી 6 પા. વ. છે અને બળોમાંના મોટા બળથી 10 ઈન્ચને અંતરે કાર્ય કરે છે. જો આ મોટા બળનું મહત્ત્વ 10 પા. વ. હોય તો બે બળો વચ્ચેનું અંતર શોધી કાઢો.

(૪) 6 ઈન્ચને અંતરે કાર્ય કરતાં 3 અને 5 પા. વ. નાં બે સમાન્તર બળોના પરિણામીનું મહત્ત્વ અને કાર્યરેખા નીચેના બન્ને વિકલ્પોમાં શોધી કાઢો. (૧) બળો સજાતીય છે (૨) બળો વિજાતીય છે.

(૫) બે માણસો 250 પા. વજનનો એક પત્થર એક 5 ફૂ. લાંબાં હળવાં પાટીઆં ઉપર ઊઠાવીને લઈ જાય છે. બેમાંનો વધારે મજબૂત માણસ 150 પા. વ. ઊઠાવી શકે છે. પત્થરને પાટીઆં ઉપર કઈ જગ્યાએ મૂકવો જોઈએ કે જેથી મજબૂત માણસને ભાગે પૂરતું વજન ઊઠાવવાનું આવે?

(૬) ત્રણ સમમહત્ત્વનાં સજાતીય સમાન્તર બળો એક ત્રિકોણનાં કોણીય બિન્દુઓ ઉપર કાર્ય કરે છે. સિદ્ધ કરો કે બળોનું પરિણામી ત્રિકોણના ગુરુત્વબિન્દુમાંથી પસાર થશે.

(૭) P અને Q એક દૃઢ પદાર્થ ઉપર A અને B બિન્દુએ કાર્ય કરતાં બે વિજાતીય સમાન્તર બળો છે.

જો P અને Qની સ્થિતિ અદલબદલ કરવામાં આવે તો સિદ્ધ કરો કે પરિણામીનું કાર્ય બિન્દુ AB સુરેખામાં d અંતર દૂર ખસે છે, જ્યાં

$$d = \frac{P \backsim Q}{P+Q} \cdot AB.$$

(૮) બે સમાન્તર સજાતીય બળો P અને Q એક દૃઢ પદાર્થનાં A અને B બિન્દુઓ ઉપર કાર્ય કરે છે. જો Qનું મહત્ત્વ બદલીને $\frac{P^2}{Q}$ બનાવવામાં આવે, તો સિદ્ધ કરો કે પરિણામીની કાર્યરેખા એ થશે કે જે P અને Qને અદલબદલ કરવાથી પ્રાપ્ત થાય.

(૯) ત્રણ સમાન્તર સજાતીય બળો એક ત્રિકોણ ABCનાં B, C અને A બિન્દુઓએ કાર્ય કરે છે. તેઓનાં મહત્ત્વ, અનુક્રમે, $\lambda b\cos C$, $\lambda c\cos B$ અને $\frac{\lambda a\cos B\cos C}{\cos A}$ છે. સિદ્ધ કરો કે તેમનું પરિણામી ત્રિકોણના લંબકેન્દ્રમાંથી પસાર થશે.

(૧૦) ત્રણ સમાન્તર સજાતીય બળો એક ત્રિકોણનાં કોણીય બિન્દુઓ પર કાર્ય કરે છે. જો તેમનાં મહત્ત્વ તે તે કોણની સામેની બાજુની લંબાઈના પ્રમાણમાં હોય તો સિદ્ધ કરો કે પરિણામી ત્રિકોણના અંતઃકેન્દ્રમાંથી પસાર થશે.

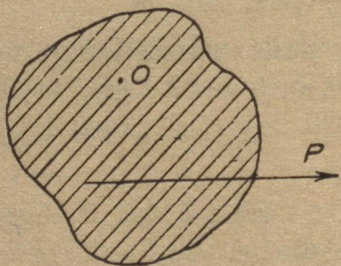
(૧૧) AB રેખા ઉપર C મધ્યબિન્દુ છે અને D કોઈ પણ બિન્દુ છે. AD અને BDનાં મધ્યબિન્દુઓ એ કાર્ય કરતાં બે સજાતીય સમાન્તર બળો P તથા Qનું પરિણામી Dમાંથી પસાર થાય છે. સાબિત કરો કે જો P તથા Qની કાર્યરેખાઓ પરસ્પર બદલવામાં આવે તો પરિણામી Cમાંથી પસાર થશે.

જવાબો :

(૧) (i) $R=14$, $AC=1\frac{1}{3}$. (ii) $R=2$, $AC=7$. (iii) $R=2$, $AC=11{\cdot}25$. (૨) 12, 4. (૩) 15. (૪) (i) 8 પા. વ., 5 પા. વ. ના બળથી 2·25 ને અન્તરે, (ii) 2 પા. વ., 5 પા. વ. નાં બળથી 9 ઈન્ચને અંતરે. (૫) મજબૂત માણસથી 2 ફૂ.ને અન્તરે.

૫. બળનું ભ્રામક.

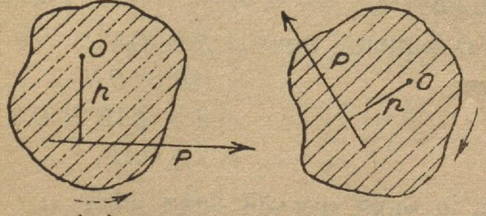
એક દૃઢ પદાર્થ ઉપર નિશ્ચિત દિશામાં કાર્ય કરતા બળ Pનો આપણે વિચાર કરીએ. આ બળના કાર્યને પરિણામે પદાર્થ બળની દિશામાં ગતિ પ્રાપ્ત કરશે. માની લો કે પદાર્થ ગતિ કરવા માટે સ્વતંત્ર નથી પરંતુ તેનું એક બિન્દુ O જડી દીધેલું છે. તે પરિસ્થિતિમાં પદાર્થ આગળ ગતિ કરશે? એ તે કેમ બને? કારણ કે O બિન્દુ જડી દીધેલું છે. તેથી તે બિન્દુ સ્થિર રહેશે. પરંતુ તેનો અર્થ એમ પણ ન થાય કે બળ Pની પદાર્થ ઉપર કાંઈ જ અસર નથી કારણ કે જરાક વિચાર કરતાં જણાશે કે જો કે પદાર્થ બળની દિશામાં અગ્રસર થઈ શકશે નહિ પરંતુ તે O બિન્દુની આસપાસ ફરવા લાગશે. બળ Pની અસર પદાર્થને O બિન્દુની આસપાસ પરિભ્રમણ આપવાની છે.



આકૃતિ ૩૫

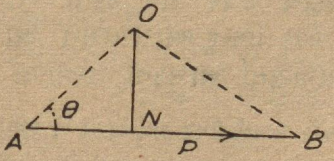
પદાર્થ ઉપર કાર્ય કરતું બળ પદાર્થને ગતિ આપવા પ્રયત્ન કરે છે. આ ગતિ બે પ્રકારની હોઈ શકે. એક તો પદાર્થ નિશ્ચિત દિશામાં અગ્રસર ગતિ પ્રાપ્ત કરે અથવા તો પદાર્થ કોઈ એક બિન્દુ આસપાસ પરિભ્રમણ કરે. નિશ્ચિત દિશામાં પ્રાપ્ત થતી અગ્રસર ગતિ તે બળનાં મહત્ત્વ અને દિશા ઉપર આધાર રાખે છે. નિશ્ચિત બિન્દુ આસપાસની પરિભ્રમણ ગતિ તે બળના એક બીજા ગુણધર્મ ઉપર આધાર રાખે છે. જેને આપણે બળની તે બિન્દુ આસપાસની ભ્રમણશકિત કે "ભ્રામક" કહીશું. આપેલા બિન્દુ આસપાસ એક બળનું ભ્રામક તે બળની તે બિન્દુની આસપાસ પરિભ્રમણ ઉત્પન્ન કરવાની વૃત્તિનું

માપ છે. ગણિતની દૃષ્ટિએ બળનું મહત્ત્વ અને આપેલ બિન્દુથી બળની કાર્ય-રેખાના લંબ અંતરના ગુણાકારથી આ ભ્રામક પ્રાપ્ત થાય છે.



આકૃતિ ૩૬

આ. (૩૬)માં P બળનું O બિન્દુ આસપાસનું ભ્રામક Pp છે. આપણે સર્વ પ્રથમ એ નોંધી લઈએ કે ઉપરની વ્યાખ્યા પ્રમાણે ભ્રામક એક નિર્દિશ સંજ્ઞા છે. અલબત્ત તે ધન અથવા ઋણ થઈ શકે. **આ.** (૩૬**क**)માં જણાશે કે બળ P O આસપાસ ઘડીઆળ વિરુદ્ધ દિશામાં પરિભ્રમણ ઉત્પન્ન કરવા પ્રયત્ન કરે છે. એવી પરિસ્થિતિમાં આપણે કહીશું કે Pનું O આસપાસનું ભ્રામક ધન $(+)$ છે. પરંતુ એવું પણ બને કે બળ P Oની આસપાસ ઘટિકાનુસારી પરિભ્રમણ ઉત્પન્ન કરવા પ્રયત્નશીલ હોય [**આ.** (૩૬**ख**) જુઓ]. તે સંયોગોમાં આપણે કહીશું કે બળ Pનું O આસપાસનું ભ્રામક ઋણ $(-)$ છે. આ રીતે **આ.** ૩૬(**क**)માં બળ Pનું O આસપાસનું ભ્રમક $+Pp$ છે. **આ.** ૩૬(**ख**) માં બળ Pનું O આસપાસનું ભ્રામક $-Pp$ છે.



આકૃતિ ૩૭

હવે આપણે એક બિન્દુ આસપાસના કોઈ બળના ભ્રામક માટે જુદી જુદી અભિવ્યકિતઓ પ્રાપ્ત કરીશું, જેથી સંયોગો અનુસાર સગવડ પડતી

અભિવ્યક્તિનો ઉપયોગ કરી શકાય. બળ P દર્શાવતી સુરેખા AB દોરો. આપણે બળનું O આસપાસનું ભ્રામક શોધવું છે. OA, OB જોડી દો અને $ON \perp AB$ દોરો.

$$
\begin{aligned}
P \text{ નું } O \text{ આસપાસનું ભ્રામક} &= P \times ON & (1)\\
&= AB \times ON\\
&= 2 \times \tfrac{1}{2} AB \times ON\\
&= 2\triangle OAB. & (2)
\end{aligned}
$$

અથવા તો આપણે બીજી રીતે આગળ વધીએ

$$
\begin{aligned}
P \text{ નું } O \text{ આસપાસનું ભ્રામક} &= P \times ON\\
&= P \times OA\sin\ \theta\\
&= OA + P\sin\ \theta\\
&= OA \times (P \text{ નો } OA \text{ ની લંબ}\\
&\quad \text{દિશામાં વિભાજીત અંશ}). & (3)
\end{aligned}
$$

(1), (2) અને (3) એ કોઈ બળ Pના O આસપાસના ભ્રામક માટેની અભિવ્યક્તિઓ છે અને જરૂર પડયે, યોગ્ય ધન અથવા તો ઋણ નિશાની સાથે તેમાંની કોઈ પણ અભિવ્યક્તિ વડે આ ભ્રામક આપણે દર્શાવી શકીએ. હવે આપણે બળોનાં ભ્રામક વિષે એક પ્રમેય સિદ્ધ કરીશું.

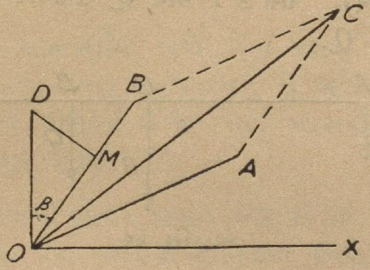
૬. ભ્રામકનું પ્રમેય.

કોઈ એક પદાર્થ ઉપર કાર્ય કરતાં બે સમતલ બળોનાં પરિણામીનું કોઇ એક બિન્દુ આસપાસનું ભ્રામક તે તે બળોનાં તે જ બિન્દુ આસપાસનાં ભ્રામકના સરવાળા બરાબર થાય.

P અને **Q** એક પદાર્થ ઉપર કાર્ય કરતાં બે બળો છે. અને **R** તેમનું પરિણામી છે. બન્ને બળો એક જ સમતલમાં છે. તેથી નીચેના બે વિકલ્પો ઉપસ્થિત થશે. બન્ને બળો એકબીજાને છેદે અથવા તો બન્ને બળો સમાન્તર હોય.

વિકલ્પ (૧). ધારો કે બન્ને બળો એકબીજાંને O બિન્દુમાં મળે છે.

બળ **P** દર્શાવવા માટે OA અને બળ **Q** માટે OB દોરો. સ. બા. ચ. કોણ $OACB$ પૂર્ણ કરો. વિકર્ણ OC પરિણામી **R** દર્શાવે છે. જે બિન્દુ આસપાસ ભ્રામક લેવાનાં છે તે બિન્દુને D કહો, OD જોડી દો. OA, OB અને OC ને OD જોડે α, β અને γ નો કોણ બનાવવા દો. $DM \perp OB$ દોરો.



આકૃતિ ૩૮

$$D \text{ આસપાસનું } Q \text{નું ભ્રામક} = Q \times DM$$
$$= Q \cdot OD \sin\beta.$$

એજ પ્રમાણે

$$D \quad ,, \quad P\text{નું} \quad ,, \quad = P \cdot OD \sin\alpha$$
$$D \quad ,, \quad R\text{નું} \quad ,, \quad = R \cdot OD \sin\gamma.$$

આપણે સિદ્ધ કરવું છે કે

$$P\text{નું ભ્રામક} + Q\text{નું ભ્રામક} = R\text{નું ભ્રામક}.$$

એટલે કે આપણે સિદ્ધ કરવું છે કે

$$P \cdot OD \sin\alpha + Q \cdot OD \sin\beta = R \cdot OD \sin\gamma.$$

એટલે કે

$$P \sin\alpha + Q \sin\beta = R \sin\gamma.$$

આપણે એ સિદ્ધ કરીશું. $OX \perp OD$ દોરો.

પછી $\quad Q$નો ODમાં વિભાજીત અંશ $= Q \cos\beta$

અને $\quad Q$નો OXમાં ,, ,, $= Q \sin\beta$.

એ જ રીતે Pનો OXમાં ,, ,, $= P \sin\alpha$

$\quad R$નો OXમાં ,, ,, $= R \sin\gamma$.

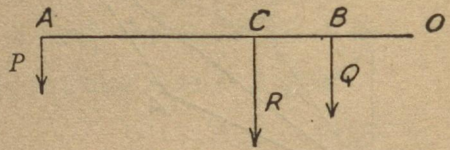
પરંતુ વિભાજીત અંશોના પ્રમેય પ્રમાણે

P નો વિ. અં. $+ Q$ નો વિ. અં. $= R$ નો વિ. અં.

$$\therefore \qquad P\sin\alpha + Q\sin\beta = R\sin\gamma.$$

અને બરાબર આ જ સૂત્ર આપણે સ્થાપિત કરવાનું હતું.

વિકલ્પ (૨). ધારો કે P અને Q સમાન્તર સજાતીય બળો છે. ત્યારે $R = P + Q$.



આકૃતિ ૩૯

O બિન્દુ આસપાસ ભ્રામક લેવાનાં છે. Oમાંથી બળોની કાર્યરેખાઓને લંબ એક સુરેખા દોરો. આ સુરેખા P, Q અને R ને A, B અને C માં છેદશે. આપણે જાણીએ છીએ કે

$$\frac{AC}{CB} = \frac{Q}{P} \text{ અથવા તો } P \cdot AC = Q \cdot CB. \qquad (1)$$

O ની આસપાસ ભ્રામક લેતાં

$$\begin{aligned} P \text{ નું ભ્રામક} + Q \text{ નું ભ્રામક} &= P \cdot OA + Q \cdot OB. \\ &= P\,(OC + CA) + Q\,(OC - CB) \\ &= (P + Q)\, OC + P \cdot CA - Q \cdot CB \\ &= R \cdot OC \text{ [આપણે અહિં સ. ક. (1) નો ઉપયોગ કર્યો છે.]} \\ &= R \text{ નું ભ્રામક.} \end{aligned}$$

P અને Q વિજાતીય સમાન્તર બળો હોય તે વિકલ્પમાં પણ પ્રમેય સિદ્ધ કરવું ઉપર જેટલું જ સરળ છે. કારણ કે આ વિકલ્પમાં બેમાંનું એક બળ ઋણ થઈ જાય છે પરંતુ સાથોસાથ O આસપાસનું તે બળનું ભ્રામક પણ ઋણ થઈ જશે અને તેથી અંતિમ પરિણામ એનું એ જ રહેશે.

૭. ભ્રામકનું વ્યાપક પ્રમેય.

બે બળો અને તેનું પરિણામી લઈને આપણે ભ્રામકનું પ્રમેય સાબિત કર્યું છે. પરંતુ અનેક બળો અને તેના પરિણામીને લાગુ પડે તેવી રીતે તે પ્રમેયને વ્યાપક રૂપ પણ આપી શકીએ. આપણે એ વ્યાપક પ્રમેયની પ્રતિજ્ઞા અહિં આપીશું.

જો અનેક સમતલીય બળો એક પદાર્થ ઉપર કાર્ય કરે તો સમતલનાં કોઈ બિન્દુ આસપાસનું તે બળોનાં પરિણામીનું ભ્રામક એ તે તે બળોનાં તે જ બિન્દુ આસપાસનાં ભ્રામકોના સરવાળા બરાબર થાય.

ભ્રામકના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરવાની જરૂર પડે તેવા બે પ્રકારના પ્રસંગો ઉપસ્થિત થઈ શકે. (૧) પદાર્થોની સમતુલાના પ્રસંગે (૨) પરિણામીની કાર્યરેખા પરનું કોઈ એક બિન્દુ શોધવા પ્રસંગે.

(૧) સમતુલાનો પ્રસંગઃ

જ્યારે પદાર્થ સમતુલિત હોય ત્યારે તેની ઉપર કાર્ય કરતાં બળોનું પરિણામી શૂન્ય થશે. તેથી તે પરિણામીનું કોઈ પણ બિન્દુ આસપાસનું ભ્રામક પણ શૂન્ય થશે તેથી સર્વે કાર્ય કરતાં બળોનાં કોઈ પણ એક બિન્દુ આસપાસનાં ભ્રામકોનો સરવાળો પણ શૂન્ય થશે. આ રીતે જ્યારે એક પદાર્થ સમતુલામાં હોય ત્યારે આપણે પદાર્થ ઉપર કાર્ય કરતાં બળોનાં ભ્રામક લઈ, પ્રત્યેક ભ્રામકને યોગ્ય ધન અથવા ઋણ નિશાની આપી, તેનો સરવાળો કરીને તે સરવાળાને શૂન્ય બરાબર મૂકી શકીએ.

(૨) પરિણામીની કાર્યરેખા ઉપરનું કોઈ એક બિન્દુ O શોધવું:

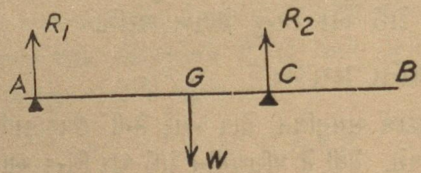
જો પરિણામી O માંથી પસાર થાય તો Oમાંથી પરિણામી ઉપરનો લંબ શૂન્ય થશે, અને તેથી પરિણામીનું O આસપાસનું ભ્રામક ફરી પાછું શૂન્ય થઈ જશે તેથી સઘળાં બળોનાં O આસપાસનાં ભ્રામકોનો સરવાળો પણ શૂન્ય થઈ જશે. આ રીતે જો આપણે એમ સિદ્ધ કરવું હોય કે આપેલા બળસમૂહનું પરિણામી કોઈ એકાદ O બિન્દુમાંથી પસાર થાય છે તો આપણે પહેલાં તો પ્રત્યેક બળનું

O આસપાસનું ભ્રામક કાઢીશું. પછી તે સર્વ ભ્રામકોનો સરવાળો કરીશું. અને પછી સિદ્ધ કરીશું કે એ સરવાળો શૂન્ય થાય છે.

ભ્રામકના પ્રમેયના જુદા જુદા ઉપયોગ દર્શાવતાં કેટલાંક ઉદાહરણો હવે આપણે લઈએ.

૮. ઉદાહરણો.

(૧) એક 4 ફૂ. લાંબો સમાન પાટડો ક્ષૈતિજ સ્થિતિમાં બે ટેકા વડે ટેકવવામાં આવેલો છે. ટેકાઓ એકબીજાથી 3 ફૂ.ને અન્તરે મૂકેલા છે. અને પાટડો તેમાંના એક ટેકા આગળથી 1 ફૂ. બહાર નીકળે છે. સિદ્ધ કરો કે એક ટેકાં ઉપરનું દબાણ બીજા ઉપરના દબાણ કરતાં બમણું છે.



આકૃતિ ૪૦

AB પાટડો છે. પાટડો સમાન છે તેથી તેનું વજન W તેનાં મધ્યબિન્દુ Gમાં કાર્ય કરશે. ટેકાઓ A અને C નીચે મૂકેલા છે. પાટડો ટેકા ઉપર નીચેની દિશામાં દબાણ કરે છે. તેથી ટેકાઓ તરફથી પાટડા ઉપર, ઉપરની લંબક દિશામાં તે તે દબાણને સમમહત્ત્વની પ્રતિક્રિયા થશે. આ પ્રતિક્રિયાઓનાં મહત્ત્વ R_1 અને R_2 માની લો. ત્રણ બળો W, R_1 અને R_2 નાં કાર્ય નીચે પાટડો સ્થિર રહે છે તેથી કોઈ પણ બિન્દુ આસપાસનાં બળોનાં ભ્રામકોનો સરવાળો શૂન્ય થવો જોઈએ. ચાલો ત્યારે A આસપાસ ભ્રામક લઈએ.

A આસપાસનું R_1 નું ભ્રામક $= R_1 \times 0 = 0$

A ,, Wનું ,, $= -W \times 2$

A ,, R_2નું ,, $= +R_2 \times 3.$

$$\therefore \quad -2W + 3R_2 = 0 \text{ અથવા } R_2 = \frac{2W}{3} \tag{1}$$

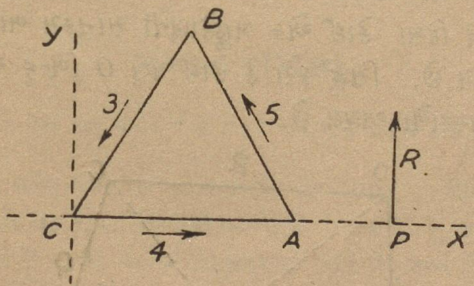
હવે C આસપાસ ભ્રામક લો.

$$-R_1 \times 3 + W \times 1 = 0 \quad \therefore \quad R_1 = \frac{W}{3} \tag{2}$$

(1) અને (2) ઉપરથી તરત જ જણાઈ આવશે કે

$$R_2 = 2R_1.$$

(૨) એક નિયમિત ત્રિકોણ ABC ની BC, CA અને AB બાજુઓમાં અનુક્રમે 3, 4 અને 5 પા. વ. નાં બળો કાર્ય કરે છે. સિદ્ધ કરો કે તેઓનું પરિણામી CA ને લંબ દિશામાં કાર્ય કરે છે અને તેને બહારની બાજુએ 5:3 ના ગુણોત્તરમાં ભાગે છે. પરિણામીનું મહત્ત્વ પણ શોધી કાઢો.



આકૃતિ ૪૨

પરિણામીનું મહત્ત્વ અને દિશા વિભાજીત અંશોની પદ્ધતિથી શોધી શકાશે જ્યારે તેની કાર્યરેખા CAને જે બિન્દુમાં કાપે છે તે બિન્દુ ભ્રામકના પ્રમેયથી શોધી શકાશે. બળોને CX દિશામાં વિભાજીત કરો. તેમ કરતાં આપણને X મળશે.

$$X = 4 - \tfrac{5}{2} - \tfrac{3}{2} = 0.$$

CY ની દિશામાં બળોને વિભાજીત કરી Y મેળવો.

$$Y = \frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

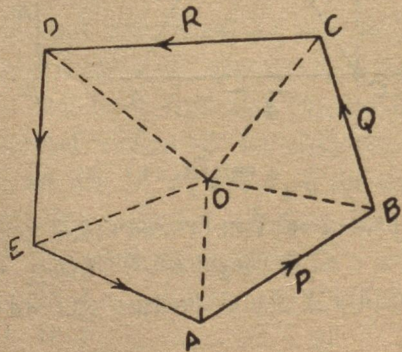
$\therefore$ પરિણામીનું મહત્ત્વ $\sqrt{3}$ છે અને તે CYને સમાન્તર દિશામાં કાર્ય કરે છે. એટલે કે CAને $\perp$ દિશામાં કાર્ય કરે છે. ધારો કે પરિણામીની કાર્યરેખા CAને લંબાવતાં તેને P બિન્દુમાં કાપે છે તો પછી P પરિણામી ઉપર આવેલું છે. તેથી પરિણામીનું P આસપાસનું ભ્રામક શૂન્ય થશે. એટલે કે બળોનાં P આસપાસનાં ભ્રામકનો સરવાળો શૂન્ય થશે.

$$\therefore \quad -5 \times AP \sin 60^\circ + 3 \times PC \sin 60^\circ = 0$$

$$\therefore \quad \frac{CP}{PA} = \frac{5}{3}.$$

એટલે કે P, ACને, બહારની બાજુએ 5:3 ના ગુણોત્તરમાં ભાગે છે.

(૩) એક સમતલમાં કાર્ય કરતી બળસંસ્થાનાં બળોનાં મહત્ત્વ અને દિશા કોઈ એક બહુકોણની સાનુક્રમ બાજુઓ વડે દર્શાવી શકાય છે. સિદ્ધ કરો કે કોઈ પણ O બિન્દુ આસપાસનાં ભ્રામકનો સરવાળો અચલ છે.



આકૃતિ ૪૨

P, Q, R, S,...એ બળસંસ્થાનાં બળો છે. બળો $ABCD$...બહુ-કોણની બાજુઓ વડે દર્શાવાયાં છે જેથી

P = AB, Q = BC, R = CD...કોઈ બિન્દુ O આસપાસ આપણે ભ્રામક લઈશું.

O આસપાસનું Pનું ભ્રામક $= 2\ \triangle OAB$

O ,, Qનું ,, $= 2\ \triangle OBC$

. . . .

. . . .

આ રીતે સર્વ ભ્રામકોનો સરવાળો કરતાં માલૂમ પડશે કે

O આસપાસનાં ભ્રામકનો સરવાળો

$= 2\ \triangle OAB + 2\ \triangle OBC + 2\ \triangle OCD + \dots$

$= 2 \times$ બહુકોણ $ABCD\dots$

$=$ Oની સ્થિતિથી સ્વતંત્ર એવી અચલ સંખ્યા.

મનોયત્ન IV(ख).

(નોંધ : કોઈ પણ સમાન દંડનું વજન તેના મધ્યબિન્દુએ કાય કરે છે.)

(૧) 8 ફૂ. લાંબો અને 10 પા. વજનનો એક સમાન દંડ ક્ષૈતિજ સ્થિતિમાં તેના બે છેડા ઉપર ટેકવવામાં આવ્યો છે. જો 4 પા. નું વજન તેના એક છેડાથી 2 ફૂ. ને અન્તરે લટકાવવામાં આવે તો બન્ને ટેકાઓ ઉપરનાં દબાણ શોધી કાઢો.

(૨) 8 પા. વજનનો એક સમાન દંડ તેના બે છેડાઓ A અને B એ બાંધેલી બે લંબક દોરી વડે ક્ષૈતિજ સ્થિતિમાં લટકાવેલો છે. એક 2 પા. નું વજન C બિન્દુએ બાંધેલું છે, $AC = \frac{1}{4}AB$. A માં બાંધેલી દોરીનો તણાવ શોધો.

જો 2 પા.નું વજન Cમાંથી ઊઠાવીને Aમાં બાંધવામાં આવે તો એ જ દોરીનો નવો તણાવ શોધો.

(૩) એક સમાન દંડ AB ના A અને B છેડા ઉપરથી W અને W' વજનના બે પદાર્થો લટકાવવામાં આવ્યા છે. જો દંડ તેના O બિન્દુ ઉપર સમતુલિત રહી શકે અને $OA = a$ તથા $OB = b$ હોય તો સિદ્ધ કરો કે દંડનું વજન

$$\frac{2\ (Wa - W'b)}{b - a} \text{ છે.}$$

(૪) 5, 3 અને 2 પા. વજનનાં બળો એક સમચોરસ $ABCD$ ની અનુક્રમે BC, DC, DA બાજુઓમાં કાર્ય કરે છે. બતાવો કે તેના પરિણામીની કાર્યરેખા AB ને ત્રિભાગે છે.

(૫) 4 ફૂ. લાંબી બાજુવાળા એક સમચોરસ $ABCD$ ની AB, BC, CD અને DA બાજુઓમાં અનુક્રમે 4, 6, 2 અને 4 પાઉન્ડ વજનનાં બળો કાર્ય કરે છે. બળોનાં પરિણામીનું મહત્ત્વ શોધો અને તેની કાર્યરેખા ABને કયા બિન્દુમાં કાપે છે તે પણ શોધી કાઢો.

(૬) એક ત્રિકોણ ABC ની BC, CA અને AB બાજુઓ અનુક્રમે 5, 12 અને 13 ફૂ. છે. C ઉપર કાર્ય કરતા એક બળનાં A અને B આસપાસનાં ભ્રામક અનુક્રમે 144 અને 60 છે. આ બળનું મહત્ત્વ શોધો અને સિદ્ધ કરો કે તે કોણ ACB ના બાહ્ય દુભાજકની દિશામાં કાર્ય કરે છે.

(૭) વર્તુળના વ્યાસ AB સાથે સમાન કોણ બનાવતી બે જીવાઓ BP તથા BQ દોરવામાં આવી છે. સાબિત કરો કે BP તથા BQ વડે દર્શાવાતાં બળોનાં A આસપાસનાં ભ્રામકનો સરવાળો શૂન્ય થશે.

(૮) જેનું વજન 50 પાઉન્ડ છે એવો એક ભારે સમાન પાટડો તેને છેડે બાંધેલી બે લંબક દોરીઓ વડે ક્ષૈતિજ સ્થિતિમાં લટકાવેલો છે. પ્રત્યેક દોરી તૂટયા વગર વધુમાં વધુ 35 પા. વજનનો તણાવ સહન કરી શકે છે. 10 પાઉન્ડનું એક વધારાનું વજન પાટડા ઉપર કયાં મૂકવું જોઈએ કે જેથી બેમાંની એક દોરી તૂટવાની અણી ઉપર આવે?

(૯) 4 ફૂ. લાંબો એક સમાન દંડ AB 2 ફૂ. અન્તરે આવેલી બે ખીંટીઓ P અને Q ઉપર વ્યવસ્થિત રીતે, તેનું મધ્યબિન્દુ ખૂંટીઓ વચ્ચેના અન્તરના મધ્યબિન્દુ ઉપર બરાબર આવે તેમ ગોઠવેલો છે. જ્યારે દંડના A છેડા ઉપર 10 પા. નું વજન લટકાવવામાં આવે છે ત્યારે તે P ખીંટીની આસપાસ ઉથલી પડવાની અણી ઉપર આવે છે તો દંડનું વજન શોધો. વળી હવે B છેડા ઉપર શું વજન લટકાવવું જોઈએ કે જેથી દંડ Q ખીંટી આસપાસ ઉથલી પડવાની અણી ઉપર આવે?

(૧૦) 18 ફૂ. લાંબાં અને 200 પા. વજનનાં એક પાટીઆંનો થોડો ભાગ વહાણની બાજુ ઉપરથી દરીઆમાં બહાર નીકળે છે. બહાર પડતા ભાગની લંબાઈ 8 ફૂ. છે. પાટીઆંના વહાણની અંદરના છેડે 100 પાઉન્ડનું એક વજન બાંધવામાં આવેલું છે. સિદ્ધ કરો કે 150 પા. વજનનો એક માણસ પાટીઆં ઉપર એક છેડેથી બીજા છેડા સુધી, સમુદ્રમાં ઉથલી પડયા વગર હરીફરી શકશે.

(૧૧) AB, BC અને $2CA$ વડે દર્શાવાતાં બળો અનુક્રમે એક સમભુજ ત્રિકોણ ABCની બાજુઓમાં કાર્ય કરે છે તેઓનાં પરિણામીનાં મહત્ત્વ, દિશા અને કાર્યરેખા શોધી કાઢો.

(૧૨) કોઈ એક ત્રિકોણ ABC (જેમાં $AB = 24''$, $BC = 25''$ અને $CA = 7''$ છે) ની AB, BC અને CA બાજુઓમાં અનુક્રમે 8, 25 અને 15 પા. વજનનાં બળો કાર્ય કરે છે. સિદ્ધ કરો કે તેઓના પરિણામીનું મહત્ત્વ $8\sqrt{5}$ પા. વ. છે અને તેની કાર્યરેખા લંબાવેલી BAને Aથી 21 ઈન્ચને અંતરે આવેલા બિન્દુએ છેદે છે.

(૧૩) લંબચોરસ $ABCD$ માં $AB = 6$ ફૂ. અને $BC = 4$ ફૂ. છે તથા E CDનું મધ્યબિન્દુ છે. 1, 2, 6, 10 તથા 5 પા. વ.નાં બળો અનુક્રમે AB, BC, CD, DA તથા AE માં કાર્ય કરે છે. તેમનું પરિણામી શોધો અને પરિણામી AB તથા AD ને જે બિન્દુઓમાં છેદશે તે બિન્દુનાં સ્થાન શોધો.

(૧૪) એક સમતલ ચતુષ્કોણ $ABCD$ માં $AB = 2$, $BC = 2\sqrt{3}$, $CD = 4$ અને કોણ $ABC = 150°$, કોણ $BCD = 90°$. 4, $\sqrt{3}$ અને 5 પા. વ. મહત્ત્વનાં બળો AB, BC તથા CDમાં અનુક્રમે કાર્ય કરે છે. પરિણામી બળનું મહત્ત્વ શોધો અને સાબિત કરો કે તેની દિશા AD ને સમાન્તર છે. પરિણામીની કાર્યરેખાનું A થી અન્તર શોધો.

(૧૫) ત્રિકોણ ABCની BC બાજુ ઉપર D કોઈ એક બિન્દુ છે. AB અને AC દિશામાં કાર્ય કરતાં P અને Q નું પરિણામી AD દિશામાં કાર્ય કરે છે. સિદ્ધ કરો કે

$$\frac{P}{Q} = \frac{AB}{BD} \cdot \frac{DC}{AC}.$$

(૧૬) P, Q અને R મહત્ત્વનાં બળો, ત્રિકોણ ABC ની BC, CA અને AB બાજુઓમાં કાર્ય કરે છે. સાબિત કરો કે જો તેઓનું પરિણામી ત્રિકોણના પરિકેન્દ્રમાંથી પસાર થાય તો

$$P\cos A + Q\cos B + R\cos C = 0.$$

(૧૭) સિદ્ધ કરો કે કોઈ પણ બળ $\mathbf{P}$ નાં A અને B બિન્દુઓ આસપાસનાં ભ્રામકનો તફાવત તે બેમાંનાં કોઈ એક બિન્દુએ કાર્ય કરતા $\mathbf{P}$ને સમાન બળના બીજા બિન્દુ આસપાસના ભ્રામક બરાબર થાય.

(૧૮) સાબિત કરો કે જો કોઈ એક બળસંસ્થાનાં કોઈ બિન્દુ A આસપાસનાં ભ્રામકનો સરવાળો શૂન્ય થાય, તેવી જ રીતે બીજાં કોઈ બિન્દુ B આસપાસનાં ભ્રામકનો સરવાળો પણ શૂન્ય થાય તો તે સરવાળો AB ઉપરનાં કોઈ પણ બિન્દુ આસપાસ પણ શૂન્ય થશે.

(૧૯) $OABC$, 1 ફૂ. બાજુવાળો એક સમચોરસ છે. 6, 9, 8 અને 4 પા. વ. નાં બળો અનુક્રમે OA, AB, CB અને CO રેખાઓમાં કાર્ય કરે છે. તેમનું પરિણામી OA તથા OC ને જે બિન્દુઓમાં છેદે તે બિન્દુઓનાં O થી અન્તર શોધો. P એક એવું બિન્દુ લો કે જેની આસપાસ બળોના ભ્રામકનો સરવાળો શૂન્ય થાય; હવે OC અને OA ને અક્ષો તરીકે લેતાં Pના યામ (x, y) થાય તો x અને y વચ્ચેનો સંબંધ શોધો.

જવાબો :

(૧) 8, 6 પા. વ. (૨) 5·5, 6 પા. વ. (૫) Aથી 16 ફૂ. ને અન્તરે. (૬) $12\sqrt{2}$. (૮) પાટડાને એક છેડે. (૯) 10 પા., 40 પા. (૧૧) પરિણામી CA ને સમાન અને સમાન્તર છે તથા લંબાવેલી BC ને D માં છેદે છે જ્યાં $BC = CD$. (૧૩) $2\sqrt{5}$ પા. વ., 9 ફૂ., 18 ફૂ. (૧૪) 6 પા. વ., $8/\sqrt{3}$. (૧૯) $\frac{1}{5}$ ફૂ. $\frac{1}{14}$ ફૂ. $5x - 14y = 1$.

પ્રકરણ ૪

ગુરુત્વકેન્દ્ર

૧. પ્રાસ્તાવિક.

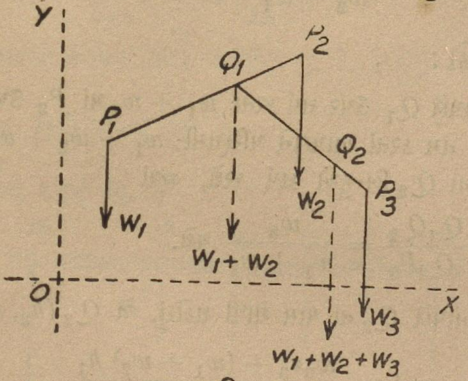
કોઈ પણ પદાર્થ ઉપર કાર્ય કરતું એક સર્વસાધારણ બળ તે પદાર્થનું વજન છે. આ પ્રકરણમાં, આપણે પદાર્થના વજન તથા પદાર્થના જે બિન્દુએ આ વજન કાર્ય કરે છે તે બિન્દુ વિષેનો વ્યવસ્થિત અભ્યાસ કરીશું.

પ્રત્યેક દ્રવ્યમય કણને પૃથ્વી પોતાના તરફ આકર્ષે છે. આ આકર્ષણનું બળ તે કણનું વજન. આ બળની દિશા પૃથ્વીના કેન્દ્ર તરફની છે. હવે કોઈ પણ પદાર્થને અનેક નાનાં નાનાં કણોમાં વિભાજીત કરી શકાય. આમાંનું પ્રત્યેક કણ પૃથ્વીના કેન્દ્ર તરફ આકર્ષાય છે. પરંતુ પૃથ્વીનું કેન્દ્ર તો, જે પદાર્થો સાથે આપણે સંબંધ છે તેમનાં માપના પ્રમાણમાં, ઘણું દૂર આવેલું છે. તેથી આ આકર્ષણબળો ઘણે દૂર આવેલા બિન્દુએ એકબીજાંને મળે છે. આપણે આ બળોને સમાન્તર ગણીશું. આ રીતે પદાર્થનાં ભિન્નભિન્ન કણો ઉપર તેમનાં વજન કાર્ય કરે છે. આ વજનો સજાતીય સમાન્તર બળસંસ્થા બનાવે છે. આ સજાતીય સમાન્તર બળોનું પરિણામી તે તે પદાર્થનું કુલ વજન કહેવાય છે; અને જે બિન્દુએ તે પરિણામી કાર્ય કરે છે તેને પદાર્થનું ગુરુત્વકેન્દ્ર (ગુ. કે.) કહે છે.

૨. ગુ. કે. ના યામ માટેનાં સામાન્ય સૂત્રો.

એક જ સમતલમાં રહેલાં અનેક કણોની આપણે ચર્ચા કરીશું. બે સગવડ પડતી લંબ રેખાઓ OX અને OYને અક્ષ તરીકે પસંદ કરો. પ્રત્યેક પદાર્થને અનેક નાનાં રજકણોમાં વિભાજીત કરી શકાય. એટલે આપણે એક કણના સમૂહનાં ગુરુત્વકેન્દ્રના યામ માટેનાં સૂત્રો શોધીશું.

કણનાં વજન w_1, w_2, w_3......w_n છે. અને તેમની સ્થિતિ P_1 (x_1, y_1), P_2 (x_2, y_2), P_3 (x_3, y_3)......બિન્દુઓ દર્શાવે છે. સઘળાં કણનાં વજન લંબક દિશામાં કાર્ય કરતાં હોવાને લીધે સમાન્તર સજાતીય બળો બને છે. આપણે તે બળોનું પરિણામી તબક્કા વાર કાઢીશું.

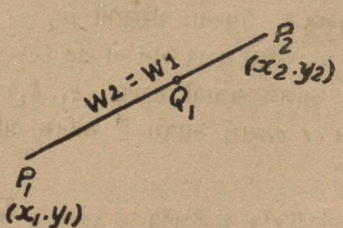


આકૃતિ ૪૩

પહેલો તબક્કો :

P_1 ઉપરના w_1 અને P_2 ઉપરના w_2 નું પરિણામી $w_1 + w_2$ થશે અને તે P_1P_2 ઉપરનાં Q_1 બિન્દુએ કાર્ય કરશે, જ્યાં

$$\frac{P_1Q_1}{Q_1P_2} = \frac{w_2}{w_1} \text{ થશે.}$$



આકૃતિ ૪૩(क)

આ. ૪૩(क) માંથી આપણે Q_1 નાં યામ શોધી શકીશું. જો Q_1 (h_1, k_1) હોય તો

$$h_1 = \frac{w_2x_2 + w_1x_1}{w_2 + w_1},$$

$$k_1 = \frac{w_2y_2 + w_1y_1}{w_2 + w_1}.$$

બીજો તબક્કો :

હવે આપણે Q_1 ઉપર કાર્ય કરતા $w_1 + w_2$ માં P_3 ઉપર કાર્ય કરતું w_3 ઉમેરીશું. તેમ કરતાં આપણને પરિણામી $w_1 + w_2 + w_3$ મળશે જે Q_1P_3 ઉપરના Q_2 બિન્દુએ કાર્ય કરશે, જ્યાં

$$\frac{Q_1Q_2}{Q_2P_3} = \frac{w_3}{w_1 + w_2} \text{ થશે.}$$

વળી પાછા આપણે Q_2 નાં યામ શોધી શકીશું. જો $Q_2\,(h_2, k_2)$ હોય તો

$$h_2 = \frac{w_3x_3 + (w_1 + w_2)\,h_1}{w_3 + w_2 + w_1}$$

$$= \frac{w_3x_3 + w_1x_1 + w_2x_2}{w_1 + w_2 + w_3}$$

એ જ પ્રમાણે $$k_2 = \frac{w_1y_1 + w_2y_2 + w_3y_3}{w_1 + w_2 + w_3}.$$

સાધારણીકરણ : ઉપરના પરિણામી $w_1 + w_2 + w_3$ માં હવે P_4 ઉપર કાર્ય કરતું w_4 ઉમેરી શકાય અને એ રીતે દરેક કણને આવરી લેવાય ત્યાં સુધી આ વિધિ આગળ ચલાવી શકાય. (h_1, k_1) અને (h_2, k_2) ની કિંમતો ઉપરથી તરત જ જણાઈ આવશે કે અંતિમ પરિણામી $G\ (h, k)$ બિન્દુએ કાર્ય કરશે:

$$h = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 + \dots}{w_1 + w_2 + w_3 + \dots} = \frac{\Sigma w_r x_r}{\Sigma w_r},$$

$$k = \frac{w_1y_1 + w_2y_2 + \dots}{w_1 + w_2 + \dots} = \frac{\Sigma w_r y_r}{\Sigma w_r}.$$

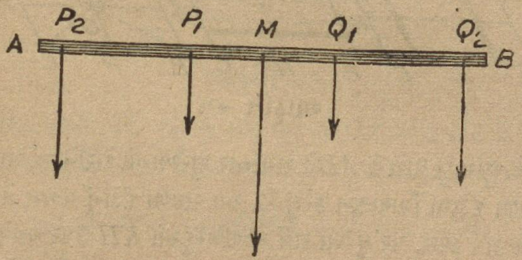
G એ કણસમૂહનું ગુરુત્વકેન્દ્ર છે. Gનાં યામ માટે આપણે h, k વાપર્યા છે, પરંતુ સામાન્ય રીતે તેમને માટે $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ સંકેતોનો ઉપયોગ થાય છે. એક કણ સમૂહનાં ગુ. કે. નાં યામ $(\bar{x}, \bar{y})$ માટેનાં સામાન્ય સૂત્રો આ રહ્યાં—

$$\bar{x} = \frac{\Sigma w_r x_r}{\Sigma w_r},\ \bar{y} = \frac{\Sigma w_r y_r}{\Sigma w_r}.$$

હવે આપણે કેટલાક સાદા પદાર્થોનું ગુ. કે. શોધીશું.

૩. ખાસ પદાર્થોનાં ગુ. કે.

(૧) સમાન દંડનું ગુ. કે.



આકૃતિ ૪૪

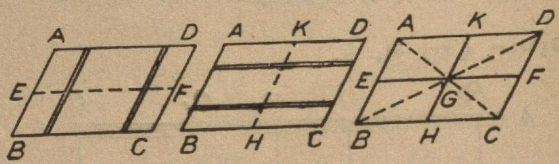
AB આપેલો સમાન દંડ છે. M તેનું મધ્યબિન્દુ છે. દંડને અનેક નાનાં કણોમાં વિભાજીત કરો. તેમાંનું P_1 માં રહેલું કણ લો. ધારો કે તેનું વજન w_1 છે.

હવે દંડ સમાન છે એટલે આપણને મધ્યબિન્દુ Mની બીજી બાજુએ P_1 જેટલે જ અંતરે આવેલા બિન્દુ Q_1 ઉપર સમાન વજનનું (એટલે કે w_1 વજનનું) કણ મળી શકશે અને P_1 ઉપરના w_1 અને Q_1 ઉપરના w_1નું પરિણામી $P_1 Q_1$ ના મધ્યબિન્દુ M માંથી પસાર થશે.

આ રીતે Mની ડાબી બાજુ આવેલા પ્રત્યેક કણના અનુસંધાનમાં Mની જમણી બાજુએ સરખા જ વજનનું અને સરખે જ અંતરે આવેલું એક કણ મળી રહેશે. અને આવાં બે કણોનું પરિણામી વજન મધ્યબિન્દુ Mમાંથી પસાર થશે એટલે કે દંડનું કુલ વજન તેના મધ્યબિન્દુમાંથી પસાર થશે. **સમાન દંડનું ગુ. કે. એ તેનું મધ્યબિન્દુ છે.**

(૨) સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણના આકારના પટલનું ગુ. કે.

આ. (૪૫)માં સ. બા. ચ. કોણ $ABCD$ આપેલું પટલ છે. E, H, F અને K AB, BC, CD, DAનાં મધ્યબિન્દુઓ છે. ABને સમાન્તર દોરેલી રેખાઓ વડે સ. બા. ચ. કોણને અનેક પાતળા દંડોમાં વિભાજીત કરો. આ સર્વ દંડોનું વજન તેમનાં અનુક્રમ મધ્યબિન્દુઓએ કાર્ય કરશે. પરંતુ આ બધાં મધ્યબિન્દુઓ EF ઉપર આવેલાં છે. માટે આખા સ. બા. ચ. કોણનું વજન EF ઉપરના એકાદ બિન્દુએ કાર્ય કરતું હોવું જોઈએ.



આકૃતિ ૪૫

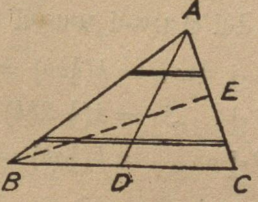
એ જ પ્રમાણે ધારો કે ADને સમાન્તર સુરેખાઓ દોરીને સ. બા. ચ. કોણને અનેક પાતળા દંડોમાં વિભાજીત કરેલું છે. આ સઘળા દંડોનું વજન તેમનાં મધ્યબિન્દુઓએ કાર્ય કરશે. પરંતુ આ સર્વ મધ્યબિન્દુઓ KH ઉપર આવેલાં છે તેથી આખાયે સ. બા. ચ. કોણનું વજન KH ઉપર કોઈક બિન્દુએ કાર્ય કરતું હોવું જોઈએ. અને તેથી તે EF અને KHનાં છેદનબિન્દુએ કાર્ય કરતું હોવું જોઈએ. પરંતુ EF અને KHનું છેદનબિન્દુ એટલે સ. બા. ચ. કોણના વિકર્ણોનું છેદનબિન્દુ. આ રીતે **સ. બા. ચ. કોણનું ગુ. કે. તેના વિકર્ણોના છેદનબિન્દુએ છે.**

(૩) સમાન ત્રિકોણીય પટલનું ગુ. કે.

ABC આપેલું ત્રિકોણીય પટલ છે. BCને સમાન્તર દોરેલી સુરેખાઓ વડે પટલને અનેક પાતળા દંડોમાં વિભાજીત કરો. આવા પ્રત્યેક દંડનું વજન તેના મધ્યબિન્દુએ કાર્ય કરશે. આ સઘળા દંડોનાં મધ્યબિન્દુઓ મધ્યગા AD ઉપર પડશે તેથી આખા પટલનું ગુ. કે. AD ઉપર કોઈક જગ્યાએ આવેલું હોવું જોઈએ. એ જ પ્રમાણે સિદ્ધ થઈ શકે કે આ ગુ. કે. બીજી મધ્યગા BE ઉપર પણ હોવું જોઈએ. એટલે કે ત્રિકોણનું વજન તેની મધ્યગાઓનાં છેદનબિન્દુએ કાર્ય કરતું

હોવું જોઈએ. એટલે જ તો ભૂમિતિમાં મધ્યગાઓના છેદનબિન્દુનું નામ ગુરુત્વ-કેન્દ્ર કે ગુરુત્વમધ્યબિન્દુ આપેલું છે.

આ ઉપરથી નીચેનું પ્રમેય તરત ફલિત થશે. **એક w વજનના ત્રિકોણીય પટલનું ગુ. કે. એટલે ત્રણ સમાન વજનનાં (પ્રત્યેકનું વજન $= w/3$) ત્રિકોણનાં શિરોબિન્દુએ મૂકેલાં કણોનું ગુ. કે.**



આકૃતિ ૪૬

સગવડ પડતી કોઈ પણ બે લંબ સુરેખા OX અને OY ને અક્ષ તરીકે પસંદ કરો, અને પછી માનો કે ત્રિકોણનાં શિરોબિન્દુઓ $A\ (x_1, y_1)\ B\ (x_2, y_2)$ અને $C\ (x_3, y_3)$ છે. જ્યારે આપણી પાસે A, B અને C ઉપર $\frac{w}{3}$ વજનનાં કણ હોય ત્યારે તેના ગુ. કે. માટેનાં સૂત્રો પરથી માલૂમ પડશે કે

$$\bar{x} = \frac{\frac{1}{3}wx_1 + \frac{1}{3}wx_2 + \frac{1}{3}wx_3}{\frac{1}{3}w + \frac{1}{3}w + \frac{1}{3}w}$$

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \text{ એ જ પ્રમાણે } \bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3};$$

એટલે કે $(\bar{x}, \bar{y})$ એ ત્રિકોણનું ગુરુત્વમધ્યબિન્દુ થયું. તેથી જ તો શિરોબિન્દુ ઉપર મૂકેલાં ત્રણ સમાન કણોનું ગુ. કે. એ જ ત્રિકોણીય પટલનું ગુ. કે. આ પ્રમેયનો આપણે નીચેના ઉદાહરણમાં તરત જ ઉપયોગ કરીશું.

(૪) સમલંબચતુષ્કોણનું ગુ. કે.

$ABCD$ સમલંબચતુષ્કોણ આકારનું એક પટલ છે. $AD \parallel BC$. AD અને BCનાં મધ્યબિન્દુઓને E અને F કહો. BE અને CE ને જોડી દો. આમ

કરવામાં સમલંબચતુષ્કોણ ત્રણ ત્રિકોણ AEB, EBC અને ECD માં વિભાજીત થશે. ધારો કે $AD=2a$, $BC=2b$ અને ચતુષ્કોણની ઊંચાઈ h છે. તો પછી

$\triangle AEB$ નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}\ ah$

$\triangle EBC$ નું　,,　$= \frac{1}{2}\ 2bh$

$\triangle ECD$ નું　,,　$= \frac{1}{2}\ ah.$

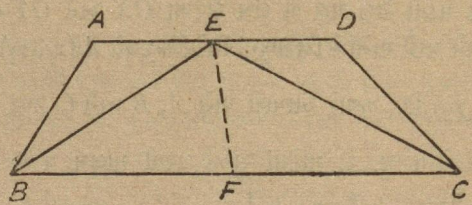
પરંતુ ત્રિકોણનાં વજન તેનાં ક્ષેત્રફળનાં પ્રમાણમાં થશે.

$\therefore$　$\triangle AEB$ નું વજન $= k(\frac{1}{2}ah) = wa,$

$\triangle EBC$ નું　,,　$= k(\frac{1}{2}\ 2bh) = 2wb,$

$\triangle ECD$ નું　,,　$= k(\frac{1}{2}ah) = wa,$

જ્યાં $w = \frac{1}{2}kh$ અને k એક અચલ છે.



આકૃતિ ૪૭

હવે આપણે દરેક ત્રિકોણને બદલે તેનાં શિરોબિન્દુએ રહેલાં ત્રણ સમાનકણો મૂકીશું. એમ કરતાં

$\triangle AEB$ ને બદલે $\frac{wa}{3}$ વજનનાં A, E અને B ઉપર કણો મૂકી શકાશે.

$\triangle EBC$ ને　,,　$\frac{2wb}{3}$　,,　E, B અને C　,,　,,　,,　,,

$\triangle ECD$ ને　,,　$\frac{wa}{3}$　,,　E, C અને D　,,　,,　,,　,,

આખા ચતુષ્કોણને બદલે નીચેનાં કણોની વ્યવસ્થા વાપરી શકાશે.

(i) $\frac{wa}{3}$ વજનનું A ઉપરનું એક કણ

(ii) $\frac{wa}{3}+\frac{2wb}{3}$,, B ,, ,, ,,

(iii) $\frac{wa}{3}+\frac{2wb}{3}$,, C ,, ,, ,,

(iv) $\frac{wa}{3}$,, D ,, ,, ,,

(v) $\frac{2wa}{3}+\frac{2wb}{3}$,, E ,, ,, ,,

A અને D ઉપરનાં સમમહત્ત્વનાં કણોનું સંઘટન કરો અને તે બે કણોને બદલે $\frac{2wa}{3}$ વજનનું એક કણ ADના મધ્યબિન્દુ E ઉપર મૂકો. આ વજન ઉપર (v) માં જણાવેલ E ઉપરના કણ સાથે ઉમેરાઈ જશે. એ જ રીતે B અને C ઉપરનાં સરખાં વજનનાં બે કણોને બદલે $\frac{2(wa+2wb)}{3}$ વજનનું એક કણ F ઉપર મૂકો. આ રીતે અંતે આપણી પાસે E અને F ઉપર નીચેનાં વજનનાં બે કણો રહેશે.

$$E \text{ ઉપર રહેલા કણનું વજન} = \frac{2wa+2wb}{3}+\frac{2wa}{3}$$

$$= \frac{2w}{3}(2a+b),$$

$$\text{અને } F \text{ પર રહેલા કણનું વજન} = \frac{2(wa+2wb)}{3}$$

$$= \frac{2w}{3}(a+2b).$$

આ બે કણોનું પરિણામી વજન EF ઉપરનાં G બિન્દુએ કાર્ય કરશે, જ્યાં

$$\frac{EG}{GF}=\frac{a+2b}{2a+b}.$$

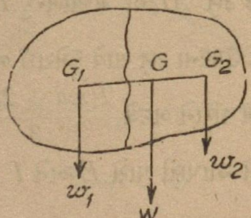
G આપેલા સમલંબચતુષ્કોણનું ગુ. કે. થશે.

૪. સંયોજીત પદાર્થનું ગુ. કે.

સંયોજીત પદાર્થનું ગુ. કે. શોધવામાં સામાન્ય રીતે બે પ્રકારના પ્રશ્નો ઉપસ્થિત થાય છે.

પ્રશ્ન ૧. પદાર્થના બે ભાગોનાં વજન તથા તેનાં ગુરુત્વ-કેન્દ્રોની સ્થિતિ આપેલાં હોય તો આખા પદાર્થનું ગુ. કે. શોધવું.

ધારો કે એક ભાગનું વજન w_1 છે અને તેનું ગુ. કે. G_1 છે જ્યારે બીજા ભાગનું વજન w_2 છે અને ગુ. કે. G_2 છે. આખા પદાર્થનું વજન તે આ બે વજનનું પરિણામી થશે. તેથી તે $w_1 + w_2$ થશે.



આકૃતિ ૪૮

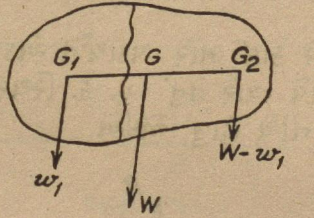
અને તે G_1G_2 નાં G બિન્દુએ કાર્ય કરશે, જ્યાં

$$\frac{G_1G}{GG_2}=\frac{w_2}{w_1}. \qquad (1)$$

સ. ક. (1) આખા પદાર્થના ગુ. કે. G ની સ્થિતિ આપે છે.

પ્રશ્ન (૨) આખા પદાર્થ તથા તેના એક ભાગનું વજન તથા ગુ. કે. ની સ્થિતિ આપેલાં હોય તો બાકીના ભાગનું ગુ. કે. શોધવું.

આખા પદાર્થનું વજન W છે અને તેના ગુ. કે. Gમાં તે કાર્ય કરે છે. પદાર્થના એક ભાગનું વજન w_1 છે અને તેનું ગુ. કે. G_1 છે. પદાર્થના બાકીના ભાગનું વજન $W-w_1$ થશે અને તે G_1G લંબાવીને તે પર લીધેલા એવા એક બિન્દુ G_2 માં કાર્ય કરશે કે G_2 માં કાર્ય કરતા $W-w_1$ અને G_1 માં કાર્ય કરતા w_1 નું પરિણામી G માંથી પસાર થાય; એટલે કે



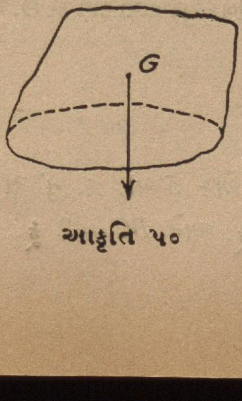
આકૃતિ ૪૯

$$\frac{G_1G}{GG_2}=\frac{W-w_1}{w_1} \text{ અર્થાત્ } GG_2=\frac{w_1}{W-w_1}\ G_1G.$$

આ રીતે બાકીના ભાગનું ગુ. કે. G_2 આપણને મળી જશે.

૫. બે ઉપયોગ.

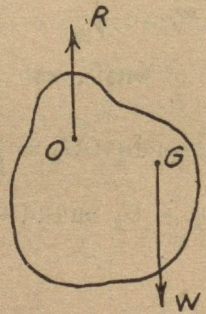
(૧) જ્યારે કોઈ પદાર્થ એક સપાટી ઉપર સ્થિર રહેલો હોય ત્યારે તેના ગુ. કે. માંથી દોરેલી લંબક તેની આધારપીઠની અંદર જ પડવી જોઈએ.



આકૃતિ ૫૦

પદાર્થ ઉપર ફક્ત બે જ બળો કાર્ય કરે છે. (૧) તેનું વજન W નીચે તરફની લંબક દિશામાં (૨) આધારપીઠની પ્રતિક્રિયા. સમતુલા માટે આ બળો સમ-મહત્ત્વનાં, વિરુદ્ધ દિશાનાં અને એક જ સુરેખામાં કાર્ય કરતાં હોવાં જોઈએ. હવે વજન Gમાંથી લંબક દિશામાં કાર્ય કરે છે, અને પ્રતિક્રિયા આધારપીઠના કોઈ એક બિન્દુએ કાર્ય કરે છે. જો આ બે બળો એક જ સુરેખામાં કાર્ય કરતાં હોય તો Gમાંથી દોરેલી લંબક આધારપીઠના કોઈ બિન્દુમાંથી જ પસાર થવી જોઈએ.

(૨) જ્યારે કોઈ ભારે પદાર્થને એક સ્થિર બિન્દુએથી લટકાવવામાં આવે ત્યારે તેનું ગુ. કે. સ્થિર બિન્દુથી બરાબર લંબક દિશામાં નીચે હોવું જોઈએ.



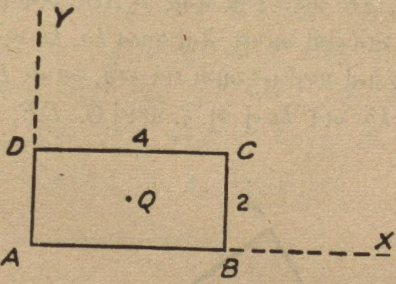
આકૃતિ ૫૧

અહિં પણ G માંથી પસાર થતું વજન અને O ઉપરની પ્રતિક્રિયા એ બે જ બળો પદાર્થ ઉપર કાર્ય કરે છે. તેથી તે બળો એક જ સુરેખામાં કાર્ય કરતાં હોવાં જોઈએ. પરંતુ વજન તો લંબક સુરેખામાં કાર્ય કરે છે. એટલે કે OG લંબક સુરેખા હોવી જોઈએ.

૬. ઉદાહરણો.

(૧) ABCD એક 5 પા. વ. નું સમાન લંબચોરસ પતરું છે, જેમાં $AB = 4$ ફૂ. અને $BC = 2$ ફૂ. છે. 3, 5, 6 અને 8

પા. નાં વજન તેના અનુક્રમે A, B, C અને D ખૂણા ઉપર મૂકવામાં આવ્યાં છે. આ વ્યવસ્થાનું ગુ. કે. શોધો.



આકૃતિ ૫૨

AB અને ADને X — અક્ષ અને Y — અક્ષ તરીકે પસંદ કરો. લંબચોરસનું વજન 5 પાઉન્ડ છે અને તેના કેન્દ્ર Qમાં તે કાર્ય કરે છે. આપણી પાસે નીચેનાં વજનો થશે.

A (0, 0) ઉપર $w_1 = 3$ પા.
B (4, 0) ,, $w_2 = 5$ પા.
C (4, 2) ,, $w_3 = 6$ પા.
D (0, 2) ,, $w_4 = 8$ પા.
Q (2, 1) ,, $w_5 = 5$ પા.

ગુ. કે. $(\bar{x}, \bar{y})$ માટેનાં સૂત્રો ઉપરથી માલૂમ પડશે કે

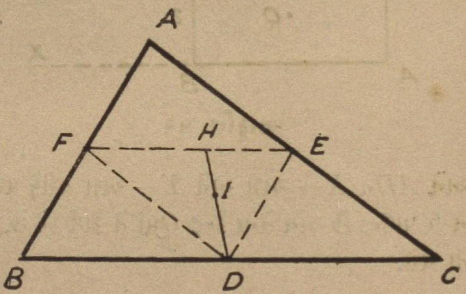
$$\bar{x} = \frac{\Sigma w_r x_r}{\Sigma w_r} = \frac{3 \times 0 + 5 \times 4 + 6 \times 4 + 8 \times 0 + 5 \times 2}{3 + 5 + 6 + 8 + 5}$$

$\therefore \quad \bar{x} = \dfrac{54}{27} = 2.$ એજ પ્રમાણે $\bar{y} = \dfrac{\Sigma w_r y_r}{\Sigma w_r} = \dfrac{33}{27} = \dfrac{11}{9},$

ગુ. કે. $(2, \dfrac{11}{9})$ ઉપર છે.

(૨) એક બીજાને છેડે જોડેલા, ત્રિકોણ બનાવતા, ત્રણ સમાન દંડોનું ગુ. કે. શોધો.

BC, CA, AB ત્રણ દંડ છે. તેઓ $\triangle ABC$ બનાવે છે. દંડની લંબાઈ a, b અને c છે, અને તેથી આપણે તેનાં વજન ka, kb અને kc લઈ શકીએ. આ વજન તે તે દંડોનાં મધ્યબિન્દુઓએ કાર્ય કરશે. આપણે D, E અને F પર રહેલાં વજન ka, kb અને kc નું ગુ. કે. શોધવું છે. DE, EF અને FD ને જોડી દો.



આકૃતિ ૫૩

F ઉપરના kc વજન અને E ઉપરના kb વજનનું પરિણામી $k\,(b+c)$ થશે અને તે EF ઉપરના H બિન્દુએ કાર્ય કરશે, જ્યાં

$$\frac{FH}{HE}=\frac{kb}{kc}=\frac{b}{c}=\frac{AC}{AB}=\frac{DF}{DE}$$

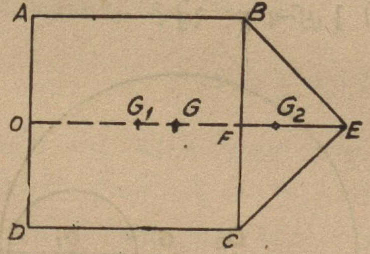
H, FE ને $DF : DE$ ના પ્રમાણમાં ભાગે છે.

$\therefore$ DH એ $\angle FDE$ નો દુભાજક હોવો જોઈએ.

હવે આપણે H ઉપરના $k\,(b+c)$ વજનને D ઉપરના ka વજન જોડે સંઘટિત કરવું જોઈએ. તેમ કરતાં જોઈ શકાશે કે અંતિમ પરિણામી દુભાજક DH ઉપરના કોઈ બિન્દુએ કાર્ય કરશે. તે જ પ્રમાણે સિદ્ધ કરી શકાય કે આ અંતિમ પરિણામી $\triangle DEF$ ના E અને F કોણના દુભાજક ઉપરના કોઈ બિન્દુએ પણ કાર્ય કરતું હોવું જોઈએ. એટલે કે અંતિમ પરિણામી $\triangle DEF$ના કોણીય દુભા-

જકોના છેદનબિન્દુએ કાર્ય કરતું હોવું જોઈએ. આપેલા ત્રણ દંડોનું ગુ. કે. એ $\triangle DEF$ નું અંતઃકેન્દ્ર છે.

(૩) એક ચોરસ $ABCD$ ની BC બાજુને કર્ણ તરીકે રાખીને એક સમદ્વિભુજ કાટકોણ ત્રિકોણ EBC દોરવામાં આવ્યો છે. (E ચોરસની બહાર પડે છે.) અને આ આકારનું એક સમાન પટલ $ABECD$ તૈયાર કરવામાં આવ્યું છે. જો ચોરસની બાજુ $2a$ હોય તો પટલનું ગુ. કે. શોધો.



આકૃતિ ૫૪

સમદ્વિભુજ ત્રિકોણ BEC ની બાજુઓ ગણી કાઢીએ.

$BE = EC = a\sqrt{2}$. તેની ઊંચાઈ $EF = a$.

ચોરસનું વજન $k\,(4a^2)$ થશે અને તેનું ગુ. કે. તેનાં કેન્દ્ર G_1 ઉપર છે. ત્રિકોણનું વજન $k\frac{1}{2}(2a)a = ka^2$ છે અને તેનું ગુ. કે. G_2 ઉપર છે. તેથી આખા પટલનું ગુ. કે. G_1G_2 પર આવેલાં G બિન્દુએ હશે જ્યાં

$$\frac{G_1G}{GG_2} = \frac{ka^2}{4ka^2} = \frac{1}{4} \text{ થશે.}$$

આપણે જો OGને $\bar{x}$ કહીએ તો તેની કિંમત

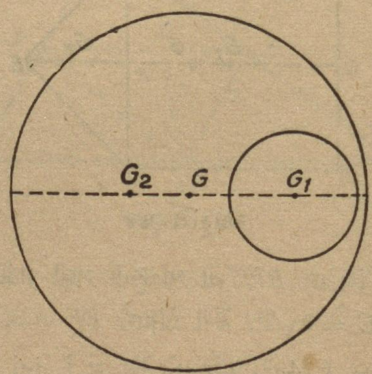
$$\bar{x} = \frac{w_1x_1 + w_2x_2}{w_1 + w_2}$$

એ સૂત્ર વડે કાઢી શકીશું.

$$\bar{x} = \frac{4ka^2a + ka^2\left(2a + \frac{a}{3}\right)}{4ka^2 + ka^2}$$

$$= \frac{19}{15}\, a.$$

(૪) 3" વ્યાસનું એક ગોળ છેદ, 12" વ્યાસવાળી એક રકાબીમાં ક્યાં પાડવું જોઈએ કે જેથી બાકી રહેલા ભાગનું ગુ. કે. રકાબીના કેન્દ્રથી $\frac{1}{4}$ ઈન્ચ દૂર રહે?



આકૃતિ ૫૫

આખી રકાબીનું ગુ. કે. તેનાં કેન્દ્ર G માં આવેલું છે બાકીના ભાગનું ગુ. કે. G_2 છે તો $GG_2 = \frac{1}{4}$ ઈન્ચ.

એટલે કે રકાબીમાં પાડેલા ગોળ છેદનું કેન્દ્ર જો G_1 હોય તો G_2G ને લંબાવવાથી તે G_1 માંથી પસાર થશે અને

$$\frac{G_1G}{GG_2} = \frac{\text{બાકીના ભાગનું વજન}}{\text{છેદ પાડીને દૂર કરેલું વજન}}. \qquad (1)$$

હવે આખી રકાબીનું વજન $= k\pi(6)^2 = 36k\pi$

છેદ પાડીને દૂર કરેલું વજન $= k\pi(\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}k\pi$

$\therefore$ બાકી રહેલા ભાગનું વજન $= 36k\pi - \frac{9}{4}k\pi$

$$= \frac{135}{4}\ k\pi.$$

આથી હવે સ. ક. (1) માંથી માલૂમ પડશે કે

$\frac{G_1G}{GG_2} = 15$ અથવા $G_1G = 15 \times GG_2$

$$= 15 \times \tfrac{1}{4} = 3{\cdot}75 \text{ ઈન્ચ.}$$

(૫) $ABCD$ એક ચેારસ ધાતુનું પતરૂં છે અને તેના વિકર્ણો O બિન્દુમાં એકબીજાને કાપે છે. આ પતરાંમાંથી $\triangle AOB$ કાપી લેવામાં આવ્યેા છે અને બાકી રહેલું પતરૂં D બિન્દુથી લટકાવવામાં આવ્યું છે. સિદ્ધ કરેા કે સ્થિર હાલતમાં DC લંબક જોડે $\tan^{-1}(7/9)$ નેા ખૂણેા બનાવશે.

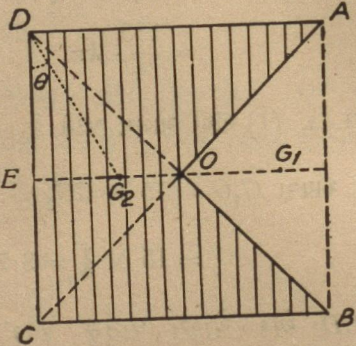
આખા પતરાં $ABCD$ નું ગુ. કે. O છે. જો ચેારસની એક બાજુ $2a$ લઈએ તેા આખા પતરાંનું વજન $k(4a^2)$ થશે. કાપી લીધેલ $\triangle AOB$ નું ગુ. કે. G_1 છે અને તેનું વજન ka^2 છે. તેા બાકી રહેલા ભાગનું ગુ. કે. G_2, G_1O ને જ્યાં સુધી $\frac{G_2O}{OG_1} = \frac{1}{3}$ થાય ત્યાં સુધી લંબાવવાથી પ્રાપ્ત થશે.

જ્યારે પતરૂં Dમાંથી લટકાવવામાં આવશે ત્યારે DG_2 લંબક બનશે. આપણે DC લંબક જોડે જે ખૂણેા બનાવે છે તે શેાધવેા છે. એટલે કે આપણે $\angle CDG_2$ શેાધવેા છે. આ કેાણને θ કહેા. ત્યારે $EDG_2 = \theta$. આપણે $\triangle EDG_2$ માંથી θ શેાધીશું.

એ માટે પહેલાં આપણાં સામાન્ય સૂત્રની મદદથી EG_2 શેાધીશું.

$EG_2 = x_2$ અને $w_2 = 3ka^2$. $EG_1 = x_1 = \frac{5a}{3}$ અને $w_1 = ka^2$.

w_1 અને w_2નું પરિણામી O માં કાર્ય કરે છે. $EO = \bar{x} = a$.



આકૃતિ ૫૬

હવે,

$$\bar{x} = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2}{w_1 + w_2}$$ એ સૂત્રનો ઉપયોગ કરીએ.

$$a = \frac{ka^2 . \frac{5a}{3} + 3ka^2 . \ x_2}{ka^2 + 3ka^2}$$

$$\therefore \quad x_2 = \frac{7}{9} a.$$

$\triangle EDG_2$ માંથી જણાશે કે

$$\tan\theta = \frac{EG_2}{ED} = \frac{7}{9}.$$

મનોયત્ન V.

(૧) નીચેની કણવ્યવસ્થામાં કણનાં વજન અને સ્થિતિ આપેલાં છે. પ્રત્યેક વ્યવસ્થાનું ગુ. કે. શોધો.

(i) 3 પા. (0, 4) ઉપર, 4 પા. (3, – 2) ઉપર અને 5 પા. (– 1, 6) ઉપર.

(ii) 2 પા. (3, 5) ઉપર, 4 પા. (– 2, 4) ઉપર, 9 પા. (3, – 5) ઉપર, 6 પા. (5, 10) ઉપર.

(iii) સમભુજ ત્રિકોણ *ABC* નાં *A*, *B* અને *C* બિન્દુએ મૂકેલાં 1, 2 અને 3 પા. વજનનાં કણો.

(૨) 1 પા. વજનના અને 4 ફૂ. લાંબા એક સમાન દંડ ઉપર, 7 પા., 4 પા. અને 2 પા. નાં વજન તેના એક છેડાથી અનુક્રમે 1, 2 અને 3 ફૂ. ને અન્તરે મૂકેલાં છે. દંડ તેના કયા બિન્દુ ઉપર સમતુલિત થશે તે શોધી કાઢો.

(૩) *ABCD* 6 ઈન્ચ બાજુવાળું એક સમચોરસ છે. 2, 3, 4 અને 5 પા. નાં વજન અનુક્રમે *A*, *B*, *C* અને *D* ઉપર મૂકેલાં છે. તો તે વજનોના ગુ. કે. ની સ્થિતિ શોધો.

(૪) એક સમચોરસ *ABCD* ની *CD* બાજુ ઉપર, બહારની તરફ, એક સમભુજ ત્રિકોણ *CDE* દોરીને પંચકોણ *ABCED* તૈયાર કરવામાં આવ્યો છે. આ પંચકોણની બાજુ 2 ફૂ. છે. 6 પા.નાં વજન *A* અને *B* ઉપર, 12 પા. નાં *C* અને *D* ઉપર અને 9 પા. નું વજન *E* ઉપર મૂકવામાં આવેલું છે. આ પાંચ વજનોના ગુ. કે. ની સ્થિતિ શોધી કાઢો.

(૫) એક દૂરબીન ત્રણ નળીઓનું બનાવેલું છે. નળી એકબીજીની અંદર સમાઈ શકે તેમ છે. પ્રત્યેક નળીની લંબાઈ 10 ઈન્ચ છે અને તેમનું વજન અનુક્રમે 8, 7 અને 6 ઔંસ છે. ત્રણે નળી પૂરી લંબાઈમાં બહાર ખેંચી કાઢવામાં આવી હોય તે સ્થિતિમાં દૂરબીનનું ગુ. કે. શોધી કાઢો.

(૬) ફૂટપટ્ટીની 1 ઈન્ચ, 2 ઈન્ચ, 3 ઈન્ચ...12 ઈન્ચની નિશાનીઓ ઉપર અનુક્રમે 1,2,3,...12 ગ્રેઈન વજનનાં બાર કણો મૂકવામાં આવેલાં છે. ફૂટપટ્ટીનું વજન ગણતરીમાં નહિ લેતાં આ બાર કણોનું ગુ. કે. શોધો.

(૭) એક n સે. મી. લાંબા સમાન દંડના A છેડાથી 1,2,3,...n સે. મી. ને અન્તરે અનુક્રમે 1,2,3,...n ગ્રામ વજનનાં કણો મૂકવામાં આવેલાં છે. જો દંડનું વજન $(n+1)$ ગ્રામ હોય તો સિદ્ધ કરો કે દંડ તથા કણોનાં ગુ. કે. નું A થી અંતર $2n/3$ સે. મી. થશે.

(૮) જો કોઈ ત્રિકોણનું ગુ. કે. તેના અંતઃકેન્દ્ર ઉપર પડે તો સિદ્ધ કરો કે ત્રિકોણ સમભુજ થશે.

(૯) સિદ્ધ કરો કે W વજનના ત્રિકોણીય પટલનું ગુ. કે. તે ત્રિકોણની ત્રણ બાજુનાં મધ્યબિન્દુએ મૂકેલાં $\dfrac{W}{3}$ વજનનાં કણોના ગુ. કે. ઉપર પડે.

(૧૦) એક વર્તુળાકાર રકાબીનું કેન્દ્ર O છે, અને ત્રિજ્યા 10 સે. મી. છે. O થી 5 સે. મી. દૂર કેન્દ્ર લઈને તેની આસપાસ 3 સે. મી. ત્રિજ્યાનું એક છેદ રકાબીમાં પાડવામાં આવ્યું છે. બાકી રહેલા ભાગનું ગુ. કે. શોધો.

(૧૧) બે સમદ્વિભુજ ત્રિકોણ ABC અને ABD ને એક જ આધાર AB ઉપર દોરીને એક ચતુષ્કોણ $ADBC$ બનાવવામાં આવ્યો છે. જો ત્રિકોણની ઊંચાઈ અનુક્રમે 10 ઈન્ચ અને 6 ઈન્ચ હોય તો આ ચતુષ્કોણના ગુ. કે. નું AB થી અન્તર શોધો.

(૧૨) 40 ઈન્ચ લાંબા એક તારને વાળીને એક કાટકોણ ACB બનાવવામાં આવ્યો છે, જેમાં CB 10 ઈન્ચ લાંબી છે. તારનું ગુ. કે. શોધો. પછી AC ઉપરનું એવું D બિન્દુ શોધો કે જેમાંથી જો તારને લટકાવવામાં આવે તો સમતુલિત સ્થિતિમાં AC ક્ષૈતિજ રહે.

(૧૩) $6a$ લંબાઈના એક સમાન તારને વાળીને સમચોરસ $ABCD$ની AB, BC અને CD બાજુઓ બનાવવામાં આવી છે. આ તારનું માળખું D માંથી લટકાવવામાં આવે છે. સિદ્ધ કરો કે સમતુલાની સ્થિતિમાં CD લંબક જોડે $\tan^{-1}(3/4)$ નો કોણ બનાવશે.

(૧૪) એક સ. બા. ચ. કોણમાંથી તેના વિકર્ણો વડે બનતા ચાર ત્રિકોણમાંનો એક ત્રિકોણ કાપી લેવામાં આવ્યો છે. બાકી રહેલા ભાગનું ગુ. કે. શોધો.

(૧૫) 30 ઈન્ચ બાજુવાળાં એક સમચોરસ ધાતુના પતરાં ઉપર ચાર સરખા સમચોરસ દોરવામાં આવ્યા છે અને તેમાંના એક સમચોરસના કેન્દ્રની આસપાસ 7 ઈન્ચ ત્રિજ્યાનું એક ગોળ છેદ પાડવામાં આવ્યું છે. બાકી રહેલા ભાગનું ગુ. કે. આખા પતરાંના કેન્દ્ર બિન્દુથી કેટલું દૂર હશે તે શોધો.

(૧૬) એક સમાન સમદ્વિભુજ ત્રિકોણ ABC માંથી બીજો સમદ્વિભુજ ત્રિકોણ PBC કાપી લેવામાં આવે છે. જ્યારે બાકી રહેલો ભાગ B માંથી લટકાવવામાં આવે છે, ત્યારે માલૂમ પડે છે કે સમતુલામાં PB લંબક રહે છે. જો $\angle PBC = \theta$ હોય તો સાબિત કરો કે $\tan\theta = \frac{1}{2}$.

(૧૭) એક સમાન તારમાંથી બનાવેલ ત્રિકોણ ABCની CA બાજુ કાઢી લેવામાં આવી છે. અને પછી તે તારને A બિન્દુએથી લટકાવવામાં આવ્યો છે. જો સમતુલાની સ્થિતિમાં BC ક્ષૈતિજ હોય તો દર્શાવો કે

$$b^2(c + 2a) = c(c + a)^2.$$

(૧૮) એક સમાન તારને વાળીને કાટકોણ ત્રિકોણ ABC બનાવવામાં આવ્યો છે ($\angle B = 90°$) અને તેને A બિન્દુએથી લટકાવવામાં આવ્યો છે. સિદ્ધ કરો કે A માંથી દોરેલી લંબક BC ને એવા બિન્દુ D એ કાપશે કે જ્યાં $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{a+b}{a+c}$ થાય. a, b, c એ ત્રિકોણની બાજુઓ છે.

(૧૯) એક લંબચોરસ પટલ $ABCD$ ની BC અને CD બાજુઓ અનુક્રમે $2a$ અને $2b$ છે. અને P તથા Q તે બાજુઓનાં મધ્યબિન્દુ છે. ત્રિકોણ CPQ પટલમાંથી કાપી લેવામાં આવ્યો છે. જો હવે પટલને D માંથી લટકાવવામાં આવે તો AD લંબક જોડે શો કોણ બનાવશે તે ગણી કાઢો.

(૨૦) પાતળા સમાન દંડ OB (=3 ફૂ.), OA (=4 ફૂ.) અને AB (=5 ફૂ.) વડે એક કાટકોણ ત્રિકોણ OAB બનાવવામાં આવ્યો છે. જો ત્રિકોણને A બિન્દુએથી લટકાવવામાં આવે તો સિદ્ધ કરો કે OA લંબક જોડે લગભગ 22° નો ખૂણો બનાવશે.

(૨૧) 7 ફૂ. ઊંચા અને $4\frac{1}{2}$ ફૂ. પહોળા એક બારણાનું વજન 50 પા. છે. બારણાની મથાળાની કિનારથી 3 ફૂ. ને અન્તરે કેન્દ્ર રાખીને 6 ઈન્ચ ત્રિજ્યાનું એક ગોળ છેદ પાડવામાં આવ્યું છે અને તે છેદમાં 6 પા. વજનની કાચની બારી જડી દેવામાં આવી છે. નીચેની ક્ષૈતિજ ધારથી બારણાના ગુરુત્વકેન્દ્રની ઊંચાઈ શોધો.

(૨૨) $ABCDEF$ એક 3 ઈન્ચ બાજુવાળા નિયમિત ષટ્કોણ આકારનું ધાતુનું પટલ છે. જે ધાતુનો ત્રિકોણ ABC બનાવેલો છે તેનું પ્રતિ વર્ગ-ઈન્ચ વજન, બાકીની ધાતુના પ્રતિ વર્ગ-ઈન્ચ વજન કરતાં m ગણું છે. સિદ્ધ કરો કે આખા પટલનું ગુ. કે. B થી $\dfrac{m+17}{m+5}$ ઈન્ચને અન્તરે BE ઉપર આવેલું છે.

(૨૩) જેનો C કોણ ગુરુકોણ છે એવું એક ત્રિકોણાકાર પટલ ABC, લંબક સમતલમાં, તેની બાજુ AC ટેબલ ઉપર અડેલી રાખીને ગોઠવવામાં આવ્યું છે. સિદ્ધ કરો કે ઓછામાં ઓછું

$$\tfrac{1}{3}\, W.\frac{a^2+3b^2-c^2}{c^2-a^2-b^2}$$

નું વજન જો B ઉપરથી લટકાવવામાં આવે તો પટલ ઉથલી પડશે. અહિં W એ પટલનું વજન છે.

(૨૪) ત્રિકોણ ABC માં BC નું મધ્યબિન્દુ D છે. ત્રિકોણના ગુરુત્વકેન્દ્રમાંથી BC ને સમાન્તર દોરેલી રેખા AB તથા AC ને અનુક્રમે E તથા F માં છેદે છે. સિદ્ધ કરો કે $BEFC$ નું ગુ. કે. AD ઉપર છે અને તેનું D થી અન્તર $\dfrac{7}{45}AD$ છે.

(૨૫) એક સમભુજ ત્રિકોણ ABC લંબક સમતલમાં છે અને તેની બાજુ AC ક્ષૈતિજ છે. P અને Q, AB અને AC પરનાં એવાં બિન્દુઓ છે કે $\dfrac{AP}{PB}=\dfrac{AQ}{QC}=\dfrac{x}{1}$, અને પટલ $BPQC$ નું ગુ. કે. Q થી ઉપર લંબકમાં છે. સાબિત કરો કે x ની કિંમત $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ થશે.

જવાબો :

(૧) (i) $\left(\frac{7}{12}, \frac{17}{6}\right)$ (ii) $\left(\frac{55}{21}, \frac{41}{21}\right)$ (iii) BCને X— અક્ષ તથા BC ના લંબદુભાજકને Y— અક્ષ લેતાં ગુ. કે. $\left(\frac{a}{6}, \frac{a\sqrt{3}}{6}\right)$ થશે. $2a$ =ત્રિકોણની બાજુ. (૨) છેડેથી 23/14 ફૂ. ને અન્તરે. (૩) AB અને AD ને X અને Y— અક્ષ લેતાં $\left(3, \frac{27}{7}\right)$. (૪) સપ્રમાણ રેખા ઉપર E થી $(8+12\sqrt{3}/15$ને અન્તરે. (૫) એક છેડાથી $14\frac{1}{21}$ ફૂ. (૬) 8·33 ઈન્ચ. (૧૦) O થી 45/91 સે. મી. (૧૧) 4/3 ઈન્ચ. (૧૨) $CD = 11{\cdot}25,\ GD = 1{\cdot}25 \perp CD$. (૧૪) સ. બા. ચ. કોણ $ABCD$ ના $\triangle OCD$ કાપી લેવામાં આવ્યો હોય તો $OG = \frac{1}{9}\ AD$. (૧૫) $\frac{735\pi}{\sqrt{2}(900-49\pi)}$. (૧૯) $\tan^{-1}(19b/23a)$. (૨૧) 3·54 ફૂ.

પ્રકરણ ૫

દૃઢ પદાર્થની સમતુલા

૧. પ્રાસ્તાવિક.

આપેલાં બળોની અસર નીચે સ્થિર રહેતા એક દૃઢ પદાર્થની સમતુલાની શરતો શોધી કાઢવાની સ્થિતિમાં હવે આપણે આવી ગયા છીએ. દૃઢ પદાર્થની બાબતમાં પણ આપણે કણની બાબતમાં કર્યું હતું તેમ વ્યવસ્થિત રીતે આગળ વધીશું. પહેલાં, પદાર્થ પર કાર્ય કરતા એક બળનો વિકલ્પ લઈશું, પછી કાર્ય કરતાં બે બળો, પછી ત્રણ બળો એમ એક પછી એક વિકલ્પો લઈશું. પરંતુ દૃઢ પદાર્થની સ્થૈતિકીના પ્રધાન કૂટ પ્રશ્નનો સંપૂર્ણ ઉકેલ લાવવાનું આ સરળ પાઠ્યપુસ્તકમાં શક્ય નથી. પદાર્થ પર કાર્ય કરતાં ત્રણ બળોના વિકલ્પ સુધી જ આપણે આપણો અભ્યાસ વધારીશું. આ વિકલ્પો આપણે એક પછી એક લઈએ.

પદાર્થ પર કાર્ય કરતું **એક માત્ર બળ** પદાર્થને સ્થિર રાખી શકે નહિ. ગતિ ઉત્પન્ન કરવી એ તો બળનો સ્વભાવ છે. અને બીજું કોઈ બળ ગતિનો વિરોધ કરવા હાજર નથી એટલે એક જ બળના કાર્ય નીચે પદાર્થ ગતિ પકડશે જ.

જો **બે બળો** દૃઢ પદાર્થ ઉપર કાર્ય કરે અને પદાર્થને સ્થિર રાખે તો તે બન્ને બળો સમમહત્ત્વનાં, વિરુદ્ધ દિશાનાં અને એક જ સુરેખામાં કાર્ય કરતાં હોવાં જોઈએ. કણ પર કાર્ય કરતાં બે બળોની બાબતમાં જેવી સાબિતી આપી હતી તેવી જ સાબિતી આ કિસ્સામાં પણ આપી શકાય.

એક દૃઢ પદાર્થને સમતુલામાં રાખતાં ત્રણ બળોના વિકલ્પ માટે આપણે નીચેનું પ્રમેય સિદ્ધ કરીશું.

૨. પ્રમેય.

જો ત્રણ સમતલબળો એક પદાર્થને સમતુલામાં રાખે

તો બળોની કાર્યરેખાઓ કાં તો એક બિન્દુમાં મળવી જોઈએ અથવા તો સમાન્તર હોવી જોઈએ.

P, Q, R ત્રણ સમતલીય બળો પદાર્થ ઉપર કાર્ય કરે છે. પદાર્થ સ્થિર રહે છે, એટલે કે

$$\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{R} = 0.$$

આપણે સિદ્ધ કરવું છે કે બળોની કાર્યરેખાઓ કાં તો સંગામી છે અથવા તો સમાન્તર છે.

ત્રણમાંનાં બે બળો **P** અને **Q**ની આપણે પહેલાં ચર્ચા કરીશું. આ બે બળો એક જ સમતલમાં છે તેથી બળો કાં તો એક બિન્દુમાં મળશે અથવા તો સમાન્તર થશે. આપણે આ વિકલ્પો એક પછી એક લઈશું.

વિકલ્પ (૧): ધારો કે **P** અને **Q** *O* બિન્દુમાં મળે છે. *O* ઉપર તે બળોનું પરિણામી **S** શોધો. આ સ. બા. ચ. કોણના નિયમથી થઈ શકશે. પછી

$$\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{S}$$

પરંતુ $\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{R} = 0.$

$\therefore$ $\mathbf{S} + \mathbf{R} = 0$

$\therefore$ $\mathbf{R} = -\mathbf{S}.$

આ રીતે **S** અને **R** સમમહત્ત્વનાં, વિરુદ્ધ દિશાનાં અને એક જ સુરેખામાં કાર્ય કરતાં હોવાં જોઈએ. પરંતુ **S** *O* માંથી પસાર થાય છે. તેથી **R**, જે **S**ની જ સુરેખામાં કાર્ય કરે છે, તે પણ *O* માંથી પસાર થવું જોઈએ, અર્થાત્ બળો **P**, **Q** અને **R** બધાં જ *O* માંથી પસાર થાય છે. **P, Q, R** સંગામી થયાં.

વિકલ્પ (૨): માનો કે **P** અને **Q** સમાન્તર છે. તો પછી તેમનું પરિણામી **S** પણ સમાન્તર થશે.

પરંતુ $\mathbf{S} + \mathbf{R} = 0$

એટલે કે **S, R**ને સમતુલિત કરશે.

$\therefore$ **R** પણ $\|$ બળ થશે.

$\therefore$ **P, Q, R** સઘળાં સમાન્તર બળો થયાં.

આપણે સિદ્ધ કર્યું કે દૃઢ પદાર્થ ઉપર કાર્ય કરતાં ત્રણ બળો જો પદાર્થને સમતુલામાં રાખે તો તે બળો કાં તો એકબિન્દુગામી થાય અથવા તો સમાન્તર થાય.

૩. તારવણી.

ઉપરના પ્રમેયનું પરિણામ વિચારતાં નીચેના મુદ્દાઓ તુરત જ ધ્યાન ઉપર આવશે.

(૧) પ્રમેયનું પરિણામ ભૌમિતિક પ્રકારનું છે. બળો દર્શાવતી રેખાઓ કાં તો એકબિન્દુગામી થાય અથવા તો સમાન્તર થાય. આ પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતી વેળાએ શરૂઆતમાં આકૃતિ દોરવામાં જ ધ્યાન રાખવું જરૂરનું થઈ પડે છે. આકૃતિમાં, સમતુલામાં રહેલા પદાર્થ ઉપર કાર્ય કરતાં ત્રણ બળો દર્શાવતી રેખાઓ કાં તો સંગામી દોરવી જોઈએ નહિતર સમાન્તર દોરવી જોઈએ.

(૨) અને આ રીતે એક વાર આપણે આકૃતિ દોરી લીધી એટલે પ્રમેયનાં બધાં પરિણામોનો ઉપયોગ થઈ ગયો. તેથી એક વાર સાચી આકૃતિ દોરાઈ એટલે પછી તો આપણે આકૃતિની સામે નજર ઠેરવીને તેમાંથી જે કાંઈ પરિણામ તારવી શકાય તે તારવવાં રહ્યાં. અલબત્ત, આકૃતિ સમજવા માટે આપણે આપણું ભૂમિતિ કે ત્રિકોણમિતિનું જ્ઞાન વાપરી શકીએ.

(૩) જો ત્રણ બળો એક બિન્દુમાં મળતાં હોય તો આપણે લામીના પ્રમેયનો કે બળત્રિકોણના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી શકીએ અને એ રીતે એકાદ અજાણ્યા બળ, પ્રતિક્રિયા કે તણાવની કિંમત શોધી શકીએ.

(૪) અથવા તો જો ત્રણ બળો સમાન્તર હોય તો કોઈ સગવડ પડતા બિન્દુ આસપાસ આપણે બળોનાં ભ્રામક લઈએ અને એ રીતે વળી પાછું એકાદ અજાણ્યા બળની કિંમત શોધી શકીએ.

ત્રિકોણમિતિનાં નીચે આપેલાં બે સૂત્રો, પદાર્થ સ્થૈતિકીના પ્રશ્નો હલ કરવામાં બહુ ઉપયોગી નીવડશે.

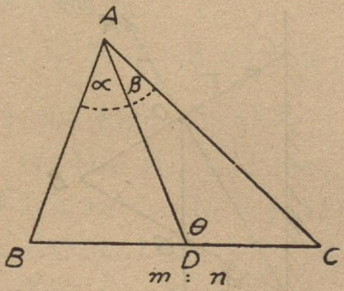
$\triangle ABC$ના આધાર BCમાં D કોઈ એક બિન્દુ છે જે BC ને $m:n$ના ગુણોત્તરમાં ભાગે છે.

$\angle ADC = \theta, \quad \angle BAD = \alpha, \quad \angle DAC = \beta.$

આ રહ્યાં બે સૂત્રો:

$$(m+n)\cot\theta = m\cot\alpha - n\cot\beta \qquad \text{(I)}$$

$$(m+n)\cot\theta = n\cot B - m\cot C \qquad \text{(II)}$$



આકૃતિ ૫૭

હવે આપણે પદાર્થની સમતુલાનાં કેટલાંક ઉદાહરણો લઈશું.

૪. ઉદાહરણો.

(૧) 10 ફૂ. લાંબા અને 50 પા. વજનના પાટડાનો એક છેડો નકૂચા વડે લંબક દિવાલ સાથે જડી દીધેલો છે અને તેનો બીજો છેડો ૧૦ ફૂ. લાંબાં દોરડાં વડે દિવાલમાં નકૂચાથી લંબક દિશામાં ઉપર રહેલા એક બિન્દુએ બાંધેલો છે. દોરડાંનો તણાવ શોધો અને જ્યારે પાટડો ક્ષિતિજ જોડે 30° નો ખૂણો બનાવે ત્યારે નકૂચાની પ્રતિક્રિયાનું મહત્ત્વ તથા દિશા પણ શોધી કાઢો.

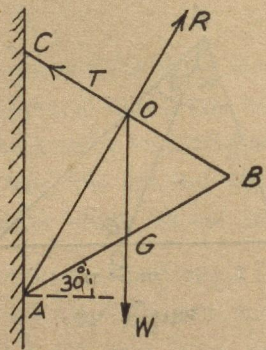
AB પાટડો છે. A ઉપર રહેલા નકૂચા આસપાસ તે છૂટથી ઘૂમી શકે છે. આ સંયોગોમાં અગાઉથી A ઉપરની પ્રતિક્રિયાની દિશા જાણવી શકય નથી. પાટડા ઉપર કાર્ય કરતાં બળોની આપણે યાદી બનાવીએ.

(૧) પાટડાના મધ્યબિન્દુ G માંથી કાર્ય કરતું તેનું વજન W.

(૨) દોરડાંનો, BC દિશામાં, તણાવ T.

આ બે બળો O બિન્દુએ મળે છે

$\therefore$ (૩) ત્રીજું બળ—નકૂચાની પ્રતિક્રિયા R—પણ O માંથી પસાર થવું જોઈએ. R, AO દિશામાં કાર્ય કરે છે.



આકૃતિ ૫૮

આપણે લામીના પ્રમેયનો કે બળત્રિકોણના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીને R અને T શોધી શકીશું. અહિં બળત્રિકોણના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરવો સરળ થઈ પડશે. **આ.** (૫૮) માં $\triangle AOC$ ની બાજુઓ ત્રણ બળોને સમાન્તર છે. $AO \parallel R$, $OC \parallel T$, $CA \parallel W$.

$\therefore$ $\triangle AOC$ બળત્રિકોણ બને છે અને તેની બાજુઓ બળોને સપ્રમાણ થશે.

$$\therefore \quad \frac{W}{CA} = \frac{R}{AO} = \frac{T}{OC}.$$

હવે $AB = BC = 10$ અને $\angle CAB = 60°$.

$\therefore$ $\triangle ABC$ સમભુજ ત્રિકોણ બને છે.

$\therefore$ $CA = 10$, ઉપરાંત O BC નું મધ્યબિન્દુ છે.

$\therefore$ $OC = 5$ અને AO સમભુજ $\triangle$ ની મધ્યગા છે.

$\therefore$ $AO = 5\sqrt{3}$.

તેથી હવે સ. ક. (1) માંથી પ્રાપ્ત થશે કે

$$\frac{W}{10} = \frac{R}{5\sqrt{3}} = \frac{T}{5}$$

$$\therefore \qquad T = \tfrac{1}{2}W,\ R = \frac{\sqrt{3}}{2}W.$$

વળી R $\angle CAB$ દુભાગે છે.

$\therefore$ R લંબક જોડે 30° ને ખૂણે કાર્ય કરે છે.

(૨) એક ભારે સમાન દંડ AB નો A છેડો એક લીસી લંબક દિવાલને અડકાડેલો છે. દંડને સ્થિર રાખવા માટે, એક દોરીનો એક છેડો દંડના C $(AC = \frac{1}{4} AB)$ બિન્દુએ બાંધીને તેનો બીજો છેડો દિવાલમાં A થી બરાબર લંબક દિશા ઉપર આવેલા બિન્દુએ બાંધી દીધેલો છે. દંડને ઉપરની લંબક દિશા જોડે લઘુકોણ બનાવતી સ્થિતિમાં સમતુલિત રાખવા માટે કેટલી લંબાઈની દોરી જોઈશે ?

આ ઉદાહરણમાં દંડનો A છેડો દિવાલ સાથે જડી દીધેલો નથી. દંડ દિવાલને ફક્ત અડકે છે. A બિન્દુ દિવાલ પર ઉપર કે નીચે સરકી શકશે. તેથી A ઉપરની પ્રતિક્રિયા દિવાલને લંબ થશે, એટલે કે તે ક્ષૈતિજ થશે. આ રીતે અગાઉથી પ્રતિક્રિયાની દિશા જાણવાનું શકય બન્યું. હવે દંડ પર કાર્ય કરતાં બળોની નોંધ લઈએ.

(૧) તેના મધ્યબિન્દુ G એ કાર્ય કરતું તેનું વજન.

(૨) A ઉપરની ક્ષૈતિજ પ્રતિક્રિયા.

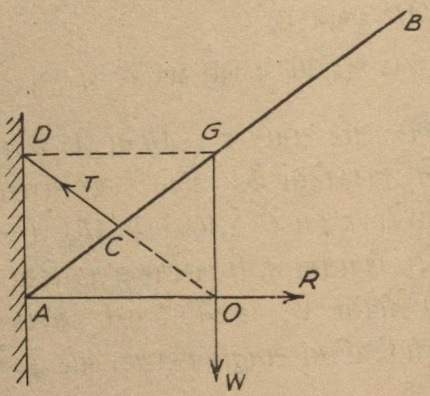
આ બે બળો O માં મળે છે.

$\therefore$ દોરીનો તણાવ T પણ O માંથી પસાર થવો જોઈએ.

OC જોડી દો, અને તેને લંબાવીને દિવાલને Dમાં મળવા દો. CD દોરી હોવી જોઈએ.

(૩) ત્રીજું બળ એ દોરી CD નો તણાવ T.

દોરીની લંબાઈ શોધવા માટે આપણે CD ની લંબાઈ શોધવી રહી. યંત્રવિદ્યાના સિદ્ધાન્તોનો ઉપયોગ કરીને આપણે આકૃતિ દોરી છે. હવે તો આપણે આકૃતિ સામે જોઈ, આપણા ભૂમિતિના જ્ઞાનનો ઉપયોગ કરવો રહ્યો અને એ રીતે CD ની કિંમત જાણવી રહી. ચાલો ત્યારે એ રીતે આગળ વધીએ. GD જોડી આપો.



આકૃતિ ૫૯

ચતુષ્કોણ $AOGD$નો એક વિકર્ણ AG C માં દુભાગાયો છે. પરંતુ હવે જોઈ શકાશે કે $AOGD$ સ. બા. ચ. કોણ છે અને તેથી તેના બીજા વિકર્ણનું મધ્યબિન્દુ પણ C થશે.

$\therefore \qquad CD = CO.$

હવે $\angle AOG = 1$ કાટખૂણો. તેથી તે એક અર્ધવર્તુળમાં આવેલો હોવો જોઈએ.

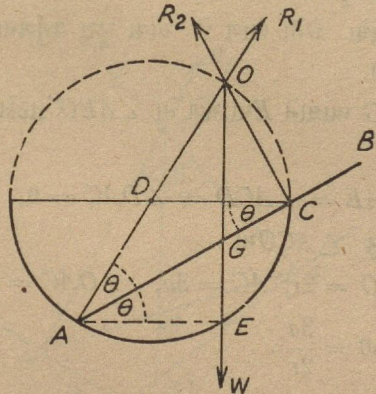
$\therefore \qquad AC = CG = CO$

$\therefore \qquad CO = \frac{1}{4}\ AB$

$\therefore \qquad CD = \frac{1}{4}\ AB$

દોરીની લંબાઈ $\frac{1}{4}\ AB$ છે.

(૩) $4a$ લંબાઈનો એક સમાન દંડ એક અર્ધગોળાકાર પ્યાલામાં થોડો બહાર ને થોડો અંદર પડેલો છે. તેનો A છેડો પ્યાલાની અંદર ગોઠવાઈને અડકેલો છે જ્યારે તેનું C બિન્દુ પ્યાલાની ક્ષૈતિજ કિનારીને અડકેલું છે. જો $CB = a$ હોય તો સિદ્ધ કરો કે દંડ ક્ષિતિજ જોડે $30°$ નો ખૂણો બનાવે છે અને પ્યાલાની ત્રિજ્યા $r = a\sqrt{3}$ છે.



આકૃતિ ૬૦

દંડ પ્યાલાની સપાટીને બે જગ્યાએ A અને C એ અડકે છે. A અને C અર્ધગોળ ઉપર જડેલાં બિન્દુઓ નથી. દંડનો A છેડો ગોળાકાર સપાટી ઉપર સરકી શકે તેમ છે. તેથી A ઉપરની પ્રતિક્રિયા આ ગોળાકાર સપાટીની લંબ દિશાએ કાર્ય કરશે એટલે કે Aમાંથી પસાર થતી ત્રિજ્યામાં કાર્ય કરશે. જેવું A બિન્દુ, આપણી આકૃતિમાં, વર્તુળમાં નીચે બાજુ સરકશે, તેવું C બિન્દુ, દંડની લંબાઈ ACB ની દિશામાં B તરફ ખસશે. તેથી C ઉપરની પ્રતિક્રિયા દંડની લંબાઈને લંબ દિશામાં કાર્ય કરશે. આ રીતે આપણે અગાઉથી પ્રતિક્રિયાઓની દિશા નક્કી કરી લીધી.

હવે દંડ પર કાર્ય કરતાં બળો લઈએ.

(૧) તેનું વજન W, નીચેની લંબક દિશામાં, દંડના મધ્યબિન્દુએ.

(૨) A ઉપરની પ્રતિક્રિયા R_1, Aમાંથી પસાર થતી ત્રિજ્યાની દિશામાં.

(૩) C ઉપરની પ્રતિક્રિયા R_2, ACB ને લંબ દિશામાં.

આ ત્રણ બળો O બિન્દુમાં મળે છે. હવે આપણે આ આકૃતિની ભૂમિતિનો પૂરેપૂરો ઉપયોગ કરવાનો છે. અને તે રીતે દંડ ક્ષિતિજ જોડે જે θ કોણ બનાવે છે તે શોધવાનો છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે $\angle ACO = 1$ કાટખૂણો.

$\therefore$ તે એક અર્ધવર્તુળમાં રહેલો કોણ છે.

$\therefore$ આપણો પ્યાલો જેનો ભાગ છે એવા પૂરા વર્તુળના પરિઘ પર O બિન્દુ હોવું જોઈએ.

વળી જો OG પ્યાલાને Eમાં મળે તો $\angle AEO$ કાટકોણ થશે અને તેથી AE ક્ષૈતિજ થશે.

$$\therefore \quad \angle GAE = \angle ACD = \angle DAC = \theta.$$

હવે કાટકોણ $\triangle ACO$માં

$$AO = 2r,\ AC = 3a, \quad \angle OAC = \theta.$$

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{3a}{2r}. \qquad (1)$$

હવે આપણે AEને બે ભિન્ન રીતે વ્યક્ત કરીશું.

(૧) $\triangle AGE$ માંથી પ્રાપ્ત થશે કે

$$AE = 2a\cos\theta.$$

(૨) $\triangle AOE$ માંથી પ્રાપ્ત થશે કે

$$AE = 2r\cos\theta.$$

$$\text{અને} \quad \therefore \quad 2r\cos 2\theta = 2a\cos\theta. \qquad (2)$$

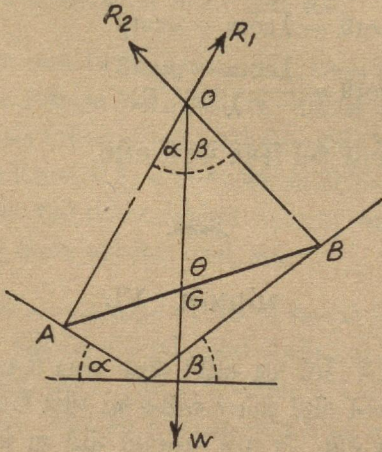
(1) અને (2)માંથી θની કિંમત મળશે તથા r અને a વચ્ચેનો સંબંધ પણ જાણી શકાશે. સ. ક. (1)માંની θની કિંમત સ. ક. (2)માં મૂકો.

$$\therefore \quad r\left(2.\frac{9a^2}{4r^2} - 1\right) = a.\frac{3a}{2r}$$

$\therefore \qquad 3a^2 = r^2$ અર્થાત્ $r = a\sqrt{3}$.

અને હવે સ. ક. (1) તરત જ બતાવશે કે $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ અથવા તો $\theta = 30°$.

એકવાર θ મળી જાય એટલે આકૃતિના સઘળા ખૂણાની કિંમત ગણી શકાય અને પછી આપણે લામીના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીને, જરૂર હોય તો, બન્ને પ્રતિક્રિયાનાં મહત્ત્વ શોધી શકીએ.



આકૃતિ ૬૧

(૪) ક્ષિતિજ જોડે α અને β કોણ બનાવતા બે સામસામા ઢાળ વચ્ચે એક પાટડો મૂકેલો છે. પાટડાનું વજન તેની લંબાઈને λ : μ ના ગુણોત્તરમાં ભાગતા બિન્દુએ કાર્ય કરે છે. પાટડો લંબક જોડે શો કોણ બનાવે છે તે શોધી કાઢો.

પાટડા ઉપર નીચેનાં બળો કાર્ય કરે છે.

(૧) ગુ. કે. માંથી પસાર થતું તેનું વજન.

(૨) A પરની ઢાળની પ્રતિક્રિયા જે ઢાળને લંબ દિશામાં કાર્ય કરે છે.

(૩) B પરની ઢાળની પ્રતિક્રિયા જે તે ઢાળને લંબ દિશામાં કાર્ય કરે છે.

આ ત્રણ બળો O બિન્દુએ મળે છે. OG લંબક છે તેથી આપણે $\angle OGB$ શોધવાનો છે. હવે આ પ્રશ્ન ભૂમિતિનો થયો. એ તો દેખીતું છે કે

$$\angle AOG = \alpha, \quad \angle GOB = \beta.$$

પાના ૧૦૫ ઉપર આપેલું આપણું ત્રિકોણમિતિનું પહેલું સૂત્ર $\triangle AOB$ માટે વાપરતાં જણાશે કે

$$(\lambda + \mu)\cot\theta = \lambda\cot\alpha - \mu\cot\beta$$

$$\therefore \qquad \cot\theta = \frac{\lambda\cot\alpha - \mu\cot\beta}{\lambda + \mu}$$

આ રીતે આપણે θની કિંમત મેળવી શકીશું.

મનોયત્ન VI.

(૧) સાબિત કરો કે કોઈ પણ સીડીને લીસી લંબક દિવાલ જોડે એક છેડો અડકાડીને અને લીસી ક્ષૈતિજ જમીન જોડે બીજો છેડો અડકાડીને સ્થિર ટેકવી શકાય નહિ. તો પછી વાસ્તવમાં સીડી શા માટે ગોઠવી શકાતી હશે?

(૨) એક ભારે સમાન દંડ ABને તેને છેડે બાંધેલી દોરીઓ વડે એક સ્થિર બિન્દુ Oમાંથી લટકાવવામાં આવ્યો છે. જો $OA:OB:AB :: 2:3:4$ હોય તો બતાવો કે દોરીઓના તણાવ $2:3$ છે.

(૩) W વજનનો એક સીધો સમાન દંડ એક ખીંટી ઉપરથી બે દોરી વડે લટકાવવામાં આવ્યો છે. બન્ને દોરીના એક છેડા ખીંટીએ બાંધેલા છે અને બીજા દંડને છેડે બાંધેલા છે. દોરીઓ વચ્ચેનો ખૂણો $90°$ છે, અને એક દોરી બીજી કરતાં લંબાઈમાં બમણી છે. દોરીઓનો તણાવ શોધો.

(૪) 4 ફૂ. લંબાઈનો એક ભારે સમાન દંડ, એક સ્થિર બિન્દુએથી, 7 ફૂ. તથા 5 ફૂ. લંબાઈની બે દોરી વડે લટકાવવામાં આવ્યો છે. સાબિત કરો કે સમતુલાની સ્થિતિમાં દંડ લંબક જોડે $\cos^{-1}\sqrt{3/11}$ નો કોણ બનાવશે.

(૫) l લંબાઈનો એક સમાન દંડ AB લંબક દિવાલમાં A નકૂચા આસપાસ ઘૂમી શકે છે. a લંબાઈની ક્ષૈતિજ દોરીનો એક છેડો Bમાં બાંધીને અને બીજો છેડો દિવાલમાં બાંધીને દંડને ટેકવવામાં આવ્યો છે. દોરીનો તણાવ તથા નકચાનો પ્રતિક્રિયાનાં મહત્ત્વ શોધી કાઢો.

(૬) 8 ફૂ. લાંબા અને 10 પા. વજનના એક સમાન દંડ ABનો A છેડો નકૂચા વડે દિવાલમાં જડી દીધેલો છે. વળી A થી 6 ફૂ. ને અન્તરે આવેલા દંડના C બિન્દુએ દોરીનો એક છેડો બાંધીને અને દિવાલમાં Aથી ઉપર લંબક દિશામાં 6 ફૂ. ને અન્તરે આવેલા D બિન્દુએ દોરીનો બીજો છેડો બાંધીને દંડને ક્ષૈતિજ સ્થિતિમાં ટેકવવામાં આવ્યો છે. નકૂચાની પ્રતિક્રિયાનું મહત્ત્વ અને દિશા શોધી કાઢો.

(૭) 12 પા. વજનનો એક સમાન દંડ AB A બિન્દુએ દિવાલમાં નકૂચા વડે જડેલો છે. અને તેને બીજે છેડે બાંધેલી એક દોરી વડે Aથી ઉપર આવેલા દિવાલના એવા એક C બિન્દુએ તે બાંધેલો છે કે જેથી ત્રિકોણ ABC સમભુજ થાય. સિદ્ધ કરો કે દોરીનો તણાવ 6 પા. વ. છે.

(૮) 5 ફૂ. લંબાઈનો એક અસમાન દંડ દિવાલને લંબ સ્થિતિમાં ટેકવવામાં આવ્યો છે તે માટે તેનો એક છેડો દિવાલ જોડે નકૂચા વડે જડી દેવામાં આવ્યો છે. જ્યારે તેનો છૂટો છેડો દોરડાં વડે દિવાલમાં નકૂચાથી 15 ફૂ. ઉપર આવેલા બિન્દુએ બાંધેલો છે. દંડનું વજન 250 પા. છે, અને તેના છૂટા છેડાથી લંબાઈના $\frac{2}{5}$ ભાગને અન્તરે તે વજન કાર્ય કરે છે. નકૂચાની પ્રતિક્રિયા તથા દોરડાંનો તણાવ શોધો.

(૯) 4 ફૂ. લંબાઈનો એક સમાન દંડ AB દિવાલ જોડે 60° નો ખૂણો બનાવતી સ્થિતિમાં ટેકવેલો છે. તેનો A છેડો લીસી દિવાલને અડકે

છે અને ટેકા માટે Bથી 1 ફૂટને અન્તરે આવેલા C બિન્દુએ દોરીનો એક છેડો બાંધેલો છે, જ્યારે દોરીનો બીજો છેડો A ઉપર દિવાલમાં આવેલા એક હૂક જોડે બાંધેલો છે. તો દિવાલ ઉપર હૂકની સ્થિતિ તથા દોરીનો તણાવ શોધો.

(૧૦) 2 પા. વજનના એક સમાન દંડ ABનો A છેડો એક લીસી દિવાલ ઉપર ટેકવેલો છે જ્યારે તેનો B છેડો BC દોરી વડે દિવાલમાં A ઉપર આવેલા C બિન્દુએ બાંધેલો છે. સિદ્ધ કરો કે દોરીનો તણાવ $\frac{BC}{AC}$ પા. વ. છે.

(૧૧) a લંબાઈના એક સમાન દંડનો એક છેડો એક લીસી લંબક દિવાલ ઉપર ટેકવેલો છે જ્યારે તેનો બીજો છેડો l લંબાઈની એક દોરી વડે દિવાલમાં Aથી ઉપર આવેલા C બિન્દુએ બાંધેલો છે. જો સમતુલાની સ્થિતિમાં દંડ દિવાલ જોડે θ કોણ બનાવે તો સિદ્ધ કરો કે

$$\cos 2\theta = \frac{2l^2 - 5a^2}{3a^2}.$$

(૧૨) ક્ષિતિજ જોડે 30° અને 60° ના ખૂણા બનાવતા એકમેકને કાપતા બે ઢાળ ઉપર, W વજન અને $2a$ લંબાઈના એક દંડના છેડા ટેકવેલા છે. દરેક ઢાળ ઉપરનું દબાણ શોધો અને સમતુલાની સ્થિતિમાં દંડ ક્ષિતિજ જોડે જે કોણ બનાવશે તે પણ શોધો.

(૧૩) ક્ષિતિજ જોડે α અને β કોણ બનાવતા બે સામસામા ઢાળ ઉપર એક ભારે સમાન ગોળો મૂકવામાં આવ્યો છે. જો α ની કિંમત આપેલી હોય અને એમ કહેવામાં આવ્યું હોય કે આ ઢાળ ઉપરનું દબાણ ગોળાના વજન કરતાં અડધું છે તો સિદ્ધ કરો કે β નીચેના સમીકરણમાંથી પ્રાપ્ત થઈ શકશે.

$$(2 - \cos\alpha)\tan\beta = \sin\alpha.$$

(૧૪) W વજન અને r ત્રિજ્યાનો એક ગોળો ક્ષિતિજ સમતલમાં આવેલા બે સમાન્તર દંડ ઉપર ટેકવવામાં આવ્યો છે. જો દંડો વચ્ચેનું અંતર $r\sqrt{2}$ હોય તો પ્રત્યેક દંડની પ્રતિક્રિયાનું મહત્ત્વ શોધો.

(૧૫) a ત્રિજ્યા અને W વજનના એક ગોળાને એક લીસા ઢાળ ઉપર ટેકવવા માટે l લંબાઈની એક દોરી ગોળાને તથા ઢાળ ઉપરના એક બિન્દુને બાંધી રાખેલી છે. જો ઢાળનો ઢોળાવ α હોય તો સિદ્ધ કરો કે દોરીનો તણાવ

$$\frac{W(a+l)\sin\alpha}{\sqrt{(l^2+2al)}} \text{ થશે.}$$

(૧૬) $2a$ બાજુના સમચોરસના આકારનું W વજનનું એક ચિત્ર લંબક સમતલમાં એક ખીંટી ઉપરથી સપ્રમાણ સ્થિતિમાં લટકાવવામાં આવ્યું છે. લટકાવવા માટે તેની એક બાજુને બે ખૂણે બાંધેલી $2l$ લંબાઈની દોરીનો ઉપયોગ કરવામાં આવ્યો છે. સિદ્ધ કરો કે દોરીનો તણાવ

$$\frac{Wl}{2\sqrt{(l^2-a^2)}} \text{ થશે.}$$

(૧૭) એક લીસા અર્ધગોળાકાર પ્યાલામાં ગોલની ત્રિજ્યાના માપનો એક ભારે સમાન દંડ મૂકવામાં આવ્યો છે. દંડનું ગુ. કે. તેના એક છેડાથી લંબાઈના $\frac{1}{3}$ અન્તરે આવેલું છે. સિદ્ધ કરો કે જો દંડ લંબક જોડે θ નો કોણ બનાવે તો $\tan\theta = 3\sqrt{3}$.

(૧૮) જેનું ગુ. કે. તેને a અને b લંબાઈના ભાગોમાં વિભાજીત કરે છે એવો એક દંડ એક લીસા ગોળાની અંદર, ક્ષિતિજ જોડે θ કોણ બનાવતી સ્થિતિમાં મૂકેલો છે. જો દંડ ગોલના કેન્દ્ર ઉપર 2α કોણ આંતરે તો બતાવો કે

$$(b+a)\tan\theta = (b-a)\tan\alpha.$$

(૧૯) એક ભારે સમાન દંડ લીસા અર્ધગોળાકાર પ્યાલામાં થોડો બહાર અને થોડો અન્દર એમ પડેલો છે. પ્યાલાની કિનારી ક્ષૈતિજ છે. અને દંડનું એક બિન્દુ કિનારી જોડે અડકેલું છે. સિદ્ધ કરો કે દંડનો ક્ષિતિજ જોડેનો કોણ θ નીચેના સમીકરણમાંથી પ્રાપ્ત થશે.

$$2\cos 2\theta = k\cos\theta,$$

જ્યાં k દંડની લંબાઈ અને ગોલના વ્યાસનું ગુણોત્તર સૂચવે છે.

(૨૦) એક સમાન દંડ ABનો ઉપરનો A છેડો એક લીસી ખીંટી ઉપર રહેલો છે, જ્યારે તેના નીચેના B છેડાએ એક દોરી બાંધેલી છે. દોરીનો બીજો છેડો Aની જ સપાટીએ આવેલા એક C બિન્દુએ બાંધેલો છે. આ રીતે સમતુલાની સ્થિતિમાં દંડ ક્ષિતિજ જોડે α ખૂણો બનાવે છે. સિદ્ધ કરો કે દોરી ક્ષિતિજ જોડે β કોણ બનાવશે, જ્યાં

$$\tan\beta = 2\tan\alpha + \cot\alpha.$$

વળી સિદ્ધ કરો કે $AC(2\sec^2\alpha - 1) = AB\sec\alpha.$

જવાબો:

(૩) $2\,W/\sqrt{5}$ અને $W/\sqrt{5}$. (૫) $aW/2\sqrt{(l^2-a^2)}$, $W\sqrt{(4l^2-3a^2)}/2\sqrt{(l^2-a^2)}$. (૬) $W\sqrt{5}/3$, ક્ષિતિજ જોડે $\tan^{-1}(1/2)$ ને ખૂણે. (૮) $50\sqrt{5}$ અને $50\sqrt{10}$ પા. વ. (૯) A ઉપર 3 ફૂ., $2W/\sqrt{3}$. (૧૨) $W\sqrt{3}/2$, $W/2$, $30°$. (૧૪) $W/\sqrt{2}$.

પ્રવૈગિકી

[DYNAMICS]

પ્રકરણ ૬

સુરેખામાં ગતિ

૧. પ્રાસ્તાવિક.

સ્થૈતિકીમાં આપણે સમતુલાની શરતોનો અભ્યાસ કર્યો છે. પદાર્થ કે કણ પર કાર્ય કરવા છતાં પણ બળોની અમુક વ્યવસ્થાને કારણે પદાર્થમાં ગતિ ઉત્પન્ન થતી નથી અને સમતુલાની શરતો એટલે બળોની આવી જાતની વ્યવસ્થાનું વર્ણન. સામાન્ય નિયમ તો એ જ ગણાય કે જ્યારે બળો પદાર્થ ઉપર કાર્ય કરે ત્યારે પદાર્થ ગતિ પકડે. પરંતુ આ સામાન્ય નિયમમાં કેટલાક અપવાદો છે. કેટલીક એવી અપવાદરૂપ બળોની વ્યવસ્થા હોઈ શકે છે કે જે વ્યવસ્થા નીચે બળોના કાર્ય છતાં પદાર્થ ગતિ પકડે નહિ. આપણે એમ કહી શકીએ કે સ્થૈતિકીમાં આવી અપવાદરૂપ વ્યવસ્થાઓનો અભ્યાસ કરવામાં આવે છે તેની વિરુદ્ધ પ્રવૈગિકીમાં પદાર્થ ઉપરની બળની નૈસર્ગિક (અપવાદરૂપ નહિ) અસરનો જ અભ્યાસ કરવામાં આવે છે. સ્થૈતિકીનું ક્ષેત્ર અપવાદરૂપ વ્યવસ્થા પૂરતું જ સીમિત હોવાને કારણે જરા સંકુચિત ક્ષેત્ર બને છે. પરંતુ પ્રવૈગિકીમાં બળની પદાર્થ ઉપરની કુદરતી અસરનો અભ્યાસ કરવાનો હોવાથી તેનું ક્ષેત્ર, અભ્યાસ અને ઉપયોગની દૃષ્ટિએ વધુ વિસ્તૃત છે. પુસ્તકના આ ભાગમાં આપણે પ્રવૈગિકીના આ વિસ્તૃત ક્ષેત્રનો અભ્યાસ કરીશું.

૨. પ્રવૈગિકીના બે વિભાગો.

બળો પદાર્થ ઉપર કાર્ય કરે અને તેને પરિણામે પદાર્થ ગતિ પકડે એ વિકલ્પમાં હવે આપણને રસ છે. જ્યારે સ્થૈતિકીમાં તો બળોના કાર્ય કરવા છતાં પણ પદાર્થ સ્થિર રહે એ પરિસ્થિતિ સાથે આપણે સંબંધ હતો. એટલે ત્યાં તો આપણને બળોની વ્યવસ્થામાં જ રસ હતો. પરંતુ પ્રવૈગિકીમાં આપણે બળોને કારણે ગતિ કરતા પદાર્થોનો અભ્યાસ કરવાનો છે એટલે ગતિ ઉત્પન્ન કરતાં

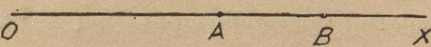
બળોમાં આપણને રસ છે એટલું જ નહિ પરંતુ ગતિ કરતા પદાર્થમાં પણ આપણે એટલો જ રસ લેવો રહેશે. દા. ત. પદાર્થ કેમ ગતિ કરે છે, અમુક સમયે તે ક્યાં હશે, પદાર્થ હમેશાં ગતિ કર્યા જ કરશે કે કોઈ વાર અટકશે, તે શી ઝડપે ગતિ કરે છે, વગેરે અનેક બાબતો જાણવાની ઈચ્છા થશે. પ્રવૈગિકીએ આ અને આવા અનેક પ્રશ્નોના જવાબ આપવા રહેશે. આ તો ગતિ કરતા પદાર્થની વાત થઈ. પરંતુ ગતિ ઉત્પન્ન કરનાર તો બળો છે. કયા પ્રકારનાં બળો કઈ પ્રકારની ગતિ ઉત્પન્ન કરશે, અર્થાત્ બળોનો તેમણે ઉત્પન્ન કરેલી ગતિ સાથે શું સંબંધ છે તે પણ પ્રવૈગિકીએ બતાવવાનો રહેશે.

પ્રવૈગિકીના અભ્યાસનું આયોજન આ બે પાસાંઓ લક્ષમાં રાખીને કરવામાં આવે છે. પહેલાં આપણે ગતિમાન્ પદાર્થો અને તેની ગતિનો વિચાર કરીશું. પછી આપણે આ ગતિ ઉત્પન્ન કરનારાં કારણો — બળો — નો વિચાર કરીશું. પ્રવૈગિકીનો પહેલો ભાગ, જેમાં પદાર્થની ગતિનો અભ્યાસ કરવામાં આવે છે તેને આપણે **ગતિગણિત** કહીશું; જ્યારે બીજો ભાગ જેમાં બળો તથા તેમણે ઉત્પન્ન કરેલી ગતિના કાર્યકારણ સંબંધનો વિચાર કરવામાં આવે છે તેને **ગતિશાસ્ત્ર** કહી શકાય. આ પ્રકરણમાં આપણે ગતિગણિતનો અભ્યાસ કરીશું. એટલે કે ગતિ શાને કારણે ઉત્પન્ન થાય છે તેની ચિંતા કર્યા વગર ફક્ત પદાર્થની ગતિનો અભ્યાસ કરીશું. ગતિ ઉત્પન્ન કરનારાં બળોનો અભ્યાસ આવતા પ્રકરણમાં થશે.

પદાર્થની ગતિના અભ્યાસને સહેલો બનાવવા માટે આપણે સરળતમ પદાર્થ—કણ—થી શરૂઆત કરીશું. આપણે એક કણની ગતિ વિષે પહેલાં વિચાર કરીશું. એક બીજી રીતે પણ અભ્યાસમાં સરળતા દાખલ કરી શકાય. આ પ્રકરણમાં આપણે ફક્ત **સુરેખામાં ગતિ કરતા** કણનો વિચાર કરીશું. એટલે કે આપણે પ્રવૈગિકીની શરૂઆત બીલકુલ "સાદાઈથી" કરીએ છીએ એમ કહી શકાય. આગળના એક પ્રકરણમાં આપણને વક્રરેખામાં ગતિ કરતા કણનો અભ્યાસ કરવાનો પ્રસંગ આવશે પરંતુ આ પુસ્તકમાં ક્યાંય પણ આપણને એક વિસ્તૃત પદાર્થની ગતિના અભ્યાસનો પ્રસંગ સાંપડવાનો નથી. હા, છેલ્લા પ્રકરણમાં એ અભ્યાસ અંગેની તૈયારીરૂપે બે ગતિમાન્ કણોની ગતિ વિષે આપણે વિચાર કરીશું એટલું જ. ટૂંકમાં, પ્રવૈગિકીના આપણા અભ્યાસની આ આછી રૂપરેખા છે. સુરેખામાં ગતિ કરતા એક કણથી શરૂઆત કરીએ.

૩. સ્થળાન્તર, વેગ તથા પ્રવેગ.

એક કણ ગતિ કરે છે ત્યારે તેનું સ્થાન બદલાતું રહે છે. આપણે તેના સ્થાનાન્તર અથવા સ્થળાન્તરની વ્યાખ્યા તેા પહેલા જ પ્રકરણમાં આપી દીધેલી છે. આપણે જાણીએ છીએ કે સ્થળાન્તર એક સદિશ છે અને બે સ્થળાન્તરોના સરવાળેા સદિશ નિયમ પ્રમાણે કે સ. બા. ચ. કોણના નિયમ પ્રમાણે થઈ શકે છે.



આકૃતિ ૬૨

સ્થળાન્તરનેા થેાડો વધુ વિગતવાર અભ્યાસ અહિં કરવાનેા છે. આપણે ફક્ત સુરેખામાં જ ગતિ કરતા કણનેા વિચાર કરીએ છીએ તેથી આપાણું કામ બહુ સહેલું થઈ જાય છે.

જે સુરેખામાં કણ ગતિ કરે છે તેને OX કહેા. કણ O માંથી ગતિની શરૂઆત કરે છે એટલે કે O પ્રસ્થાનબિન્દુ છે. જેમ જેમ કણ ગતિ કરતું જશે તેમ તેમ તેની સ્થિતિ બદલતી રહેશે. થેાડા સમય બાદ ધારો કે કણ કોઈ A બિન્દુએ પહેાંચ્યું. તેનું સ્થળાન્તર **OA** થયું. ગતિ તેા ચાલુ જ રહે છે એટલે કણ આગળ વધતું જ જાય છે અને વળી થેાડા સમય બાદ કણ કોઈ બીજા B બિન્દુએ પહેાંચશે. હવે તેનું સ્થળાન્તર **OB** થશે. આ સ્થળાન્તરો અંગે બે મુદ્દાઓ ઉપર આપણું ધ્યાન તરત જ ખેંચાય છે.

(૧) બન્ને સ્થળાન્તરો **OA** અને **OB**ની દિશા એક જ સુરેખા OXમાં છે. આ તેા તદ્દન દેખીતું જ છે કારણ કે કણ OX સુરેખામાં ગતિ કરે છે તેથી તેનાં સ્થળાન્તરો આ જ સુરેખામાં થાય એટલે હવે સ્થળાન્તરોનાં મહત્ત્વ ઉપર જ ભાર દેવાનેા રહેશે; તેમની દિશા ગતિરેખામાં છે એ તેા અધ્યાહાર્ય ગણી લેવાશે.

(૨) જેમ કણ ગતિ કરતું જાય છે તેમ તેનું સ્થળાન્તર બદલતું જાય છે. Oમાં સ્થળાન્તર શૂન્ય હતું. જ્યારે કણ A બિન્દુએ પહેાંચ્યું ત્યારે સ્થળાન્તર OA થયું. B ઉપર OB થયું. સ્વાભાવિક રીતે આપણા મનમાં પ્રશ્ન ઊઠશે.

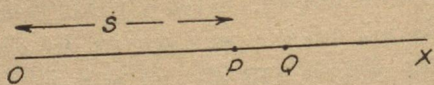
કણ સ્થળાન્તર કેવી રીતે બદલે છે? આ પ્રશ્નનો જવાબ આપણને વેગના ખ્યાલ તરફ લઈ જાય છે. આપણે વેગની નીચે મુજબ વ્યાખ્યા કરીશું:

વેગ: સ્થળાન્તરના ફેરફારના દરને વેગ કહેવાય છે.

સ્થળાન્તર સદિશ છે. તેથી તેનો ફેરફાર પણ સદિશ થશે. અને તેથી તે ફેરફારનો દર પણ સદિશ થવાનો. આ રીતે સ્પષ્ટ થાય છે કે વેગ સદિશ છે. પરંતુ અત્યારે આપણને સુરેખાગતિમાં રસ છે એટલે વેગની દિશા હમેશાં ગતિ-રેખામાં જ હશે અને તેથી સામાન્ય રીતે આપણે વેગના મહત્ત્વ ઉપર જ ભાર દઈશું. આપણે હવે ગતિના કોઈ પણ સમયે વેગના મહત્ત્વ માટેની અભિ-વ્યક્તિ શોધી કાઢીશું.

આ. (૬૩) જુઓ. કણ Oમાંથી નીકળીને OX સુરેખામાં ગતિ કરે છે. પ્રસ્થાન પછી t સેકન્ડ બાદ, ધારો કે કણ P પહોંચ્યું છે. ત્યારે તેનું સ્થળાન્તર $OP=s$ થયું. જેમ સમય વીતતો જશે તેમ તેમ કણ ગતિ કરતું જશે એટલે કે તેનું સ્થાન બદલતું જશે અથવા તો s બદલતો જશે. ટૂંકમાં, આપણે કહીશું કે જેમ t બદલતો જશે તેમ s પણ બદલતો જશે. s એ tનું વિધેય છે.

$$s = f\ (t).$$



આકૃતિ ૬૩

હવે t અને s કેમ વધઘટ થાય છે તે આપણે જોઈએ.

ધારો કે t બદલાઈને $t+\delta t$ થાય છે. ત્યારે કણ Pમાંથી ખસીને બાજુના કોઈ Q બિન્દુએ પહોંચ્યું હશે. તેનું સ્થળાન્તર $OQ = s + \delta s$ થશે. એટલે કે સ્થળાન્તરમાં ફેરફાર

$$= (s + \delta s) - s = \delta s \text{ થયો.}$$

Pથી Q સુધીમાં સ્થળાન્તરના ફેરફારનો સરેરાશ દર

$$\frac{\delta s}{\delta t} \text{ થશે.}$$

પરંતુ આ સ્થળાન્તરના ફેરફારનો દર બરાબર P બિન્દુએ કેટલો છે તે જાણવા માટે આપણે Q ને P ની નજદિક ને નજદિક લઈ જવું પડશે અને જેમ Q Pની નજદિક જતું જાય તેમ સમયાન્તર δt ઘટતું જાય અને છેવટે જ્યારે $Q \to P$ ત્યારે $\delta t \to 0$.

$\therefore$ બરાબર P બિન્દુ ઉપરનો વેગ

$$= \underset{\delta t \to 0}{Lt} \frac{\delta s}{\delta t}$$

$$= \frac{ds}{dt}.$$

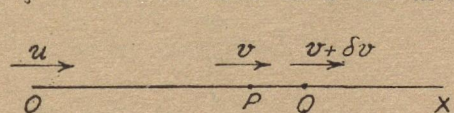
જો P ઉપર વેગનું મહત્ત્વ v હોય તો

$$v = \frac{ds}{dt}. \qquad (1)$$

આ છે વેગ માટેની સામાન્ય અભિવ્યકિત.

પ્રવેગ: ગતિમાન કણનો કોઈ પણ સમયે પ્રવેગ તે તે સમયે કણના વેગની વૃદ્ધિનો દર છે.

હવે વેગ સદિશ છે. તેથી પ્રવેગ પણ સદિશ થશે. પરંતુ હાલને તબક્કે જ્યારે આપણે સુરેખાગતિનો વિચાર કરીએ છીએ ત્યારે પ્રવેગસદિશ હમેશાં ગતિરેખામાં જ રહેશે તેથી આપણે તે સદિશના મહત્ત્વ ઉપર જ ભાર દઈશું. આપણે કોઈ પણ સમયે પ્રવેગના મહત્ત્વ માટેની અભિવ્યકિત શોધી કાઢીશું.



આકૃતિ ૬૪

કણ O માંથી u વેગ સાથે પ્રસ્થાન કરે છે. t સેકન્ડ બાદ તે કોઈ P બિન્દુએ પહોંચશે. અને તે વખતે ધારો કે તેનો વેગ v થશે. જેમ સમય વીતતો જશે તેમ કણનો વેગ બદલતો રહે પણ ખરો. આપણે v ને t નું વિધેય લઈશું.

જ્યારે t બદલાઈને $t + \delta t$ થશે,

ત્યારે કણ નજીકના Q બિન્દુએ પહોંચશે અને તેનો વેગ $v + \delta v$ થશે.

$$\text{વેગવૃદ્ધિ} = (v + \delta v) - v$$
$$= \delta v.$$

$\therefore$ વેગવૃદ્ધિનો P થી Q સુધીનો સરેરાશ દર $= \dfrac{\delta v}{\delta t}$.

બરાબર P બિન્દુ ઉપર વેગવૃદ્ધિનો દર શેાધવા માટે આપણે Q ને Pની નજદિક લેતા જઈશું એટલે કે δt ને શૂન્યવત્ કરીશું.

$$\therefore \quad P \text{ ઉપરનો પ્રવેગ} = \underset{\delta t \to 0}{Lt} \frac{\delta v}{\delta t}$$
$$= \frac{dv}{dt}.$$

જો આ પ્રવેગ દર્શાવવા માટે f વાપરીએ તો

$$f = \frac{dv}{dt}. \tag{2}$$

આ રીતે આપણી પાસે બે અભિવ્યકિતઓ થઈ:

$$v = \frac{ds}{dt}, f = \frac{dv}{dt}.$$

આપણે f માટે બે નવાં સૂત્ર પ્રાપ્ત કરીશું. સ. ક. (2) થી શરૂઆત કરો.

$$f = \frac{dv}{dt}$$
$$= \frac{d}{dt}(v)$$
$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)$$
$$= \frac{d^2s}{dt^2}. \tag{3}$$

ફરી પાછું
$$f = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt}$$
$$= \frac{dv}{ds}v$$
$\therefore$
$$f = v\frac{dv}{ds}. \qquad (4)$$

આ રીતે, સમય t, સ્થળાન્તર s, વેગ v અને પ્રવેગ fને જોડતા ચાર જુદા જુદા સંબંધો સ. ક. (1) થી (4) માં આપણે સ્થાપિત કર્યા. આ સંબંધો આપણે એક સાથે નોંધી લઈએ:

$$v = \frac{ds}{dt};$$
$$f = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = v\,\frac{dv}{ds}.$$

અલગ અલગ પ્રકારની ગતિની ચર્ચા કરવા માટે આપણે આ સૂત્રોનો હવે ઉપયોગ કરીશું.

૪. વિભિન્ન પ્રકારની ગતિ.

પ્રકાર (૧). પ્રવેગ વગરની ગતિ:

અહિં પ્રવેગ શૂન્ય છે.

$\therefore$ $f = 0$ અથવા તો $\dfrac{dv}{dt} = 0$

$\therefore$ $v =$ એક અચલ સંખ્યા. (1)

પછી $\dfrac{ds}{dt} = v.$

આ સ. ક. નું t સાપેક્ષ સંકલન કરો.

$\therefore$ $s = \int vdt + A$

પરંતુ v અચલ છે

$\therefore$ $s = vt + A.$ (2)

અહીં A એક અનિર્ણિત અચલ છે અને જ્યારે જ્યારે આપણે સંકલન કરીએ છીએ ત્યારે ત્યારે આવો એક અનિર્ણિત અચલ ઉમેરીએ છીએ. આપણે આ Aની કિંમત નીચે પ્રમાણે શોધી શકીશું. જો કણનું પ્રસ્થાનબિન્દુ O હોય (**આ.** ૬૩ જુઓ) તો ત્યાં $t = 0$ અને $s = 0$. s અને t ની આ કિંમતો સ. ક. (2) માં મૂકો. તેમ કરતાં જણાશે કે

$$0 = v \times 0 + A \text{ અર્થાત્ } A = 0.$$

$\therefore$ સ. ક. (2) હવે $s = vt$ થશે.

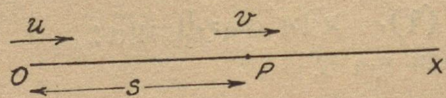
$\therefore$ જ્યારે $f = 0$ હોય ત્યારે

$$v = \text{અચલ અને } s = vt.$$

પ્રકાર (૨). અચલ પ્રવેગ સાથેની ગતિ:

આપણે રીતસર પ્રશ્નની પ્રતિજ્ઞા કરીએ.

એક કણ O બિન્દુએથી u વેગ સાથે પ્રસ્થાન કરે છે અને અચલ પ્રવેગ સાથે સુરેખા OX માં ગતિ કરે છે. તેની ગતિનું વર્ણન કરો.



આકૃતિ ૬૫

પ્રવેગ અચલ છે.

$\therefore \quad f =$ અચલ

પરંતુ $\dfrac{dv}{dt} = f.$

t સાપેક્ષ સંકલન કરો.

$\therefore \quad v = \int f\,dt + A.$

પરંતુ f અચલ છે.

$$\therefore \quad v = ft + A.$$

આ સ. ક. માંથી આપણે કોઈ પણ સમયે કણનો શો વેગ હશે તે જાણી શકીશું; એટલે કે પ્રસ્થાન સમયે પણ કણનો વેગ આ સ. ક. માંથી પ્રાપ્ત થઈ શકશે. પરંતુ પ્રસ્થાન સમયે $t=0$ અને $v=u$. આ બન્ને કિંમતો ઉપલા સ. ક. માં મૂકો.

$$\therefore \quad u = f \times 0 + A \text{ અથવા } A = u.$$

A ની આ કિંમતનો ઉપયોગ કરીને ઉપરનું સમીકરણ આપણે ફરી વાર લખીએ.

$$v = ft + u$$

અથવા
$$\boxed{v = u + ft.} \qquad (1)$$

t સેકન્ડ બાદ કણનું સ્થળાન્તર s શોધવા માટે આપણે (1) માં $v = \dfrac{ds}{dt}$ મૂકીશું. ત્યારે

$$\frac{ds}{dt} = u + ft.$$

ફરી પાછું t સાપેક્ષ સંકલન કરો.

$$\therefore \quad s = \int u dt + \int ft dt + B$$

$$= ut + \frac{ft^2}{2} + B.$$

પ્રસ્થાન શરતો પરથી B શોધી શકાશે. પ્રસ્થાન સમયે $s = 0$, $t = 0$.

તેથી $\quad 0 = u \times 0 + \frac{1}{2} f(0)^2 + B$

$$\therefore \quad B = 0.$$

આ રીતે s માટેનું નીચેનું સૂત્ર પ્રાપ્ત થશે.

$$\boxed{s = ut + \tfrac{1}{2}ft^2}$$

અચલ પ્રવેગ સાથે ચાલતા એક કણની ગતિ સમજવા માટે આપણે બે સૂત્રો કલનની મદદથી પ્રાપ્ત કર્યાં. હવે બીજગણિતનો ઉપયોગ કરીને આ બે સૂત્રોમાંથી બીજાં બે સૂત્રો મેળવીશું.

પહેલાં તો આપણે સ. ક. (1) અને (2) વચ્ચે tનું નિરસન કરીશું.

સ. ક. (1) લો.

$$v = u + ft.$$

$$\therefore \quad \frac{v-u}{f} = t.$$

t ની આ કિંમત સ. ક. (2) માં મૂકો.

$$\therefore \quad s = ut + \tfrac{1}{2}ft^2$$

$$= u\left(\frac{v-u}{f}\right) + \tfrac{1}{2}f\left(\frac{v-u}{f}\right)^2$$

$$= \frac{uv-u^2}{f} + \frac{v^2+u^2-2uv}{2f}$$

$$\therefore \quad 2fs = 2uv - 2u^2 + v^2 + u^2 - 2uv$$

$$\therefore \quad \boxed{v^2 = u^2 + 2fs} \qquad (3)$$

પછી આપણે સ. ક. (1) અને (2) વચ્ચે fનું નિરસન કરીશું.

સ. ક. (1) લો.

$$v = u + ft.$$

$$\therefore \quad \frac{v-u}{t} = f.$$

સ. ક. (2) માં f ની આ કિંમત મૂકો.

$$\therefore \quad s = ut + \tfrac{1}{2}ft^2$$
$$= ut + \tfrac{1}{2}\frac{v-u}{t}\cdot t^2$$
$$= ut + \tfrac{1}{2}vt - \tfrac{1}{2}ut$$
$$= \tfrac{1}{2}ut + \tfrac{1}{2}vt$$
$$\therefore \quad \boxed{s = \frac{v+u}{2}t} \qquad (4)$$

સુરેખામાં અચલ પ્રવેગથી ગતિ કરતા કણની ગતિનું વર્ણન કરવા માટે (1), (2), (3) અને (4) એમ ચાર સૂત્રો આપણે મેળવ્યાં. એક મુદ્દાની તરત જ નોંધ લેવી જોઈશે. s, v અને f સદિશ સંખ્યાઓ છે. સુરેખાગતિ માટે તેઓની દિશા ગતિની રેખામાં જ હશે. પરંતુ તે રેખામાં તેઓ ડાબીથી જમણી તરફ (એટલે કે O થી X તરફ) હોઈ શકે યા તો જમણીથી ડાબી તરફ (એટલે કે X થી O તરફ) હોઈ શકે. જો O થી X તરફની સંખ્યાઓને ધન ગણીએ તો X થી O તરફની સંખ્યાઓને ઋણ ગણવી જોઈએ. ઋણ પ્રવેગને કોઈક વાર પ્રતિપ્રવેગ પણ કહે છે.

આ સૂત્રોનો ઉપયોગ દર્શાવતાં કેટલાંક ઉદાહરણો હવે આપણે લઈશું.

૫. ઉદાહરણો.

(૧) એક ગાડી A માંની તેની સ્થિર સ્થિતિમાંથી $\frac{1}{2}$ ફૂ. દર સેકન્ડ પ્રતિ સેકન્ડના પ્રવેગથી પ્રસ્થાન કરે છે. 2 મિનિટ પછી તે તેનો પૂર્ણ વેગ પ્રાપ્ત કરે છે અને તે અચલ વેગથી 11 મિનિટ સુધી દોડે છે. પછી બ્રેક લગાડવામાં આવે છે અને ગાડી B બિન્દુએ સ્થિર થાય છે. જો બ્રેકથી 5 ફૂ./સેક^2. નો પ્રતિપ્રવેગ ઉત્પન્ન થતો હોય તો AB અંતર શોધો.

આખી ગતિને ત્રણ ભાગોમાં વિભાજીત કરી શકાય.

(૧) પ્રવેગગતિ, (૨) અચલવેગગતિ, (૩) પ્રતિપ્રવેગગતિ.

(૧) પ્રવેગગતિ :

આ ગતિ 2 મિનિટ એટલે કે 120 સેકન્ડ ચાલે છે. આ સમયાન્તર બાદ ધારો કે વેગ v ફૂ. પ્રતિ સેકન્ડ થયો અને ગાડીએ s_1 અન્તર કાપ્યું તો

$v = u + ft$ માંથી પ્રાપ્ત થશે કે

$$v = 0 + \frac{1}{2} \times 120 = 60 \text{ ફૂ./સેક.}$$

અને　$s = ut + \frac{1}{2}ft^2$ માંથી પ્રાપ્ત થશે કે

$$s_1 = 0 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times (120)^2 = 3600 \text{ ફૂ.}$$

(૨) અચલવેગગતિ :

આ ગતિ 60 ફૂ./સેક. ના અચલ વેગથી થાય છે અને તે 11 મિનિટ એટલે કે 660 સેકન્ડ સુધી ચાલે છે. જો આ દરમિયાન ગાડી s_2 અન્તર કાપે તો

$$s_2 = vt = 60 \times 660 = 39600 \text{ ફૂ.}$$

(૩) પ્રતિપ્રવેગગતિ :

અહિં કેટલો સમય આ ગતિ ચાલુ રહે છે તે આપેલું નથી. પરંતુ પ્રસ્થાન-વેગ 60 ફૂ. પ્રતિ સેકન્ડ છે અને અંતિમ વેગ શૂન્ય છે તે આપણે જાણીએ છીએ. જો ગાડી s_3 ફૂ. નું અન્તર કાપે તો

$v^2 = u^2 + 2fs$ માંથી પ્રાપ્ત થશે કે

$$0 = (60)^2 \times 2(-5)s_3$$

$$\therefore \quad s_3 = 360 \text{ ફૂ.}$$

આખું અન્તર AB છે.

$$\therefore \quad AB = s_1 + s_2 + s_3$$

$$= 43560 \text{ ફૂ.} = 8{\cdot}25 \text{ માઈલ.}$$

(૨) સુરેખામાં ગતિ કરતું એક કણ તેની ગતિની બીજી સેકન્ડમાં 16 ફૂ., પાંચમી સેકન્ડમાં 28 ફૂ. અને અગિયારમી સેકન્ડમાં 52 ફૂ. અન્તર કાપે છે. સિદ્ધ કરો કે આ અન્તરો

કણનો પ્રવેગ અચલ છે એમ દર્શાવે છે; તદુપરાંત ગતિની શરૂઆતથી 10 સેકન્ડની અન્દર કણ કેટલું કુલ અન્તર કાપશે તે શોધી કાઢો.

ધારી લો કે ગતિ અચલ પ્રવેગ f થી થાય છે અને પ્રસ્થાન વેગ u છે. જો કણ પ્રસ્થાન પછી 1 સેકન્ડમાં s_1 અન્તર કાપે અને 2 સેકન્ડમાં s_2 અન્તર કાપે તો

$s_2 - s_1 =$ બીજી સેકન્ડમાં કપાયેલું અન્તર

$= 16$ ફૂ.

એ જ પ્રમાણે $s_5 - s_4 =$ પાંચમી સેકન્ડમાં કપાયેલું અન્તર

$s_{11} - s_{10} =$ અગિયારમી ,, ,, ,,

હવે $$s = ut + \tfrac{1}{2}ft^2$$

$\therefore$ $$s_1 = u \times 1 + \tfrac{1}{2}f(1)^2,$$

$$s_2 = u + 2 + \tfrac{1}{2}f(2)^2.$$

$\therefore$ $$s_2 - s_1 = u + \tfrac{1}{2}f(3).$$

$\therefore$ $$u + \frac{3f}{2} = 16 \qquad (1)$$

એ જ પ્રમાણે $$s_5 - s_4 = 28.$$

$\therefore$ $$u + \frac{9f}{2} = 28 \qquad (2)$$

અને $$s_{11} - s_{10} = 52.$$

$\therefore$ $$u + \frac{21f}{2} = 52. \qquad (3)$$

u અને f શોધવા માટે (1), (2) અને (3) એ ત્રણ સમીકરણો છે. આપણે સ. ક. (1) અને (2) છોડીશું અને તેમાંથી u તથા f ની કિંમત કાઢીશું. હવે જો અચળ પ્રવેગની આપણી માન્યતા સાચી હશે તો u અને f ની આ કિંમતો વડે ત્રીજું સમીકરણ સંતોષાવું જોઈશે. સ.ક. (2)માંથી સ. ક. (1) બાદ કરો.

તેમ કરતાં માલૂમ પડશે કે $3f = 12$ અથવા $f = 4$. હવે સ. ક. (1) u ની કિંમત આપશે. $u = 10$. આપણે હવે ખાત્રી કરી લઈએ કે $u = 10$ અને $f = 4$ સ. ક. (3) ને સંતોષી શકશે. આપણી અચલ પ્રવેગની માન્યતા સાચી ઠરી.

પ્રસ્થાન પછી 10 સેકન્ડની અન્દર કપાયેલું કુલ અન્તર હવે શોધી શકાશે.

$$s = ut + \tfrac{1}{2}ft^2$$
$$= 10 \times 10 + \tfrac{1}{2} \times 4 \times 100$$
$$= 300 \text{ ફૂ.}$$

(૩) જો એક એક્સ્પ્રેસ ગાડી અડધા માઈલનું અન્તર કાપતાં તેની ઝડપ કલાકના 60 માઈલથી ઘટાડીને કલાકે 15 માઈલ કરી નાખે તો તે માટે બ્રેક કેટલા સમય સુધી લગાડી હશે? જો બ્રેક ચાલુ રાખવામાં આવે તો ગાડી 16 સેકન્ડ બાદ સ્થિર થશે; તે દરમિયાન ગાડી કેટલું અન્તર કાપશે?

અલબત્ત, આપણે માની લઈશું કે બ્રેકથી લાગતો પ્રતિપ્રવેગ અચળ છે. જ્યારે વેગ કલાકના 60 માઈલથી ઘટીને કલાકે 15 માઈલ થાય છે ત્યારે $u = 60$, $v = 15$ અને $s = \frac{1}{2}$, અને આપણે t શોધવો છે.

$\therefore \quad s = \dfrac{u+v}{2}\, t$ સૂત્ર પરથી માલૂમ પડશે કે

$$\frac{1}{2} = \frac{60 + 15}{2}\, t$$

$$\therefore \quad t = \frac{1}{75} \text{ કલાક}$$
$$= 48 \text{ સેકન્ડ.}$$

પછી વેગ કલાકના 15 માઈલથી ઘટીને શૂન્ય થઈ જાય છે. તે માટે 16 સેકન્ડ એટલે કે $\frac{1}{225}$ કલાક લાગે છે. તે દરમિયાન ગાડી કેટલું અન્તર s કાપશે તે આપણે શોધવું છે. ચાલો ત્યારે

$s = \frac{v+u}{2}\,t$ એ જ સૂત્રનો ફરી ઉપયોગ કરીએ.

$$\therefore \quad s = \frac{15+0}{2} \times \frac{1}{225} = \frac{1}{30} \text{ માઈલ}$$

$$= 176 \text{ ફૂ.}$$

આ દાખલામાં એકમ તરીકે માઈલ અને કલાકનો ઉપયોગ કર્યો છે, તેને બદલે ફૂટ અને સેકન્ડનો પણ ઉપયોગ કરી શકાય. તેમ કરવા માટે નીચેનો સંબંધ યાદ રાખવો ઠીક પડશે:

કલાકે ૩૦ માઈલ = સેકન્ડે 44 ફૂ.

અથવા ૩૦ માઈલ/કલાક = 44 ફૂ./સેકન્ડ.

૯. ગુરુત્વાકર્ષણથી પડતાં કણો.

એક પત્થરના ટુકડાને હાથમાં પકડીને પછી છોડી દઈએ તો તે જમીન ઉપર પડે છે. પ્રવૈગિકીની ભાષામાં આપણે એમ કહીશું કે પત્થર નીચે તરફની લંબક સુરેખામાં ગતિ કરે છે. કોઈ પણ સમયે તેનો વેગ, પ્રવેગ વગેરે કેટલાં છે તે જાણવાની આપણને સ્વાભાવિક ઈચ્છા થાય. નિર્બંધ રીતે નીચે પડતા પદાર્થોના પ્રવેગ માપવાના પ્રયોગો યોજવાનું માન વિખ્યાત વિજ્ઞાની ગેલીલીઓને મળે છે. તેણે પ્રયોગો દ્વારા પડતા પદાર્થોનો પ્રવેગ શોધી કાઢ્યો. અનેક જુદા જુદા પદાર્થો લઈને તે પીસાના ઢળતા ટાવર ઉપર ગયો. આ સઘળા પદાર્થો વજનદાર હતા પરંતુ તેઓનાં વજન જુદાં જુદાં હતાં. તે સઘળા પદાર્થોને તેણે ટાવર ઉપરથી નીચે પાડવા માટે એક જ સમયે છોડયા. તેણે જોયું કે તે સર્વ પદાર્થો જમીન ઉપર પણ એકી સાથે જ પડયા. આ રીતે ગેલીલીઓએ સિદ્ધ કરી બતાવ્યું કે ભિન્ન ભિન્ન વજનના પદાર્થો એક સરખું અન્તર નીચે પડવા માટે એક સરખો સમય લે છે. આપણું $s = ut + \frac{1}{2}ft^2$ સૂત્ર અહિં $s = \frac{1}{2}ft^2$ થશે કારણ કે $u = 0$ છે. હવે ગેલીલીઓએ બતાવ્યું કે જુદા જુદા પદાર્થોને એક જ અન્તર s કાપવા માટે સરખો સમય t લાગે છે એટલે તે સઘળા પદાર્થો માટે f પણ સરખો જ હોવો જોઈએ. ગુરુત્વાકર્ષણની અસર નીચે પડતા સઘળા

પદાર્થો અચલ પ્રવેગથી નીચે પડે છે. સર્વ પડતા પદાર્થોના આ અચલ પ્રવેગને ગુરુત્વાકર્ષણનો પ્રવેગ કહે છે અને તે સૂચવવા માટે g સંકેતનો ઉપયોગ થાય છે. આ પ્રવેગની દિશા નીચે તરફની લંબક છે અને તેનું મહત્ત્વ 32 ફૂ./સેક^2. અથવા 981 સેમી./સેક^2. માલૂમ પડ્યું છે.

પડતા પદાર્થો, અચલ પ્રવેગથી ગતિ કરતા કણનું કુદરતી ઉદાહરણ પૂરું પાડે છે. ગુરુત્વાકર્ષણને કારણે થતી ગતિના સર્વ કિસ્સાઓમાં પ્રવેગનું મહત્ત્વ g અને દિશા નીચે તરફની લંબક લેવી જોઈએ. જો આપણે ફૂ. પા. સે. નાં એકમો વાપરતા હોઈશું તો gની કિંમત 32 લઈશું અને જો સેમી. ગ્રા. સે. એકમોનો ઉપયોગ કરતા હોઈશું તો gની કિંમત 981 લઈશું. gની દિશા નીચે તરફની લંબક છે એટલે કે જો પ્રત્યેક સદિશ સંખ્યાની દિશા નીચે તરફની લંબક હશે તો આપણે $f = +g$ લઈશું પરંતુ જો પ્રત્યેક સદિશ (u, v, s વગેરે) ની દિશા ઉપર તરફની લંબક હશે તો આપણે $f = -g$ લઈશું. આ વસ્તુ નીચેનાં ઉદાહરણો ઉપરથી સવિશેષપણે સ્પષ્ટ થશે.

૭. ઉદાહરણો.

(૧) u વેગથી એક પત્થરને ઉપર ફેંકવામાં આવે છે. સિદ્ધ કરો કે તે $\frac{u^2}{2g}$ ઊંચાઈ સુધી ઉપર જશે અને પ્રસ્થાનબિન્દુએ પાછા પડતાં તેને કુલ $\frac{2u}{g}$ સેકન્ડ લાગશે.

પત્થર ઉપર તરફ ફેંકાયો છે. ઉપર તરફના સદિશોને આપણે ધન ગણીશું. એટલે નીચે તરફના સદિશો ઋણ થશે.

$$\therefore \qquad f = -g.$$

આપણાં સૂત્રો $v = u + ft$ બદલાઈને $v = u - gt$ થશે.

$$s = ut + \tfrac{1}{2}ft^2 \quad ,, \quad s = ut - \tfrac{1}{2}gt^2 \text{ થશે.}$$

$$v^2 = u^2 + 2fs \quad ,, \quad v^2 = u^2 - 2gs \text{ થશે.}$$

ઉચ્ચતમ બિન્દુ A ઉપર $v=0$ થશે એટલે તેની ઊંચાઈ $AO=s$ ઉપરના ત્રીજા સૂત્રમાંથી મળી શકશે.

$$0=u^2-2gs \text{ અથવા તો } s=\frac{u^2}{2g}.$$

આકૃતિ ૬૫

હવે જ્યારે પત્થર પ્રસ્થાન બિન્દુએ પાછો આવે છે ત્યારે તેનું કુલ સ્થળાન્તર શૂન્ય થાય છે. એટલે ઉપરના બીજા સૂત્રમાં આપણે $s=0$ મૂકી દઈશું.

$$0=ut-\tfrac{1}{2}gt^2$$

$$\therefore \quad t(u-\tfrac{1}{2}gt)=0$$

$$\therefore \quad t=0 \text{ અથવા } t=\frac{2u}{g}.$$

$t=0$ પ્રસ્થાનનો સમય દર્શાવે છે, જ્યારે $t=\dfrac{2u}{g}$ એ પત્થરની સફરના અન્તનો સમય દર્શાવે છે; કારણ કે આ બન્ને પ્રસંગોએ પત્થર પ્રસ્થાન બિન્દુ A ઉપર છે, જ્યાં $s=0$ છે.

(૨) 400 ફૂ. ઊંચા એક ટાવરના ભોંયતળિયેથી, એક કણને તે બરાબર ટાવરના મથાળા સુધી પહોંચી શકે એવા વેગથી

ઉપર તરફ ફેંકવામાં આવે છે. એક સેકન્ડ બાદ બીજો પત્થર ટાવરના મથાળા પરથી નીચે તરફ છોડવામાં આવે છે. બે પત્થરો ક્યાં ને ક્યારે મળશે?

ધારો કે પહેલો પત્થર ઉપર તરફ u વેગથી ફેંકવામાં આવ્યો છે. આ વેગને કારણે તે બરાબર ટાવરના મથાળા સુધી જ જઈ શકે છે એટલે કે જ્યારે તે ટાવરને મથાળે પહોંચશે ત્યારે તેનો વેગ શૂન્ય થઈ જશે.

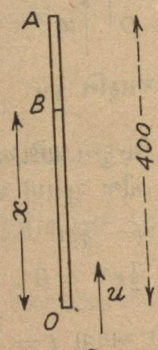
$v^2 = u^2 + 2fs$ એ સૂત્રમાંથી માલૂમ પડશે કે

$$0 = u^2 + 2(-g)(400)$$

$$= u^2 - 64 \times 400$$

$$\therefore \quad u = 160 \text{ ફૂ./સેકન્ડ.}$$

પહેલા પત્થરનો પ્રસ્થાનવેગ 160 ફૂ./સેક. છે.



આકૃતિ ૬૬

ધારો કે બન્ને પત્થરો O થી x ફૂ. ને અન્તરે આવેલા B બિન્દુએ મળે છે અને ત્યારે પહેલા પત્થરને પ્રસ્થાનથી t સેકન્ડનો સમય થયો હોય છે. તો પહેલો પત્થર t સેકન્ડમાં x ફૂ. નું અન્તર કાપે છે.

$\therefore \quad s = ut + \frac{1}{2}ft^2$ માંથી માલૂમ પડશે કે

$$x = 160t + \tfrac{1}{2}(-32)t^2 \qquad (1)$$

$$\therefore \quad x = 160t - 16t^2.$$

બીજો પત્થર એક સેકન્ડ મોડો નીકળે છે. તેથી તે $t-1$ સેકન્ડમાં $AB = (400-x)$ ફૂ. નું અન્તર કાપે છે.

ફરી પાછા આપણે $s = ut + \frac{1}{2}ft^2$ સૂત્રનો ઉપયોગ કરીશું.

$$\therefore \quad 400 - x = 0(t-1) + \tfrac{1}{2}(32)(t-1)^2$$

$$\therefore \quad 400 - x = 16(t-1)^2. \qquad (2)$$

સ. ક. (1) અને (2) છોડવાથી x અને t મળી શકશે. સ. ક. (1) માં x ની કિંમત કાઢીને સ. ક. (2) માં મૂકો.

$$\therefore \quad 400 - 160t + 16t^2 = 16(t-1)^2$$

$$\therefore \quad 128t = 384.$$

$$\therefore \quad t = 3 \text{ સેકન્ડ.}$$

t ની આ કિંમત સ. ક. (1) માં મૂકો.

$$\therefore \quad x = 160 \times 3 - 16 \times 9$$

$$= 339 \text{ ફૂ.}$$

બે પત્થરો ટાવરના તળિયેથી 339 ફૂ. ને અંતરે, પહેલા પત્થરના પ્રસ્થાન સમયથી 3 સેકન્ડ બાદ એકબીજાને મળે છે.

મનોયત્ન VII.

(૧) એક પદાર્થનો પ્રસ્થાનવેગ 20 ફૂ. પ્રતિસેકન્ડ છે અને તેનો પ્રવેગ 32 ફૂ./સેક^2. છે. તો 1800 ફૂ. નું અન્તર કાપવા માટે તેને કેટલો સમય લાગશે ?

(૨) એક આગગાડીનો કલાકે 20 માઈલનો વેગ 10 મિનિટમાં ઘટીને કલાકે 5 માઈલનો થઈ જાય છે. તો તે દસ મિનિટમાં આગગાડીએ કેટલું અંતર કાપ્યું હશે?

(૩) કલાકે 30 માઈલની ઝડપથી જતી આગગાડી અચલ પ્રતિપ્રવેગની અસર નીચે 1 મિનિટ 28 સેકન્ડમાં સ્થિર સ્થિતિએ આવી જાય છે. પ્રતિપ્રવેગનું મહત્ત્વ શોધો. આ સમયમાં ગાડી કેટલું અંતર કાપશે તે પણ શોધો.

(૪) કલાકે 30 માઈલની ઝડપે જતા એક એન્જીનનો ડ્રાઈવર પોતાની સામે 300 વારને અન્તરે એક સ્થિર ઊભેલી પેસેન્જર ગાડી જુએ છે. બ્રેક લાગવાથી વધુમાં વધુ પ્રતિપ્રવેગ 2 ફૂ./સેક^2. પ્રાપ્ત થઈ શકે તેમ છે. ડ્રાઈવર અકસ્માતથી ગાડીને બચાવી શકશે કે કેમ?

(૫) સ્થિર સ્થિતિમાં પ્રસ્થાન કરતો એક પદાર્થ તેની ગતિની છઠ્ઠી સેકન્ડમાં 330 ફૂ. નું અન્તર કાપે છે તો દસમી સેકન્ડમાં અને 10 સેકન્ડમાં તે કેટલું અન્તર કાપશે તે શોધી કાઢો.

(૬) એક કણને 170 ફૂ. પ્રતિ સેકન્ડના વેગથી ઉપર તરફ લંબક દિશામાં ફેંકવામાં આવે છે. કેટલા સમય બાદ તે *A* થી ઉપર 100 ફૂ. ને અન્તરે આવેલા *B* બિન્દુમાંથી પસાર થશે? બે જવાબો શા માટે આવે છે તે સમજાવો.

(૭) 48 ફૂ. ઊંચા એક ટાવરના મથાળેથી એક દડો ઉપર તરફ 32 ફૂ. પ્રતિ સેકન્ડના વેગથી ઉછાળવામાં આવે છે. દડો ટાવરને તળિયે ક્યારે પહોંચશે?

(૮) 256 ફૂ. ઊંચા એક ટાવર ઉપરથી ઉપર તરફ એક પત્થરને 64 ફૂ. પ્રતિ સેકન્ડના વેગથી ઉછાળવામાં આવે છે. બરાબર એ જ સમયે 192 ફૂ. પ્રતિ સેકન્ડના વેગથી ગોળી છોડતી એક બન્દૂક જમીન ઉપરથી પત્થરની દિશામાં ફોડવામાં આવે છે. ક્યાં અને ક્યારે ગોળી પત્થરને લાગશે તે શોધી કાઢો.

(૯) એક પત્થરને ઉપર તરફ લંબક દિશામાં ફેંકવામાં આવ્યો છે. અને 5 સેકન્ડ બાદ તે જમીન પર પાછો પડે છે. વધારેમાં વધારે તે કેટલી ઊંચાઈએ ગયો હશે?

(૧૦) એક પત્થર કૂવામાં ફેંક્યા બાદ તેનો પાણી સાથે અફળાવાનો અવાજ $\frac{75}{14}$ સેકન્ડ પછી સંભળાયો. જો અવાજનો વેગ પ્રતિ સેકન્ડ 1120 ફૂ. હોય તો કૂવામાં પાણીની સપાટીની ઊંડાઈ શોધો.

(૧૧) એક એકસપ્રેસ ગાડીનાં ઊભા રહેવાનાં બે સ્ટેશનો A અને B વચ્ચેનું અન્તર $34\frac{1}{2}$ માઈલ છે. ગાડી Aથી ઊપડે છે અને પહેલા 3 માઈલ સુધી તેનો વેગ અચલ દરે વધારીને કલાકના 36 માઈલનો વેગ પ્રાપ્ત કરે છે. બાકીના 30 માઈલ સુધી તે આ અચલવેગથી સફર કરે છે અને છેલ્લા દોઢ માઈલમાં તેનો વેગ અચલ દરથી ઘટે છે અને છેવટે તે Bમાં આવીને સ્થિર થાય છે. સિદ્ધ કરો કે ગાડીને A થી B સુધી જતાં 65 મિનિટ લાગે છે.

(૧૨) એક મોટરકાર 2 ફૂ./સેક^2. ના પ્રવેગથી ઊપડવાની શરૂઆત કરે છે. બરાબર ત્યારે જ, કલાકે 15 માઈલના અચળ વેગથી સફર કરતો એક સાયકલસ્વાર તેની પાસેથી પસાર થાય છે. મોટરકાર સાયકલસ્વારને ક્યાં અને ક્યારે પકડી પાડશે તે શોધી કાઢો.

(૧૩) એક કણ u વેગથી ઊપડે છે અને અચળ પ્રવેગથી સફર કરે છે. 10 ફૂ. નું અન્તર કાપ્યા પછી તે પ્રતિ સેકન્ડ 20 ફૂ. નો વેગ પ્રાપ્ત કરે છે. અને 15 ફૂ. નું વધારે અન્તર કાપ્યા પછી તેનો વેગ 30 ફૂ. પ્રતિ સેકન્ડ થાય છે. સિદ્ધ કરો કે પ્રસ્થાન પછી 46 ફૂ. નું અન્તર કાપતાં તેનો વેગ 40 ફૂ. પ્રતિ સેકન્ડ થશે અને $u = 8{\cdot}165$ ફૂ. પ્રતિ સેકન્ડ હશે.

(૧૪) બે સ્ટેશનો વચ્ચેનું અન્તર a છે. પહેલા સ્ટેશનેથી f પ્રવેગથી સફર શરૂ કરીને એક ગાડી વચલી કોઈ જગ્યાએ તે પ્રવેગને બદલીને પ્રતિપ્રવેગ f_1 કરી નાખે છે, અને છેવટે બીજા સ્ટેશને આવીને સ્થિર થાય છે. સિદ્ધ કરો કે બે સ્ટેશનો વચ્ચેનું અંતર કાપવા માટે

$$\left\{2a\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{f_1}\right)\right\}^{\frac{1}{2}} \text{ સમય લાગશે.}$$

(૧૫) સિદ્ધ કરો કે સ્થિર સ્થિતિમાંથી શરૂ થતી અચળ પ્રવેગવાળી ગતિ માટે (n^2+n+1)મી સેકન્ડમાં કપાયેલું અન્તર તે પહેલી n સેકન્ડ તથા પહેલી $(n+1)$ સેકન્ડમાં કપાયેલા અન્તરના સરવાળા બરાબર થાય.

(૧૬) અચળ પ્રવેગ fથી એક કણ એક સરળ રેખામાં ગતિ કરે છે તેનો પ્રસ્થાન-વેગ u છે. જો pમી, qમી અને rમી સેકન્ડમાં તે a, b અને c અન્તરો કાપે તો સિદ્ધ કરો કે

$$a(q-r)+b(r-p)+c(p-q)=0.$$

(૧૭) સુરેખા OXના O બિન્દુથી અમુક વેગ સાથે એક કણને સુરેખામાં ગતિ આપવામાં આવે છે અને અચળ પ્રતિપ્રવેગને કારણે કણ OX માંના A બિન્દુએ સ્થિર થાય છે. અન્તર OAને n સરખા ભાગોમાં વિભાજીત કરવામાં આવ્યું છે. જો આમાંનો rમો ભાગ પસાર કરતાં કણને t સમય લાગે જ્યારે Oથી A સુધી જતાં T સમય લાગે તો સાબિત કરો કે

$$t=\frac{(n-r+1)^{\frac{1}{2}}-(n-r)^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}}T.$$

(૧૮) સુરેખામાં ગતિ કરતાં બે કણો સ્થિર સ્થિતિમાંથી નીકળી સ્થિર સ્થિતિ પહોંચતાં સુધીમાં સરખાં અન્તરો કાપે છે. પહેલા કણ માટે તેણે લીધેલા કુલ સમયના પહેલા તૃતિયાંશ સમયમાં પ્રવેગ અચળ f રહે છે, બીજા તૃતિયાંશ સમયમાં વેગ અચળ રહે છે અને ત્રીજા તૃતિયાંશ સમયમાં અચળ પ્રતિપ્રવેગ f રહે છે. જ્યારે બીજા કણ માટે તેણે કાપેલા કુલ અન્તરના પહેલા તૃતિયાંશમાં અચળ પ્રવેગ f, બીજા તૃતિયાંશમાં અચળ વેગ તથા છેલ્લા તૃતિયાંશમાં અચળ પ્રતિપ્રવેગ f રહે છે. સાબિત કરો કે કણોએ લીધેલા કુલ સમય $3\sqrt{3}:5$ ના ગુણોત્તરમાં છે.

(૧૯) એક પત્થરને જમીન ઉપરથી એવી રીતે ઉપર તરફ ફેંકવામાં આવે છે કે તે બરાબર એક 100 ફૂ. ઊંચા ટાવરના મથાળે જઈને અટકે. 2 સેકન્ડ બાદ એક બીજો પત્થર એ જ જગ્યાએથી અને એ જ વેગથી ઉપર તરફ ફેંકવામાં આવે તો બતાવો કે બન્ને પત્થરો જમીનં ઉપરથી 84 ફૂ. ને અન્તરે એક બીજાને મળશે.

(૨૦) P બિન્દુમાંથી એક પદાર્થને ઉપર તરફ ફેંકવામાં આવ્યો છે અને તે બીજા Q બિન્દુ પાસેથી t_1 સેકન્ડ બાદ પસાર થાય છે અને ત્યાર પછી t_2 સેકન્ડ બાદ તે તેના પ્રસ્થાન બિન્દુએ પાછો આવી જાય છે. સિદ્ધ

કરો કે જો Qમાં સ્થિર રહેલા કોઈ પદાર્થને નીચે તરફ છોડવામાં આવે તો તે $\sqrt{t_1 t_2}$ સેકન્ડ બાદ P બિન્દુએ પહોંચશે.

(૨૧) O બિન્દુમાંથી ઉપર તરફ ફેંકેલો એક પત્થર 3 સેકન્ડ બાદ A બિન્દુ પાસેથી પસાર થાય છે. ત્યાર પછી 4 સેકન્ડ બાદ તે Oમાં પાછો આવે તો O ઉપર A કેટલી ઊંચાઈએ આવેલું છે તે શોધી કાઢો. ઉપરાંત O અને Aની બરાબર મધ્યમાં આવેલા બિન્દુ પાસેથી પત્થર શા વેગથી પસાર થશે તે પણ શોધી કાઢો.

(૨૨) પ્રતિ સેકન્ડ 48 ફૂ. ના અચળ વેગથી ઉપર ચઢતા એક બલૂનમાંથી એક પત્થરને છોડવામાં આવે છે. પત્થર જ્યારે જમીન પર પડે છે ત્યારે તેણે 400 ફૂ. પ્રતિ સેકન્ડનો વેગ પ્રાપ્ત કર્યો હોય છે. (૧) જ્યારે પત્થર છોડવામાં આવ્યો, (૨) જ્યારે પત્થર જમીન ઉપર પડયો ત્યારે બલૂનની ઊંચાઈ શોધો.

(૨૩) જે ક્ષણે એક બલૂન f પ્રવેગથી ઉપર ચઢવાની શરૂઆત કરે છે તે જ ક્ષણે, તે જ સ્થળેથી, એક પત્થરને u વેગથી ઉપર તરફ ફેંકવામાં આવે છે, સિદ્ધ કરો કે t સેકન્ડ બાદ બલૂન પત્થરને પકડી પાડશે, જ્યાં

$$t = 2u/(f+g).$$

(૨૪) a ફૂ. ના પતનને કારણે પ્રાપ્ત થતા વેગ સાથે એક પત્થરને જમીનથી b ફૂ. ની ઊંચાઈએ આવેલા સ્થાનેથી ઉપર તરફ ફેંકવામાં આવે છે. પત્થર જમીન પર કયારે પડશે તે શોધી કાઢો.

(૨૫) પ્લેટફોર્મ પર ઊભો રહેલો એક માણસ ઉપર તરફની લંબક દિશામાં v વેગથી દડો ઉછાળે છે. જેવો દડો તેના હાથમાંથી છૂટે છે તે જ ક્ષણે પ્લેટફોર્મ નીચે v/n અચળ વેગથી ઊતરવા લાગે છે $(n>1)$. દડો તેના હાથમાં પાછો આવતાં કેટલો સમય વીતી જશે તે શોધી કાઢો અને સાબિત કરો કે તેટલા સમયમાં દડાએ

$$\frac{v^2}{g}\left\{1+\frac{2(n+1)}{n^2}\right\}$$

અન્તર કાપ્યું હશે.

જવાબો :

(૧) 10 સેકન્ડ. (૨) $2\frac{1}{12}$ માઈલ. (૩) $\frac{1}{2}$ ફૂ./સેક^2., 1936 ફૂ. (૪) હા. (૫) 570 ફૂ. 3000 ફૂ. (૬) $\frac{5}{8}$ સેક. મથાળાથી 2 સેકન્ડ, અથવા 10 સેકન્ડ. (૭) 3 સેકન્ડ. (૮) 2 સેકન્ડ, 64 ફૂ. ઉપર. (૯) 100 ફૂ. (૧૦) 400 ફૂ. (૧૨) 22 સેકન્ડ, 484 ફૂ. (૨૧) 192 ફૂ., 80 ફૂ./સેક. (૨૨) 2464 ફૂ. 3136 ફૂ. (૨૪) $\frac{1}{4}\{\sqrt{(a+b)}+\sqrt{a}\}$ સેકન્ડ.

પ્રકરણ ૭

ન્યૂટનના ગતિનિયમો

૧. પ્રાસ્તાવિક.

આગલા પ્રકરણમાં આપણે, જે બળોને કારણે ગતિ ઉત્પન્ન થાય છે તે બળોનો વિચાર કર્યા વગર ફક્ત ઉત્પન્ન થતી ગતિનો વિચાર કર્યો છે. ત્યાં અચળ પ્રવેગથી થતી ગતિ અંગે જે કાંઈ માહિતી જોઈતી હોય તે સઘળી માહિતી મળી શકે એવાં સૂત્રો આપણે પ્રાપ્ત કર્યાં છે. ગતિમાં પ્રવેગ અચળ છે એ આપણે માની લીધેલું હતું. અને જો પ્રવેગ અચળ હોય તો જ આપણાં સૂત્રો ગતિનું વર્ણન આપી શકે. હવે આપણે એ જોવાનું છે કે કેવી પરિસ્થિતિમાં ગતિનો પ્રવેગ અચળ રહેશે અથવા તો આપણે એવાં સૂત્રો શોધવાનાં છે કે જેની મદદ વડે ગતિનો પ્રવેગ અચળ રહેશે કે નહિ તે આપણે જાણી શકીએ. કયા પ્રકારનાં બળો અચળ પ્રવેગ ઉત્પન્ન કરશે અને કયા પ્રકારનાં બળો તેમ કરી શકશે નહિ તે આપણે શોધી કાઢીશું. તે માટે આપણે બળો અને તેમના વડે ઉત્પન્ન થતી ગતિ, એ બે વચ્ચેના સંબંધનો અભ્યાસ કરીશું. આ સંબંધોની વ્યવસ્થિત પ્રતિજ્ઞા સર્વ પ્રથમ ન્યૂટને આપેલી તેથી તે સંબંધો ન્યૂટનના ગતિનિયમોને નામે ઓળખાય છે.

ગતિનિયમોનો અભ્યાસ શરૂ કરીએ તે પહેલાં આપણે **વેગમાન** અને **દ્રવ્યમાન**ના ખ્યાલોથી પરિચિત થઈ જવાની જરૂર છે. પહેલા પ્રકરણમાં દ્રવ્યમાન એટલે પદાર્થના દ્રવ્યનું માપ એ પ્રમાણે વ્યાખ્યા આપેલી જ છે. હવે આપણે વેગમાનની પદાર્થે પ્રાપ્ત કરેલી ગતિના માપ તરીકે વ્યાખ્યા કરીશું.

ગતિ કરતા કણનું વેગમાન કણના વેગ અને દ્રવ્યમાનના ગુણાકાર કરવાથી પ્રાપ્ત થાય છે.

v વેગથી ગતિ કરતા કણનું દ્રવ્યમાન જો m હોય તો તેનું વેગમાન mv થશે. વેગ સદિશ છે તેથી વેગમાન પણ સદિશ થશે. આપણે બે નવી રાશિઓની

વ્યાખ્યા આપી છે. તેનાં મૂલ્ય કોઈ એકમમાં વ્યકત થશે. ગતિનિયમોની ચર્ચા કરીએ તે પહેલાં આપણે આ એકમોનો વિચાર કરી લઈએ.

૨. બે એકમ પદ્ધતિ.

અત્યારે બે મુખ્ય એકમ પદ્ધતિઓ વપરાશમાં છે.

(૧) બ્રિટિશ પદ્ધતિ અથવા F. P. S. (ફૂ. પા. સે.) પદ્ધતિ. આ પદ્ધતિમાં લંબાઈનું એકમ ફૂટ, દ્રવ્યમાનનું એકમ પાઉન્ડ અને સમયનું એકમ સેકન્ડ છે.

(૨) મેટ્રિક પદ્ધતિ અથવા તો C. G. S. (સે. ગ્રા. સે.) પદ્ધતિ. આ પદ્ધતિમાં લંબાઈનું એકમ સેન્ટીમીટર, દ્રવ્યમાનનું એકમ ગ્રામ અને સમયનું એકમ સેકન્ડ છે.

વેગમાનને ફૂટ-પાઉન્ડ પ્રતિ સેકન્ડ (ફૂ. પા./સેક.) અથવા તો સેન્ટીમીટર-ગ્રામ પ્રતિ સેકન્ડ (સે. ગ્રા./સેક.)માં વ્યકત કરી શકાય.

૩. ન્યૂટનના ગતિનિયમો.

ન્યૂટનના ત્રણ નિયમો આ રહ્યા.

૧. કોઈ પણ પદાર્થ, જો તેની ઉપર કોઈ બળ કાર્ય કરતું ન હોય તો, સ્થિર સ્થિતિમાં રહે છે અથવા તો સુરેખામાં અચળ વેગથી પ્રવાસ કરતો રહે છે.

૨. વેગમાનવૃદ્ધિનો દર કાર્ય કરતા બળના પ્રમાણમાં રહે છે અને જે દિશામાં બળ કાર્ય કરે છે તે જ દિશામાં વેગમાનવૃદ્ધિ થાય છે.

૩. બે પદાર્થોની અરસપરસની ક્રિયા અને પ્રતિક્રિયા હમેશાં સમમહત્ત્વનાં અને વિરુદ્ધ દિશાનાં હોય છે.

ગણિતની દૃષ્ટિએ આ નિયમોને સ્વયંસિદ્ધ તરીકે સ્વીકારી લેવાના છે. આપણે તેની સાબિતી આપીશું નહિ. આ નિયમોની સત્યતા તો તેના વિવિધ ઉપયોગો ઉપરથી મળે છે. સારીયે યંત્રવિદ્યા આ નિયમો ઉપર નિર્ભર છે. પાટા ઉપર દોડતી આગગાડી, તેમના વજન નીચે સ્થિર રહેતા પૂલ, સૂર્યની આસ-પાસ પરિભ્રમણ કરતાં કરતાં પંચાંગમાં જણાવેલી રોજેરોજની સ્થિતિઓ પ્રાપ્ત કરતા ગ્રહો—આ સર્વે પ્રવૈગિકીની સત્યતાનાં જ્વલંત ઉદાહરણો છે; અને પ્રવૈગિકીનું શાસ્ત્ર ન્યૂટનના ગતિનિયમો ઉપર જ રચાયેલું છે.

હવે આપણે એક પછી એક નિયમ લઈશું અને તેમાંથી મળતી આપણને જરૂરી એવી માહિતી પ્રાપ્ત કરીશું.

૪. પહેલો નિયમ.

આ નિયમ પ્રમાણે, કોઈ પણ દ્રવ્યમય પદાર્થ, પોતાની જાતે, પોતાની સ્થિર સ્થિતિને કે સુરેખામાં એકધારા વેગથી થતી ગતિને, બદલી શકે નહિ. ફક્ત પદાર્થ ઉપર કાર્ય કરતું બળ જ એ કરી શકે. આ રીતે આ નિયમમાંથી આપણને બળની સ્પષ્ટ વ્યાખ્યા પ્રાપ્ત થાય છે.

પદાર્થની સ્થિરતાની સ્થિતિ કે સુરેખામાં અચળ વેગથી થતી ગતિની સ્થિતિ બદલવાનો પ્રયત્ન કરનાર કાર્ય-સાધક તે પદાર્થ પર કાર્ય કરતું બળ છે.

૫. બીજો નિયમ.

પહેલા નિયમમાં બળની સ્પષ્ટ વ્યાખ્યા આપીને હવે ન્યૂટન તેના બીજા નિયમમાં બળના માપનો ખ્યાલ આપે છે. આ નિયમ કહે છે કે બળ પદાર્થના વેગમાનવૃદ્ધિના દર પ્રમાણે ચાલે છે.

જો v વેગથી ગતિ કરતા m દ્રવ્યમાનના એક કણ પર P બળ કાર્ય કરતું હોય તો આપણે ન્યૂટનનો આ નિયમ નીચે પ્રમાણે લખી શકીશું.

$P \propto$ (mvની વૃદ્ધિનો દર)

એટલે કે $$P \propto \frac{d}{dt}(mv)$$

પરંતુ m અચળ છે.

$$\therefore \quad P \propto m\frac{dv}{dt}$$

$$\therefore \quad P \propto mf$$

અથવા $$P = kmf. \qquad (1)$$

f કણનો પ્રવેગ છે અને k એક અચલ છે. સ. ક. (1) બળનું માપ દર્શાવે છે. તેમાં એક અનિશ્ચિત અચલ k આવે છે. આ અચલની કિંમત જે એકમમાં આપણે બળ માપીશું તે એકમ ઉપર આધાર રાખે છે. જો આપણે બળનું એકમ નીચે પ્રમાણે પસંદ કરીશું તો આપણને k ની બહુ સરળ કિંમત મળી રહેશે. **જે બળ એક એકમ દ્રવ્યમાનના કણ ઉપર કાર્ય કરીને તેમાં એક એકમ પ્રવેગ ઉત્પન્ન કરે તેને આપણે એક એકમ બળ કહીશું.** આનો અર્થ એ થયો કે જ્યારે $m = 1$ અને $f = 1$ થાય ત્યારે $P = 1$ થવું જોઈએ.

$\therefore$ સ. ક. (1) માંથી પ્રાપ્ત થશે કે

$$1 = k \times 1 \times 1$$

$$\therefore \quad k = 1;$$

એટલે હવે સ. ક. (1) નીચે પ્રમાણે વંચાશે:

$$\boxed{P = mf}$$

આ પ્રવૈગિકીનું મુખ્ય સમીકરણ છે.

F. P. S. એકમ પદ્ધતિમાં આ બળના એકમને પાઉન્ડલ કહે છે. **એક પાઉન્ડલ બળ એટલે એક પાઉન્ડ દ્રવ્યમાનના કણ ઉપર કાર્ય કરીને તેમાં એક ફૂ./સેક^2. નો પ્રવેગ ઉત્પન્ન કરી શકે તેટલું બળ.** C. G. S. એકમ પદ્ધતિમાં બળના એકમને ડાઈન

કહે છે. **એક ડાઇન બળ એટલે એક ગ્રામ દ્રવ્યમાનના કણ ઉપર કાર્ય કરીને તેમાં એક સે. મી./સેક^2. નો પ્રવેગ ઉત્પન્ન કરી શકે તેટલું બળ.**

ગતિનો આ બીજો નિયમ વાપરતાં નીચેના બે મુદ્દાઓ ઉપર ધ્યાન દેવું જરૂરી છે.

(૧) સમીકરણ $P = mf$ અમુક ચોક્કસ પ્રકારનાં એકમોનો ઉપયોગ કરીને પ્રાપ્ત કરવામાં આવ્યું છે. એટલે કે જ્યારે જ્યારે આપણે આ સમીકરણનો ઉપયોગ કરીએ ત્યારે ત્યારે આપણે Pને પાઉન્ડલમાં, mને પાઉન્ડમાં અને f ને ફૂ./સેક^2.માં વ્યકત કરવાં જોઈએ; અને જો આપણે મેટ્રિક પદ્ધતિ વાપરતા હોઈએ તો Pને ડાઇનમાં, mને ગ્રામમાં અને f ને સે. મી./સેક^2. માં વ્યકત કરવાં જોઈએ. જો આ સિવાયનાં કોઈ પણ પ્રકારનાં એકમોનો આપણે ઉપયોગ કરીશું તો સ. ક. $P = mf$ સત્ય ન રહે એવો સંભવ ખરો.

(૨) બીજા નિયમની પ્રતિજ્ઞાનો પાછળનો ભાગ બળોના **પરસ્પર સ્વાયત્ત અસ્તિત્વ**નો સિદ્ધાન્ત વર્ણવે છે. બીજાં બળો કાર્ય કરતાં હોય કે નહિ તેની અસરમાં આવ્યા વગર પ્રત્યેક બળ પોતાની દિશામાં વેગમાનવૃદ્ધિ ઉત્પન્ન કરે છે. પ્રત્યેક બળે આ રીતે સ્વતંત્ર રીતે ઉત્પન્ન કરેલી વેગમાન-વૃદ્ધિઓનું પરિણામી તે પદાર્થની કુલ વેગમાનવૃદ્ધિ થશે. આ જ હકીકત બીજી રીતે પણ રજુ કરી શકાય. આપણે $P = mf$ ને સદિશ સમીકરણ કહીશું. એ સ. ક. નું પૂરેપૂરું વાંચન આ પ્રમાણે કરી શકાય.

કોઈ પણ દિશામાં બળ $=$ દ્રવ્યમાન $\times$ (તે જ દિશાનો પ્રવેગ).

૯. ત્રીજો નિયમ.

ત્રણે નિયમો એક સાથે આપવાની દૃષ્ટિએ જ આ ત્રીજો નિયમ અહિં આપ્યો છે. પરંતુ તેની વિગતવાર ચર્ચા આપણે આવતા પ્રકરણમાં કરીશું; અને ત્યાં તેના ઉપયોગનાં કેટલાંક ઉદાહરણો પણ લઈશું.

૭. દ્રવ્યમાન અને વજન.

કોઈ પદાર્થનું વજન એટલે પૃથ્વીનું તે પદાર્થ પરના આકર્ષણનું બળ. જો પદાર્થનું દ્રવ્યમાન m હોય તો તેનું વજન = પૃથ્વીનું તે પરનું બળ

= દ્રવ્યમાન $\times$ પૃથ્વીના આકર્ષણથી ઉત્પન્ન થતો પ્રવેગ

$= mg.$

જો કોઈ પદાર્થનું દ્રવ્યમાન m પાઉન્ડ હોય તો તેનું વજન mg પાઉન્ડલ થશે. ($g = 32$ ફૂ./સેક^2.) જો પદાર્થનું દ્રવ્યમાન m ગ્રામ હશે તો તેનું વજન mg ડાઈન થશે. ($g = 981$ સે.મી./સેક^2.)

૮. ઉદાહરણો.

(૧) કેટલું બળ, *12 હંડ્રવેટ વજનના પદાર્થ ઉપર કાર્ય કરીને તેમાં 5 મિનિટમાં કલાકે 15 માઈલનો વેગ ઉત્પન્ન કરી શકશે?*

આવાં ઉદાહરણો આપણે ત્રણ પગલાંમાં ગણીશું. **પહેલાં તો** આપેલી સઘળી રાશિઓને આપણાં પ્રમુખ એકમો — ફૂટ, પાઉન્ડ, સેકન્ડ, પાઉન્ડલ અથવા તો સે. મી. ગ્રામ, સેકન્ડ, ડાઈનમાં રૂપાન્તરિત કરી લઈશું. **પછી** ન્યૂટનનો બીજો નિયમ વાપરીને આપેલા બળ ઉપરથી ઉત્પન્ન થતો પ્રવેગ શોધી કાઢીશું. અને **છેવટે** જો આ પ્રવેગ અચળ સંખ્યા આવે તો આગલા પ્રકરણનાં સૂત્રોનો ઉપયોગ કરીને ગતિ માટે જોઈતી સઘળી માહિતી મેળવી શકીશું.

તેથી સર્વ પ્રથમ તો આપેલી રાશિઓને ન્યૂટનના નિયમને અનુકૂળ એકમોમાં રૂપાન્તરિત કરીએ.

પદાર્થનું દ્રવ્યમાન = 12 હંડ્રવેટ *

$= 12 \times 4 \times 28$ પાઉન્ડ.

---

* નીચેનું કોષ્ટક યાદ રાખવું ઉપયોગી થઈ પડશે.

1 ટન = 20 હંડ્રવેટ

1 હંડ્રવેટ = 4 ક્વાર્ટર

1 ક્વાર્ટર = 28 પાઉન્ડ

1 ટન = 2240 પાઉન્ડ.

$$\therefore \qquad m = 1344 \text{ પાઉન્ડ.}$$

વેગ $=$ કલાકે 15 માઈલ

$= 22$ ફૂ. પ્રતિ સેકન્ડ.

સમય $= 5$ મિનિટ

$= 300$ સેકન્ડ.

પ્રથમ પગલું લેવાઈ ગયું. હવે ધારો કે કાર્ય કરતું બળ P પાઉન્ડલ છે. જો તે f ફૂ./સેક^2. નો પ્રવેગ ઉત્પન્ન કરે તો

$$P = mf$$

$$\therefore \qquad f = \frac{P}{m} = \frac{P}{1344} \text{ ફૂ./સેક}^2.$$

આ પ્રવેગને કારણે 300 સેકન્ડમાં 22 ફૂ./સેક.નો વેગ ઉત્પન્ન થાય છે તેથી

$v = u + ft$ સૂત્ર વાપરતાં જણાશે કે

$$22 = 0 + \frac{P}{1344} \times 300$$

$$\therefore \qquad P = 98{\cdot}56 \text{ પાઉન્ડલ.}$$

(૨) 160 પાઉન્ડનું વજન લિફ્ટના ભોંયતળિયે પડેલું છે. (i) જ્યારે લિફ્ટ ઉપર તરફ 8 ફૂ./સેક^2. ના પ્રવેગથી જતી હોય કે (ii) જ્યારે તે જ પ્રવેગથી નીચે તરફ જતી હોય, તે બન્ને કિસ્સાઓમાં લિફ્ટના ભોંયતળિયા અને વજન વચ્ચેની પ્રતિક્રિયા શોધો.

અહિં રાશિઓ અનુકૂળ એકમોમાં આપેલી જ છે. **વજન ઉપર** કાર્ય કરતાં બળો આ છે.

(૧) તેનું વજન mg નીચેની લંબક દિશામાં.

(૨) લિફ્ટની પ્રતિક્રિયા R ઉપરની લંબક દિશામાં.

કિસ્સો (i) : લિફ્ટનો પ્રવેગ f ઉપર તરફ છે તેથી લિફ્ટમાં પડેલા વજનને પણ તે જ પ્રવેગ મળશે. એટલે ન્યૂટનનો બીજો નિયમ વાપરીએ તો

દ્રવ્યમાન $\times$ ઉપરની દિશાનો પ્રવેગ

$= $ ઉપરની દિશાનાં બળો.

$$\therefore \quad mf = R - mg.$$

m, f અને g ની કિંમત મૂકતાં જણાશે કે

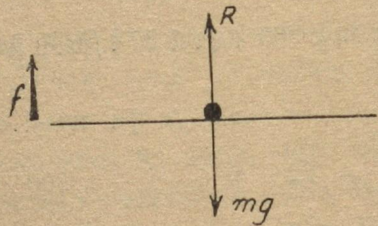
$$160 \times 8 = R - 160 \times 32$$

$\therefore \quad R = 6400$ પાઉન્ડલ

$= 200 \times 32$ પાઉન્ડલ

$= 200$ પાઉન્ડનું વજન

$= 200$ પા. વ.



આકૃતિ ૬૭

કિસ્સો (ii): હવે લિફ્ટનો પ્રવેગ નીચે તરફ છે તેથી ન્યૂટનનો નિયમ પણ એ જ દિશામાં લાગુ કરીશું.

$mf = $ નીચે તરફની દિશાનાં બળો

$= mg - R.$

$$\therefore \quad 160 \times 8 = 160 \times 32 - R$$

$\therefore \quad R = 160 \times 24$ પાઉન્ડલ

$= 120$ પા. વ.

(૩) ઘર્ષણ વગેરેને કારણે ટ્રેનની ગતિને પ્રતિ ટન 14 પા.વ. નું બળ અવરોધે છે. ક્ષૈતિજ સપાટી પર કલાકે 50 માઈલની

ઝડપથી દોડતી ગાડી જ્યારે 160 માં 1 ના ઢાળ પાસે આવે છે ત્યારે તેની વરાળ બંધ કરી દેવામાં આવે છે. સ્થિર થતાં સુધીમાં ગાડી ઢાળ ઉપર કેટલા અન્તર સુધી દોડી જશે ?

ઘર્ષણ વગેરેને કારણે ગતિને અવરોધક બળનો આધાર ગાડી કેટલું વજન લઈ જાય છે તેની ઉપર છે. પરંતુ ગાડી હમેશાં કાંઈ એક સરખું વજન વહન કરતી હોતી નથી. તેથી જ આ અવરોધક બળ હમેશાં પ્રતિ ટનમાં વ્યકત કરવામાં આવે છે. જો ટ્રેનમાં વજન 2 ટન હોય તો આપણા ઉદાહરણમાં અવરોધક બળ 28 પા. વ. થશે એટલે દાખલાની શરૂઆત આપણે ટ્રેન ઉપર કેટલું વજન છે તેનાથી કરીશું.

માનો કે ટ્રેનનું દ્રવ્યમાન T ટન છે.

$\therefore$ $$m = 2240T \text{ પાઉન્ડ}$$

અવરોધક બળ પ્રતિ ટન 14 પા. વ. છે.

$\therefore$ T ટન માટે અવરોધક બળ $14T$ પા. વ. થશે.

$$\therefore \quad \text{અવરોધક બળ} = 14T \text{ પા. વ.}$$
$$= 14T \text{ પાઉન્ડનું વજન}$$
$$= 14Tg \text{ પાઉન્ડલ.}$$
$$\text{પ્રસ્થાનવેગ} = \text{કલાકે } 50 \text{ માઈલ}$$
$$= \frac{50 \times 44}{30} \text{ ફૂ./સેક.}$$

ન્યૂટનના નિયમને અનુકૂળ એકમોમાં સઘળી રાશિઓ વ્યકત થઈ ગઈ. ગતિ 160 માં 1 ના ઢાળ ઉપર છે. એટલે કે **આ.** (૬૮) માં $\sin\theta = \dfrac{1}{160}$.

ટ્રેન પર કાર્ય કરતાં બળો નીચે પ્રમાણે છે :

(i) તેનું વજન $2240Tg$ પાઉન્ડલ.

(ii) ઢાળને લંબ દિશામાં ઢાળની પ્રતિક્રિયા R.

(iii) ગતિની વિરુદ્ધ દિશામાં કાર્ય કરતું અવરોધક બળ

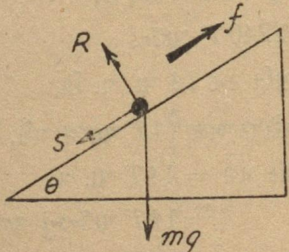
$$S = 14Tg.$$

ધારો કે ટ્રેનનો ગતિ દિશામાં પ્રવેગ f છે. તે દિશામાં ન્યૂટનનો નિયમ લાગુ કરો.

$$\therefore \quad mf = -S - mg\sin\theta$$

$$\therefore \quad 2240Tf = -14Tg - 2240Tg \times \frac{1}{160}$$

$$\therefore \quad f = -\frac{g}{80} = -\frac{32}{80} = -\frac{2}{5} \text{ ફૂ./સેક}^2.$$



આકૃતિ ૯૮

ન્યૂટનનો ગતિનિયમ વાપરીને આપણે પ્રવેગ શોધ્યો. જ્યારે ગાડી સ્થિર થશે ત્યારે વેગ શૂન્ય થશે.

$\therefore \quad v^2 = u^2 + 2fs$ માંથી જણાશે કે

$$0 = \left(\frac{50 \times 44}{30}\right)^2 + 2\left(-\frac{2}{5}\right)s$$

$$\therefore \quad s = \frac{60500}{9} \text{ ફૂ.}$$

$$= 1{\cdot}27 \text{ માઈલ.}$$

સ્થિર થવા પહેલાં ગાડી 1·27 માઈલ ઢાળ ઉપર ચઢશે.

(૪) 21 પા. વજનનો એક પદાર્થ 20 ફૂ. ની ઊંચાઈએથી છોડવામાં આવે છે. તે રેતી પર પડે છે અને 6 ઇંચ સુધી રેતીની અન્દર ધસી જાય છે. જો બીજો કોઈ પદાર્થ એટલી જ ઊંચાઈથી છોડવામાં આવે અને તે રેતીની અંદર 1 ફૂ. ઊંડો ઊતરી જાય તો સિદ્ધ કરો કે તેનું વજન 41 પા. હોવું જોઇએ. રેતીનું અવરોધક બળ અચળ છે એમ માનવું.

બે જુદા જુદા પદાર્થોની ગતિ સાથે સંબંધ હોવાને કારણે આપણે આ ઉદાહરણ બે ભાગમાં ગણીશું. પહેલા ભાગમાંથી આપણે રેતીનું અવરોધક બળ શોધી કાઢીશું અને બીજા ભાગમાં બીજા પદાર્થનું દ્રવ્યમાન ગણીશું.

ભાગ (૧): પહેલા પદાર્થની ગતિ.

તે 20 ફૂ. ની ઊંચાઈએથી પડે છે. પતનને અન્તે ધારો કે તેનો વેગ v થયો તો

$$v^2 = u^2 + 2fs$$
$$= 0 + 2 \times 32 \times 20$$
$$= 1280$$
$$\therefore \quad v = \sqrt{1280} \text{ ફૂ./સેક.}$$

આ વેગ સાથે પદાર્થ રેતીમાં ગતિ શરૂ કરે છે. ધારો કે રેતીનો અવરોધ R પાઉન્ડલ છે.

રેતીમાં કોઈ સમયે પદાર્થની સ્થિતિ P છે. પદાર્થ પર નીચેનાં બળો કાર્ય કરે છે.

(i) તેનું વજન mg

(ii) અવરોધ R, ઉપર તરફ.

જો પદાર્થ નીચે તરફ f પ્રવેગથી ગતિ કરતો હોય તો

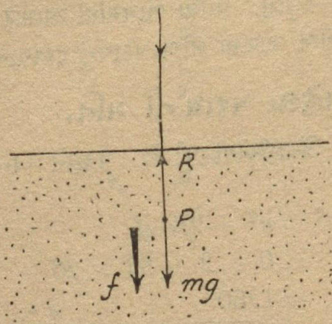
$$mf = mg - R$$
$$\therefore \quad f = g - \frac{R}{m} \qquad (1)$$
$$= (32 - \frac{R}{21}) \text{ ફૂ./સેક}^2.$$

આ પ્રવેગથી $\sqrt{1280}$ ફૂ./સેક.નો પ્રસ્થાનવેગ, 6 ઈન્ચ એટલે કે $\frac{1}{2}$ ફૂ.નું અન્તર કાપતાં શૂન્ય થઈ જાય છે.

$\therefore$ $v^2 = u^2 + 2fs$ માંથી જણાશે કે

$$0 = 1280 + 2\left(32 - \frac{R}{21}\right)\frac{1}{2}$$

$\therefore$ $R = 1312 \times 21$ પાઉન્ડલ.



આકૃતિ ૬૯

ભાગ (૨): બીજા પદાર્થની ગતિ.

તે પણ એ જ ઊંચાઈએથી પડે છે. તેથી તે પણ રેતીમાં $\sqrt{1280}$ ફૂ./સેક.ના વેગથી ધસવાની શરૂઆત કરશે. સ. ક. (1) અહિં પણ લાગુ પડશે અને તેથી રેતીમાં તેનો પ્રવેગ

$$f = g - \frac{R}{m} \text{ થશે.}$$

પરંતુ હવે આપણે mની કિંમત જાણતા નથી પણ Rની કિંમત જાણીએ છીએ.

$$\therefore \quad f = 32 - \frac{1312 \times 21}{m}.$$

આ પ્રવેગને કારણે $\sqrt{1280}$ નો પ્રસ્થાનવેગ 1 ફૂ. નું અન્તર કપાયા બાદ શૂન્ય થઈ જશે.

$\therefore$ $v^2 = u^2 + 2fs$ માંથી જણાશે કે

$$0 = 1280 + 2\left(32 - \frac{1312 \times 21}{m}\right) \times 1.$$

$\therefore$ $m = 41$ પાઉન્ડ.

મનોયત્ન VIII.

(૧) નીચેનાં બળો કેટલો પ્રવેગ ઉત્પન્ન કરશે તે શોધી કાઢો:

(i) 2 પા. દ્રવ્યમાનના પદાર્થ પર કાર્ય કરતું 5 પાઉન્ડલનું બળ.

(ii) 8 ગ્રા. દ્રવ્યમાનના પદાર્થ પર કાર્ય કરતું 40 ડાઈનનું બળ.

(૨) $\frac{1}{2}$ ટન વજનના એક પદાર્થ ઉપર 2240 પાઉન્ડલ બળ કાર્ય કરે છે. કેટલું અન્તર કાપ્યા બાદ તે કલાકે 15 માઈલનો વેગ પ્રાપ્ત કરી શકશે તે શોધી કાઢો.

(૩) 30 પા. ના દ્રવ્ય ઉપર 15 પા. વ. નું બળ કાર્ય કરે છે. દ્રવ્ય, શરૂઆતમાં જો સ્થિર હોય તો કેટલા સમયમાં તે પ્રતિ સેકન્ડ 160 ફૂ. નો વેગ પ્રાપ્ત કરશે ?

(૪) એક 20 પા. નું દ્રવ્ય પ્રતિ સેકન્ડ 40 ફૂ. ના વેગથી સફર કરે છે. તેની ગતિ રોકવા માટે 2 ઔંસ વજનનું બળ વાપરવામાં આવે તો ગતિ નષ્ટ થતા સુધીમાં દ્રવ્ય કેટલું અંતર કાપશે તે શોધી કાઢો.

(૫) $8{\cdot}8 \times 10^{-28}$ ગ્રામ દ્રવ્યમાનનું એક ઈલેક્ટ્રોન, 16000 કિ.મી. પ્રતિ સેકન્ડના વેગથી ગતિ કરે છે. એક અચળ બળની અસર નીચે 5 સે. મી. અન્તર કાપતાં તેનો વેગ અડધો થઈ જાય તો અચળ બળનું મહત્ત્વ શોધો.

(૬) એક લીસા ક્ષૈતિજ ટેબલ પર સ્થિર રહેલા પદાર્થ ઉપર $\frac{1}{4}$ પા. વ.નું ક્ષૈતિજ બળ કાર્ય કરે છે, જેને પરિણામે પદાર્થ ટેબલ ઉપર ગતિ કરે છે અને 5 સેકન્ડમાં 10 ફૂ. નું અન્તર કાપે છે. પદાર્થનું દ્રવ્યમાન કેટલું હશે?

(૭) 10 પાઉન્ડનું દ્રવ્ય સ્થિર સ્થિતિમાંથી 10 ફૂ. નીચે પડે છે અને નીચે કાદવમાં 2 ફૂ. ઊંડું ધસી જઈને પાછું સ્થિર સ્થિતિએ આવી જાય છે. કાદવનું અવરોધક બળ શોધેા.

(૮) 25 ફૂ. ની ઊંચાઈથી એક માણસ 10 ફૂ. ઊંડા તળાવમાં પડે છે અને તે બરાબર તળાવને તળિયે પહોંચે છે. જો તેનું વજન 11 સ્ટોન હોય તો પાણીનું પ્રતિ સ્ટોન કેટલું અવરોધક બળ છે તે શોધી કાઢો.

[1 સ્ટોન = 14 પાઉન્ડ.]

(૯) એક જાડા નિશાન તરફ 200 ફૂ. પ્રતિ સેકન્ડના વેગથી બંદૂકની ગેાળી છોડવામાં આવે છે અને માલૂમ પડે છે કે ગેાળી નિશાનમાં 6″ દૂર ઘૂસી જાય છે. હવે જો ગેાળી 150 ફૂ. પ્રતિ સેકન્ડના વેગથી 3″ જાડાઈના નિશાન ભણી છોડવામાં આવે તેા તે ગેાળી નિશાનની આરપાર કેટલા વેગથી નીકળશે તે શોધી કાઢો. બન્ને પ્રસંગેાએ નિશાનના દ્રવ્ય તરફથી થતું અવરોધક બળ સરખું જ છે એમ માની લેવું.

(૧૦) 10 પાઉન્ડનું દ્રવ્ય એક ક્ષૈતિજ સમતલ પર પડેલું છે. સમતલ (i) 5 ફૂ./સેક. ના અચલ વેગથી અથવા (ii) 5 ફૂ./સેક^2. ના અચલ પ્રવેગથી ઉપર તરફ ગતિ શરૂ કરે છે. પ્રત્યેક કિસ્સામાં સમતલની પ્રતિક્રિયા શોધેા.

(૧૧) ઉપર તરફની લંબક દિશામાં f પ્રવેગથી ગતિ કરતા એક ક્ષૈતિજ સમતલ પર m દ્રવ્યમાનનેા એક પદાર્થ પડેલેા છે. સિદ્ધ કરેા કે સમતલ અને પદાર્થ વચ્ચેનું દબાણ $m(f+g)$ છે.

(૧૨) 18 હંડ્રવેટ વજનનું એક પીંજરું ખાણમાં ઉતારવામાં આવ્યું છે. પીંજરાને બાંધેલું દોરડું જો વધારેમાં વધારે 26 હંડ્રવેટ તણાવ સહન કરી શકે તેમ હોય તેા પીંજરાને વધારેમાં વધારે કેટલા પ્રવેગથી ઉપર ખેંચી શકાશે?

(૧૩) પાણીથી ભરેલી એક ડોલ 4 ફૂ./સેક^2. ના પ્રવેગથી એક દોરડાની મદદથી ઉપર ખેંચવામાં આવે છે. દોરડામાં તણાવ અચલ રહે તેવી વ્યવસ્થા છે. જો ડોલમાંથી 10 પા. પાણી ઢોળાઈ જાય તો પ્રવેગ વધીને 6 ફૂ./સેક^2. થઈ જાય છે, જ્યારે ડોલ ભરેલી હતી ત્યારે તેનું વજન કેટલું હતું અને દોરડાનો અચલ તણાવ કેટલો છે તે શોધી કાઢો.

(૧૪) એક રેલ્વે એન્જિન 300 ટન વજનની ટ્રેનને ખેંચે છે. ક્ષૈતિજ પાટા ઉપર 4 મિનિટમાં કલાકે 60 માઈલની ગતિ ઉત્પન્ન કરવા માટે એન્જિને કેટલું બળ અજમાવવું જોઈશે તે શોધી કાઢો. પવન, ઘર્ષણ, વિગેરેને કારણે ઉત્પન્ન થતું અવરોધક બળ અચળ છે અને તેની કિંમત 4 ટન વજન છે એમ માની લેવું.

(૧૫) કલાકે ૪૫ માઈલની ઝડપે જતી ટ્રેનને રોકવા માટે બ્રેક લગાડવામાં આવે છે. પરિણામે 2 ફર્લાંગનું અન્તર કપાતાં તેનો વેગ ત્રીજા ભાગનો થઈ જાય છે. જો બ્રેકને કારણે 13·75 ટન વજનનું અચળ બળ પ્રાપ્ત થઈ શકતું હોય તો ટ્રેનનું વજન ટનમાં શોધો.

(૧૬) કલાકે 30 માઈલના વેગથી ગતિ કરતી એક મોટર ગાડીને બ્રેક લગાડીને 4 સેકન્ડમાં ઊભી રાખી શકાય છે. બ્રેક લગાડયા પછી મોટર કેટલું અન્તર કાપે છે તે શોધી કાઢો અને દર્શાવો કે બ્રેક વડે ગાડીના વજનના $\frac{1}{3}\frac{1}{2}$ ભાગનું અવરોધક બળ પ્રાપ્ત કરી શકાય છે.

(૧૭) 45° ના ઢોળાવવાળા એક લીસા ઢાળ ઉપર એક પદાર્થને ઉપર તરફ 20 ફૂ./સેક. ના વેગથી સરકતો ફેંકવામાં આવે છે. ઢાળ ઉપર તે કેટલો ઊંચે જશે અને તેમ કરતાં કેટલો સમય લેશે તે શોધી કાઢો.

(૧૮) કલાકે 48 માઈલના અચળ વેગની સપાટી ઉપર પ્રવાસ કરતી એક ટ્રેન 75 માં 1ના ઢોળાવ ઉપર ચઢાણ શરૂ કરે છે. એન્જિન $2\frac{1}{2}$ ટન વજનનું એકધારૂં બળ અજમાવે છે, જ્યારે ગતિને અવરોધતાં બળો કુલ 30 હંડ્રવેટનાં છે. જો ટ્રેનનું વજન 225 ટન હોય તો સિદ્ધ કરો કે ચઢાણ ઉપર 165 માઈલ ચઢયા બાદ ગાડી સ્થિર થશે.

(૧૯) એન્જિન અને ટ્રેનનું કુલ વજન 203 ટન છે, અને એન્જિન કુલ 4 ટન વજનનું ખેંચાણ અજમાવી શકે છે. ગતિઅવરોધક બળો પ્રતિ ટન 20 પા. વ. છે અને બ્રેક લગાડવાથી વધારાનું પ્રતિ ટન 400 પા. વ.નું અવરોધક બળ પ્રાપ્ત થઈ શકે તેમ છે. ટ્રેન સ્થિર સ્થિતિમાંથી ઊપડે છે અને ક્ષૈતિજ સપાટી ઉપર કલાકે 40 માઈલની ગતિ પ્રાપ્ત થતાં સુધી સફર કરે છે; ત્યાર પછી વરાળ બંધ કરી દેવામાં આવે છે અને બ્રેક ચુસ્ત રીતે લગાડવામાં આવે છે. સિદ્ધ કરો કે ફરી સ્થિર થતાં સુધીમાં ટ્રેન કુલ અન્તર લગભગ 1 માઈલનું કાપે છે અને તેમ કરતાં તેને લગભગ 3 મિનિટ જેટલો સમય લાગશે.

(૨૦) કલાકે 30 માઈલની ઝડપથી ગતિ કરતી, 200 ટન દ્રવ્યમાનની ટ્રેન જ્યારે સ્ટેશનથી $\frac{1}{4}$ માઈલ દૂર આવે છે ત્યારે વરાળ બંધ કરી દેવામાં આવે છે. રેલપાટાનો અવરોધ કુલ 2 ટન વજન છે અને બ્રેક લગાડવાથી તેના કરતાં દસ ગણો અવરોધ મળી શકે તેમ છે. જો ટ્રેન બરાબર સ્ટેશન પર આવીને ઊભી રહે તો બ્રેક ક્યાં લગાડવી જોઈએ? જો તે જ સ્થાન પર બ્રેક લગાડવામાં આવી હોત, પરંતુ ચુસ્ત રીતે ન લગાડતાં પ્રાપ્ય અવરોધથી અડધો જ અવરોધ ઉત્પન્ન કરે તેવી રીતે લગાડી હોત તો સાબિત કરો કે ગાડી સ્ટેશન પાસેથી લગભગ કલાકે 16 માઈલના વેગથી પસાર થઈ હોત.

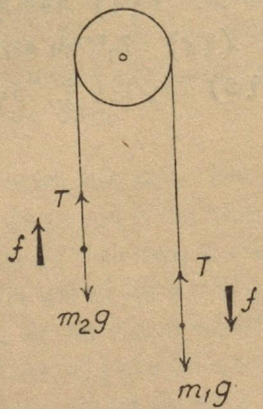
(૨૧) લાકડાની અને લોઢાની બે જાડી પટ્ટીઓ એકબીજા ઉપર જડીને એક બન્દૂક તાકવાનું નિશાન બનાવવામાં આવ્યું છે. લોખંડની પટ્ટી 2″ જાડી છે જ્યારે લાકડાની પટ્ટીની જાડાઈ 4″ છે. ક્ષૈતિજ દિશામાં છોડેલી એક ગોળી લોખંડની પટ્ટીમાંથી પસાર થઈને લાકડાની પટ્ટીમાં 2″ ઊંડે ઘૂસી જાય છે. એવી જ એક બીજી ગોળી એ જ વેગથી સામી બાજુએથી છોડતાં માલૂમ પડે છે કે તે લાકડાની પટ્ટીની આરપાર નીકળી જઈ લોઢાની પટ્ટીમાં 1″ ઊંડે ઘૂસી જાય છે. લોઢું અને લાકડું સરેરાશ 2 : 1 ના પ્રમાણમાં અવરોધક બળ ઉત્પન્ન કરે છે એમ સિદ્ધ કરો.

જવાબો :

(૧) 2·5 ફૂ./સેક^2. 5 સે. મી./સેક^2. (૨) 121 ફૂ. (૩) 10 સેક. (૪) 4000 ફૂ. (૫) $1{\cdot}69 \times 10^{-10}$ ડાઇન. (૬) 10 પા. (૭) 60 પા. વ. (૮) 49 પા. વ. (૯) 50 ફૂ./સેક. (૧૦) 10 પા. વ., 370 પાઉન્ડલ. (૧૨) $14\frac{2}{9}$ ફૂ./સેક^2. (૧૩) 190 પા. વ., $213\frac{3}{4}$ પા. વ. (૧૪) $7\frac{7}{16}$ ટન વજન. (૧૫) 300 ટન. (૧૬) 88 ફૂ. (૧૭) $25\sqrt{2}/4$ ફૂ., $5\sqrt{2}/8$ સેકન્ડ. (૨૦) સ્ટેશનથી $170\frac{1}{2}$ ફૂ.

૯. ગતિનિયમોના કેટલાક વિશિષ્ટ ઉપયોગ.

(૧) એક લીસી ગરગડી ઉપરથી પસાર થતી દોરીને છેડે m_1 અને m_2 દ્રવ્યમાનનાં બે કણો બાંધવામાં આવ્યાં છે. કણોની ગતિનું વર્ણન કરો.



આકૃતિ ૭૦

બેમાંનું એક કણ નીચે ઊતરશે જ્યારે બીજું કણ ઉપર ચઢશે. ધારો કે m_1 નીચે f પ્રવેગથી ઊતરે છે. ગતિને કારણે દોરીની લંબાઈમાં કાંઈ વધઘટ થતી નથી તેથી બીજું કણ ઉપર તરફ એ જ પ્રવેગ f થી ગતિ કરશે. આ બે કણોની ગતિ માટે ન્યૂટનના બીજા નિયમનો ઉપયોગ કરીને આપણે f ની કિંમત શોધી કાઢીશું. આ નિયમનો ઉપયોગ કરવા માટે આપણે પ્રત્યેક કણ પર કાર્ય કરતાં બળોની યાદી બનાવીએ.

કણ m_1 માટે :

આ દ્રવ્ય ઉપર નીચેનાં બળો કાર્ય કરે છે.

(i) તેનું વજન m_1g, નીચે તરફની લંબક દિશામાં.

(ii) દોરીનો તણાવ T, ઉપર તરફ.

તેનો પ્રવેગ f નીચે તરફ છે. આપણે ન્યૂટનનો નિયમ નીચે તરફની દિશામાં લગાડીશું. તેમ કરતાં જણાશે કે

$$m_1 f = m_1 g - T. \tag{1}$$

કણ m_2 માટે :

તેની ઉપર કાર્ય કરતાં બળો આ રહ્યાં :

(i) તેનું વજન $m_2 g$, નીચે તરફની લંબક દિશામાં.

(ii) દોરીનો તણાવ T, ઉપર તરફ.

[બન્ને કણોને એક જ દોરી બાંધેલી છે તેથી આખી દોરીમાં એક જ તણાવ T રહેશે.]

તેનો પ્રવેગ f ઉપર તરફ છે. હવે આપણે ન્યૂટનનો નિયમ ઉપર તરફ લગાડીશું તો માલૂમ પડશે કે

$$m_2 f = T - m_2 g. \tag{2}$$

f અને T શોધવા માટે આપણી પાસે (1) અને (2) એ બે સમીકરણો છે. સ. ક. (1) અને (2) નો સરવાળો કરો.

$$\therefore \quad m_1 f + m_2 f = m_1 g - m_2 g$$

$$\therefore \quad f = \frac{m_1 - m_2}{m_2 + m_1} g \tag{3}$$

$$= \text{અચળ.}$$

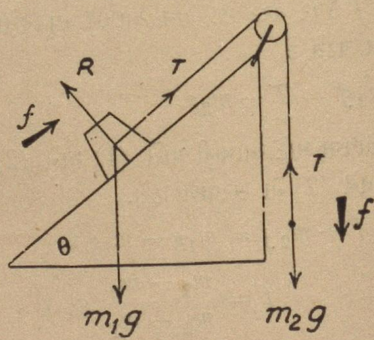
પ્રવેગ અચળ આવ્યો. તેથી આગલા પ્રકરણનાં સૂત્રોનો ઉપયોગ કરીને કણની ગતિ અંગેની જોઈતી માહિતી આપણે મેળવી શકીશું. fની આ કિંમત સ. ક. (1)માં મૂકીને આપણે Tની કિંમત કાઢીશું.

$$\therefore \quad m_1 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g = m_1 g - T$$

$$\therefore \quad T = \frac{2 m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}. \tag{4}$$

સ. ક. (3) ઉપરથી માલૂમ પડે છે કે જો $m_1 > m_2$ હોય તો f ધન થશે, પરંતુ જો $m_1 < m_2$ હોય તો f ઋણ થશે. આ પરિણામ તો આપણા એ સામાન્ય ખ્યાલને અનુરૂપ જ છે કે જે ભારે કણ હશે તે નીચે ઊતરશે અને હલકું કણ ઉપર ચઢશે. તણાવની બાબતમાં સ. ક. (4)માંથી સ્પષ્ટ થાય છે કે તણાવ કદાપિ ઋણ થશે નહિ. બરાબર છે; આપણે દોરી વડે કોઈ વસ્તુને ખેંચી શકીએ પરંતુ દોરી વડે તે વસ્તુને ધક્કો મારી શકીએ નહિ.

(૨) m_1 દ્રવ્યમાનનું કણ એક ઢાળ ઉપર રહેલું છે. ઢાળને મથાળે જડેલી એક લીસી ગરગડી ઉપરથી પસાર થતી દોરીનો એક છેડો કણને બાંધેલો છે. જ્યારે તેને બીજે છેડેથી m_2 દ્રવ્યમાનનું બીજું કણ નીચે લટકે છે. જો m_2 નીચે તરફ ઊતરવા લાગે તો ઉત્પન્ન થતી ગતિનું વર્ણન કરો.



આકૃતિ ૭૧

માનો કે m_2 f પ્રવેગથી નીચે ઊતરે છે તો પછી m_1 ઢાળ ઉપર એ જ પ્રવેગ f સાથે સરકશે. પ્રત્યેક કણને અલગ અલગ રીતે ન્યૂટનનો નિયમ લગાડીને આપણે fની કિંમત શોધી શકીશું.

m_2 કણ માટે :

તે પર નીચેનાં બળો કાર્ય કરે છે:

(i) તેનું વજન m_2g, નીચે તરફની લંબક દિશામાં.

(ii) દોરીનો તણાવ T, ઉપર તરફ.

તેનો પ્રવેગ f છે અને તે નીચે તરફની દિશામાં છે. એ જ દિશામાં ન્યૂટનનું સદિશ સમીકરણ લખતાં માલૂમ પડશે કે

$$m_2 f = m_2 g - T. \tag{1}$$

m_1 કણ માટે :

તે પર કાર્ય કરતાં બળો આ રહ્યાં:

(i) તેનું વજન $m_1 g$, નીચે તરફની લંબક દિશામાં.

(ii) ઢાળની દિશામાં ઉપર તરફ કાર્ય કરતો દોરીનો તણાવ T.

(iii) ઢાળની પ્રતિક્રિયા R, જે ઢોળાવની દિશાને લંબ કાર્ય કરે છે.

કણનો પ્રવેગ f ઢોળાવની દિશામાં ઉપર તરફ છે. એ દિશામાં ન્યૂટનના નિયમનો ઉપયોગ કરીએ તો

$$m_1 f = T - m_1 g \sin\theta \text{ થશે.} \tag{2}$$

હવે ઢોળાવને લંબ દિશામાં એ જ નિયમનો ઉપયોગ કરીશું તો

$$m_1 \times 0 = R - m_1 g \cos\theta \text{ થશે.} \tag{3}$$

સ. ક. (1), (2) અને (3) માંથી f, T અને R એ ત્રણ રાશિઓની કિંમત મળી શકશે. સ. ક. (3) માંથી R તરત જ મળી રહેશે.

$$R = m_1 g \cos\theta. \tag{4}$$

સ. ક. (1) અને (2) નો સરવાળો કરતાં જણાશે કે

$$(m_1 + m_2) f = (m_2 - m_1 \sin\theta) g$$

$$\therefore \quad f = \frac{m_2 - m_1 \sin\theta}{m_1 + m_2}\, g \tag{5}$$

$$= \text{અચળ.}$$

અહિં પણ પાછો પ્રવેગ અચળ આવ્યો. તેથી આપણે આપણા સૂત્રોનો ઉપયોગ કરીને ઉત્પન્ન થતી ગતિનો વિગતવાર અભ્યાસ કરી શકીશું.

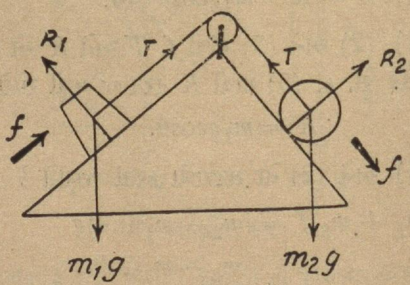
T શોધવા માટે f ની આ કિંમત સ. ક. (1) અથવા (2) માં મૂકવી રહેશે. તે માટે સ. ક. (1) નો ઉપયોગ કરીશું. તો

$$m_2 \frac{m_2 - m_1 \sin\theta}{m_1 + m_2} g = m_2 g - T$$

$$\therefore \quad T = \frac{m_1 m_2 g (1 + \sin\theta)}{m_1 + m_2} \qquad (6)$$

સ. ક. (5) ઉપરથી માલૂમ પડશે કે જો $m_2 > m_1 \sin\theta$ તો f ધન થશે એટલે કે m_2 નીચે ઊતરશે પરંતુ જો $m_2 < m_1 \sin\theta$ તો f ઋણ થશે એટલે m_2 ઉપર ચઢશે અને m_1 ઢાળ પર નીચે તરફ સરકશે. બન્ને વિકલ્પોમાં, અલબત્ત, T તો ધન જ રહેશે.

(૩) α અને β ઢોળાવના તથા સમાન ઊંચાઈના બે ઢાળ એકબીજાની પીઠ અડકાડીને મૂકેલા છે. m_1, m_2 દ્રવ્યમાનનાં બે કણ એક એક ઢાળ ઉપર મૂકેલાં છે. બન્ને ઢાળના સામાન્ય મથાળે રહેલી ગરગડી ઉપરથી પસાર થતી એક દોરીના છેડા કણને બાંધેલા છે. કણની ગતિનું વર્ણન કરો.



આકૃતિ ૭૨

ધારો કે m_2 f પ્રવેગથી નીચે સરકે છે. m_1 એ જ પ્રવેગ સાથે ઉપર તરફ સરકશે. પ્રત્યેક કણની ગતિ માટે ન્યૂટનનો સિદ્ધાન્ત વાપરીને આપણે fની કિંમત શોધીશું.

કણ m_1 માટે :

તેની ઉપર કાર્ય કરતાં બળો આ છે:

(૧) તેનું વજન m_1g, નીચે તરફની લંબક દિશામાં.

(૨) ઢોળાવની ઉપર તરફની દિશામાં દોરીનો તણાવ T.

(૩) ઢાળની પ્રતિક્રિયા R_1 ઢાળને લંબ દિશામાં.

તેનો પ્રવેગ તેની ગતિદિશામાં f છે. એ જ દિશામાં ન્યૂટનનું સદિશ સમીકરણ લખતાં માલૂમ પડશે કે

$$m_1 f = T - m_1 g\sin\alpha. \tag{1}$$

હવે ઢાળને લંબ દિશામાં ન્યૂટનનો નિયમ લાગુ કરો.

$$m_1 \times 0 = R_1 - m_1 g\cos\alpha. \tag{2}$$

કણ m_2 માટે :

તે પર કાર્ય કરતાં બળો આ પ્રમાણે છે:

(૧) તેનું વજન m_2g, નીચે તરફની લંબક દિશામાં.

(૨) ઢોળાવની ઉપર તરફની દિશામાં દોરીનો તણાવ T.

(૩) ઢાળને લંબ દિશામાં ઢાળની પ્રતિક્રિયા R_2.

તેનો પ્રવેગ ઢાળમાં નીચે તરફ f છે. એ દિશામાં અને ઢાળને લંબ દિશામાં વારાફરતી ન્યૂટનના નિયમનો ઉપયોગ કરો.

$$\therefore \quad m_2 f = m_2 g\sin\beta - T. \tag{3}$$

$$m_2 \times 0 = m_2 g\cos\beta - R_2. \tag{4}$$

R_1, R_2, T અને f શોધવા માટે (1), (2), (3) અને (4) એ ચાર સમીકરણો છે. સ.ક. (2) અને (4) માંથી તરત જ માલૂમ પડશે કે

$$R_1 = m_1 g\cos\alpha,\ R_2 = m_2 g\cos\beta. \tag{5}$$

પછી સ. ક. (1) અને (3) નો સરવાળો કરો.

$$\therefore \quad (m_1 + m_2)f = g(m_2\sin\beta - m_1\sin\alpha)$$

$$\therefore \quad f = \frac{m_2\sin\beta - m_1\sin\alpha}{m_1 + m_2}\,g. \tag{6}$$

આ પ્રવેગ અચળ છે. તેથી આપણે આપણાં જાણીતાં સૂત્રોનો ઉપયોગ કરીને ગતિની વિગતો વિષે માહિતી મેળવી શકીશું.

T શોધવા માટે f ની આ કિંમત સ.ક. (1) માં મૂકીએ.

$$\therefore \quad m_1 \frac{m_2 \sin\beta - m_1 \sin\alpha}{m_1 + m_2} g = T - m_1 g \sin\alpha,$$

જેને સાદું રૂપ આપીને નીચે પ્રમાણે લખી શકાય:

$$T = \frac{m_1 m_2 g(\sin\alpha + \sin\beta)}{m_1 + m_2}.$$

સ. ક. (6) માંથી જોઈ શકાશે કે જો $m_2 \sin\beta > m_1 \sin\alpha$ તો f ધન થશે એટલે કે m_2 નીચે તરફ સરકશે. પરંતુ જો $m_2 \sin\beta < m_1 \sin\alpha$ તો f ઋણ થશે અને m_2 ઉપર તરફ સરકશે, m_1 નીચે તરફ સરકશે. આ બન્ને વિકલ્પોમાં T તો ધન જ રહેવાનો કારણ કે ઋણ T નો અર્થ તો એ થાય કે દોરીની મદદથી આપણે પદાર્થને ધક્કો મારી શકીએ જે આપણે કદિ કરી શકવાના નથી.

૧૦. ઉદાહરણો.

એક લીસા ક્ષૈતિજ ટેબલ ઉપર તેની ધારથી a અન્તરે m_1 દ્રવ્યમાનના પદાર્થને મૂકવામાં આવ્યો છે. અને પદાર્થને દોરી વડે (દોરીની લંબાઇ $> a$ છે) નીચે લટકતા એક બીજા પદાર્થ (દ્રવ્યમાન m_2) જોડે બાંધેલો છે. $m_2 > m_1$. જો બન્નેનો સામાન્ય પ્રવેગ f હોય તો સિદ્ધ કરો કે $f/(g-f) = m_2/m_1$. ઉપરાંત m_1 ને ટેબલની ધાર સુધી પહોંચવાને કેટલો સમય લાગશે તે પણ શોધી કાઢો.

m_2 ની ગતિ માટે ન્યૂટનનો બીજો નિયમ વાપરો:

$$m_2 f = m_2 g - T. \tag{1}$$

m_1 ઉપર કાર્ય કરતાં બળો **આ.** (૭૩) માં બતાવેલાં છે. ફરી વાર એ જ નિયમ m_1 માટે વાપરતાં જણાશે કે

$$m_1 f = T. \tag{2}$$

અને
$$m_1 \times 0 = R - m_1 g. \tag{3}$$

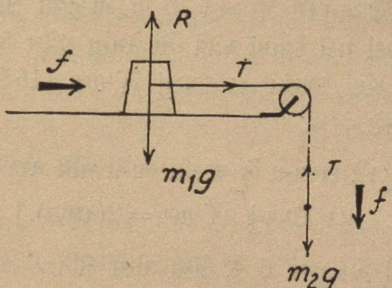
સ. ક. (1) અને (2) નો સરવાળો કરો.

$$\therefore \quad (m_1 + m_2)\, f = m_2 g$$

$$\therefore \quad f = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\, g.$$

$$\therefore \quad \frac{f}{g} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\therefore \quad \frac{f}{g-f} = \frac{m_2}{m_1}.$$



આકૃતિ ૭૩

ધાર સુધી પહોંચવાનો સમય કાઢવા માટે a અન્તર કાપવા માટે m_1 કેટલો સમય લેશે તે શોધવું રહેશે. તે માટે આપણે

$s = ut + \frac{1}{2} ft^2$ એ સૂત્રનો ઉપયોગ કરીશું.

$$\therefore \quad a = 0 \times t + \frac{1}{2}\frac{m_2 g}{m_1 + m_2}\, t^2$$

$$\therefore \quad t^2 = \frac{2a(m_1 + m_2)}{m_2 g}$$

$$\therefore \quad t = \left\{\frac{2a(m_1 + m_2)}{m_2 g}\right\}^{\frac{1}{2}} \text{ સેકન્ડ.}$$

મનોયત્ન IX.

(૧) 5 અને 7 પા. દ્રવ્યનાં બે કણો, એક લીસી ગરગડી ઉપરથી પસાર થતી દોરીને બે છેડેથી લટકે છે. તેમનો સામાન્ય પ્રવેગ તથા દોરીનો તણાવ શોધો.

(૨) લીસી ગરગડી પરથી પસાર થતી દોરીને એક છેડે 20 પા. નું દ્રવ્ય લટકાવવામાં આવ્યું છે. જો દોરી 15 પા. વ. થી વધારે તણાવ સહન કરી શકે તેમ ન હોય તો દોરીને બીજે છેડે વધારેમાં વધારે કેટલા વજનનો સામાન લટકાવી શકાય અને ત્યારે ઉત્પન્ન થતી ગતિમાં પ્રવેગ શું હશે?

(૩) એક હૂક વડે લટકાવેલ ગરગડી ઉપરથી એક દોરડું પસાર થાય છે. અને દોરડાને બે છેડે અનુક્રમે 50 અને 70 પા. નાં દ્રવ્યો બાંધેલાં છે. દ્રવ્યોને ગતિ માટે છૂટાં મૂકી દેવામાં આવે તો તેમનો પ્રવેગ $5\frac{1}{3}$ ફૂ./સિક^2. થશે એમ સિદ્ધ કરો. ઉપરાંત હૂક ઉપરનું ખેંચાણ $116\frac{2}{3}$ પા. વ. થશે તે પણ સિદ્ધ કરો.

[સૂચના : હૂકને દોરડાના બે લટકતા ભાગો નીચે તરફ ખેંચે છે.

$\therefore$ હૂક ઉપરનું ખેંચાણ = 2(તણાવ).]

(૪) 10 પાઉન્ડનું એક દ્રવ્ય 6 ફૂ. ઊંચા લીસા ક્ષૈતિજ ટેબલ પર પડેલું છે. અને ટેબલની ધાર પાસે નીચે લટકતા 5 પા. વજનના એક દ્રવ્ય સાથે દોરી વડે બાંધેલું છે. કેટલા સમય બાદ 5 પાઉન્ડનું દ્રવ્ય જમીન પર અથડાશે?

(૫) 25 પા. નું દ્રવ્ય લીસા ટેબલ ઉપર પડેલું છે. તેને બાંધેલી એક દોરી ટેબલની ધાર ઉપરથી પસાર થાય છે અને તેને બીજે છેડે W વજન લટકે છે. જો સ્થિર સ્થિતિમાંથી ઊપડીને આ વજન 2 સેકન્ડમાં 8 ફૂ. નું અંતર કાપે તો W ની કિંમત શોધી કાઢો.

(૬) જેની લંબાઈ ઊંચાઈ કરતાં બમણી છે, એવા ઢાળ ઉપર 10 પા. વજનનું દ્રવ્ય પડેલું છે. તેને બાંધેલી દોરી ઢાળને મથાળે રાખેલી ગરગડી પરથી પસાર થાય છે. અને તેને બીજે છેડેથી 6 પા. નું દ્રવ્ય નીચે લટકે છે. દ્રવ્યો 5 સેકન્ડમાં કેટલું અન્તર કાપશે તે શોધી કાઢો.

(૭) નીચે તરફની લંબક દિશામાં ગતિ કરતું 12 પા. નું એક દ્રવ્ય 30° ઢોળાવના એક લીસા ઢાળ ઉપર 16 પા. ના દ્રવ્યને ઉપર તરફ ખેંચે છે. બન્ને દ્રવ્યોને જોડતી દોરી ઢાળને મથાળે ગોઠવેલી ગરગડી પરથી પસાર થાય છે. 5 સેકન્ડમાં કોઈ એક દ્રવ્ય કેટલું અન્તર કાપશે તે શોધી કાઢો; વળી દોરીનો તણાવ પણ શોધો.

(૮) એક લીસી ગરગડી પરથી પસાર થતી દોરીને છેડે 11 અને 13 પા. નાં દ્રવ્યો બાંધેલાં છે. 4 સેકન્ડ બાદ દ્રવ્યોને શો વેગ પ્રાપ્ત થશે તે શોધી કાઢો; અને તે સમય દરમિયાન કેટલું અન્તર કપાશે તે પણ શોધી કાઢો. હવે જો દોરીને કાપી નાખવામાં આવે તો તે પછીની સેકન્ડમાં પ્રત્યેક દ્રવ્ય કેટલું સ્થળાન્તર કરશે તે શોધી કાઢો.

(૯) m અને $3m$ દ્રવ્યનાં બે કણો લીસી ગરગડી પરથી પસાર થતી દોરીને છેડે બાંધેલાં છે. સ્થિર સ્થિતિમાંથી ઊપડયા પછી 2 સેકન્ડ બાદ નીચે ઊતરતા દ્રવ્યને એકદમ રોકી લેવામાં આવે છે અને તે જ ક્ષણે પાછું પડવા માટે છોડી દેવામાં આવે છે. દોરી ફરી વાર ટાઈટ થતાં સુધીમાં કેટલો સમય વીતી જશે તે શોધી કાઢો.

(૧૦) લીસી ગરગડી પરથી પસાર થતી દોરી વડે 1 પા. અને $\frac{1}{16}$ પા. નાં બે દ્રવ્યો એકબીજા સાથે જોડવામાં આવેલાં છે. ભારે દ્રવ્ય શા પ્રવેગ સાથે નીચે ઊતરશે? સ્થિર સ્થિતિમાંથી 1 ફૂ. નીચે ઊતરતાં આ દ્રવ્ય જમીન પર આવી પહોંચે છે. સિદ્ધ કરો કે ત્યાર પછી $\frac{1}{2}\sqrt{(15/17)}$ સેકન્ડના સમય બાદ દોરી ફરી પાછી ટાઈટ થઈ જશે.

(૧૧) દોરીને છેડે લટકતું 8 પા. નું એક દ્રવ્ય બીજા દ્રવ્યને 30° ઢોળાવના ઢાળ ઉપર ખેંચે છે. 4 સેકન્ડ ગતિ ચાલુ રહ્યા બાદ બન્ને દ્રવ્યોને જોડતી દોરી તૂટી જાય છે. જો બીજું દ્રવ્ય નીચે ઊતરતા પહેલાં 2 ફૂ. સુધી ઢાળ ઉપર ચઢે તો તે દ્રવ્યનું દ્રવ્યમાન શોધો.

(૧૨) 6 ફૂ. ઊંચા એક લીસા ટેબલ ઉપર તેની ધારથી 18 ફૂ. ને અન્તરે 5 પા. નું દ્રવ્ય પડેલું છે. અને 18 ફૂ. લાંબી દોરી વડે તે દ્રવ્યને ટેબલની ધાર પર રહેલા 3 પા. ના દ્રવ્ય જોડે બાંધેલું છે. જો 3 પા. વજનના દ્રવ્યને

ધારની પેલી તરફ જરા સરકાવવામાં આવે તો તેને જમીન પર પહોંચવા માટે કેટલો સમય લાગશે અને 5 પા. ના દ્રવ્યને ટેબલની ધાર સુધી પહોંચતાં કેટલો વધારે સમય લાગશે તે શોધી કાઢો.

(૧૩) એક ક્ષૈતિજ ટેબલ ઉપર ઘર્ષણ વગર એક ટ્રોલી દોડી શકે છે. ટેબલની ધાર પર જડેલી ગરગડી પરથી પસાર થતી દોરીનો એક છેડો ટ્રોલી સાથે બાંધેલો છે. અને તેને બીજે છેડે અમુક નિશ્ચિત વજન બાંધેલું છે. જ્યારે ટ્રોલી પર 500 ગ્રા. નું વજન મૂકવામાં આવે છે ત્યારે આખી વ્યવસ્થા 15 સે. મી./સેક^2.ના પ્રવેગથી ગતિ કરે છે. જ્યારે ટ્રોલી પર બીજું 500 ગ્રા. નું વજન મૂકવામાં આવે છે, ત્યારે વ્યવસ્થાની ગતિનો પ્રવેગ 11 સે. મી./સેક^2. થઈ જાય છે. સિદ્ધ કરો કે દોરીને બીજે છેડે બાંધેલું નિશ્ચિત વજન લગભગ 21 ગ્રા. નું છે, જ્યારે ટ્રોલીનું દ્રવ્યમાન 854 ગ્રામ છે.

(૧૪) લીસા ખીલા પરથી પસાર થતી દોરીને બે છેડે m ગ્રામનાં બે સરખાં દ્રવ્યો બાંધેલાં છે. જ્યારે એક છેડા ઉપરના વજનમાં 5 ગ્રા.નો વધારો કરવામાં આવે છે ત્યારે આખી વ્યવસ્થા f સે.મી./સેક^2.ના પ્રવેગથી ગતિ કરે છે. જ્યારે તે જ છેડે બીજું 5 ગ્રા.નું વજન વધારવામાં આવે છે ત્યારે વ્યવસ્થાનો પ્રવેગ $\frac{81}{41} f$ થઈ જાય છે. m ની કિંમત શોધો.

(૧૫) પ્રત્યેક 4 પા. વજનનાં બે પલ્લાં ગરગડીની સામસામી બાજુએ એક જ દોરી વડે લટકાવેલાં છે. એક પલ્લામાં 10 પા. નું અને બીજામાં 6 પા. દ્રવ્ય મૂકીને વ્યવસ્થાને ગતિ આપવામાં આવે છે. મોટું દ્રવ્ય 4 ફૂ. નીચું ઊતરી રહ્યા પછી તે પલ્લામાંથી 8 પા.નું દ્રવ્ય ઊઠાવી લેવામાં આવે છે. ક્ષણ પૂરતું સ્થિર થવા પહેલાં તે દ્રવ્ય કેટલું અન્તર નીચે ઊતરશે તે શોધી આપો.

(૧૬) એક ક્ષૈતિજ ટેબલ પર 3 પા. દ્રવ્યમાનનો પદાર્થ A પડેલો છે. ટેબલની ધાર પર મૂકેલી એક ગરગડી પરથી પસાર થતી દોરી વડે નીચે લટકતા 7 પા. દ્રવ્યમાનના બીજા પદાર્થ B સાથે તે જોડેલો છે. ટેબલ ખરબચડું હોવાને કારણે $\frac{1}{2}$ પા. વ. નું અવરોધક બળ ઉત્પન્ન થાય છે. વળી ગરગડીને

લીધે પણ એટલું જ ગતિઅવરોધક બળ ઉત્પન્ન થાય છે. B જમીનથી 4 ફૂ. ઊંચાઈએ છે અને A ગરગડીથી 15 ફૂ. દૂર છે ત્યારે ગતિ શરૂ થવા દેવામાં આવે છે અને જેવું B જમીનને અડકે છે કે દોરી તૂટી જાય છે. A ગરગડી સુધી પહોંચશે કે નહિ તે નક્કી કરો.

(૧૭) m_1 તથા m_2 દ્રવ્યમાનનાં બે કણો એક લીસા ઢાળ ઉપર રહેલાં છે. દોરીનો એક છેડો m_1 જોડે બાંધવામાં આવે છે અને પછી દોરીને મહત્તમ ઢોળાવની દિશામાં ઉપર લઈ જઈ, ઢાળને મથાળે રહેલા ચક્ર ઉપરથી ફેરવીને ફરી પાછી મહત્તમ ઢોળાવની દિશામાં નીચે લાવી બીજે છેડે m_2 બાંધવામાં આવે છે. આમ m_1, m_2 તથા તેમને જોડતી દોરી ઢાળના સમતલમાં છે. જો $m_1 \neq m_2$ તો ઉત્પન્ન થતી ગતિનું વર્ણન કરો.

(૧૮) પહાડી રેલ્વે લાઈનના બે સમાન્તર પાટાઓ ઉપર બે વેગનો ગતિ કરે છે; પાટાઓ ક્ષૈતિજ જોડે 30°નો ખૂણો બનાવે છે. વેગનોનાં વજન 15 ટન અને 20 ટન છે તથા ઢાળને મથાળે રહેલા એક પૈડા પરથી પસાર થતા કેબલ વડે જોડાયેલાં છે. પ્રત્યેક વેગનને નડતો ઘર્ષણજન્ય અવરોધ પ્રતિ ટન 20 પા. વ. છે, તથા બ્રેક લગાડવાથી વધારાનો 245 પા. વ. પ્રતિ ટન અવરોધ ઉત્પન્ન કરી શકાય છે. જો કલાકે 8 માઈલની ઝડપે ગતિ કરતાં બન્ને વેગનોને બન્નેને બ્રેક મારીને રોકવામાં આવે તો કેટલું અન્તર કાપીને વેગનો સ્થિર થશે? ભારે વેગન (૧) ઉપર તરફ ગતિ કરતું હોય, (૨) નીચે તરફ ગતિ કરતું હોય એ રીતે મળતા બન્ને વિકલ્પો જુદા જુદા વિચારો.

જવાબો :

(૧) $5\frac{1}{3}$ ફૂ./સેક^2., $5\frac{5}{6}$ પા. વ. (૨) 12 પા., 8 ફૂ./સેક^2. (૪) $3\sqrt{2}/4$ સેક. (૫) $3\frac{4}{7}$. (૬) 25 ફૂ. (૭) $57\frac{1}{7}$ ફૂ., $10\frac{2}{7}$ પા. વ. (૮) $10\frac{2}{3}$ ફૂ./સેક^2., $21\frac{1}{3}$ ફૂ., $5\frac{1}{3}$ ફૂ. નીચે તરફ અને $26\frac{2}{3}$ ફૂ. નીચે તરફ. (૯) 1 સેક. (૧૧) $13\frac{1}{3}$ પા. (૧૨) 1 સેક., 1 સેક. (૧૪) 200 ગ્રા. (૧૫) $2\frac{2}{3}$ ફૂ. (૧૬) ગરગડીથી 0·6 ફૂ. દૂર A સ્થિર થાય છે. (૧૮) 11·3 ફૂ., 45·9 ફૂ.

પ્રકરણ ૮

વેગમાન અને શક્તિના સિદ્ધાન્તો

૧. પ્રાસ્તાવિક.

આ પ્રકરણમાં આપણે પ્રવેગિકીના બે મૂળભૂત સિદ્ધાન્તોની ચર્ચા કરીશું. આ સિદ્ધાન્તો ન્યૂટનના ગતિનિયમોમાંથી ફલિત થાય છે; અને કેટલાક ખાસ પ્રકારના ગતિપ્રશ્નો હલ કરવામાં તેમનો ઉપયોગ થાય છે. સર્વપ્રથમ આપણે ન્યૂટનનો ત્રીજો ગતિનિયમ લઈશું અને તેમાંથી વેગમાનનો સિદ્ધાન્ત તારવીશું. પરંતુ તે પહેલાં આપણે બળના આઘાતના ખ્યાલથી પરિચિત થવું પડશે. આઘાતની વ્યાખ્યાથી જ આપણે શરૂઆત કરીએ.

૨. બળનો આઘાત.

બળ **P** કોઈ કણ ઉપર t સેકન્ડ માટે કાર્ય કરે છે. જો બળ અચળ હોય તો **આપણે બળના આઘાતને બળના મહત્ત્વ અને તેના કાર્ય-સમયના ગુણાકારથી માપીશું.**

$$\text{આ રીતે આઘાત} = I = \text{બળ} \times \text{કાર્યસમય} = Pt. \qquad (1)$$

જો બળ m દ્રવ્યમાનના કણમાં f પ્રવેગ ઉત્પન્ન કરી શકે તો ન્યૂટનના બીજા નિયમ પ્રમાણે $P = mf$. (2)

સ. ક. (2) ઉપરથી જણાશે કે અચળ બળ અચળ પ્રવેગ ઉત્પન્ન કરશે. આ પુસ્તકમાં આપણે અચળ પ્રવેગથી ઉત્પન્ન થતી ગતિ માટેનાં સૂત્રો જ શીખ્યા છીએ. તેથી અહિં આપણને ફક્ત અચળ બળોમાં જ રસ છે. સ. ક. (2) નો સ. ક. (1) માં ઉપયોગ કરતાં જણાશે કે

$$I = mft. \qquad (3)$$

પરંતુ અચળ પ્રવેગ f થી થતી ગતિ માટેના આપણા સૂત્ર

$$v = u + ft \text{ માંથી}$$

$$v - u = ft \text{ મળશે.}$$

$\therefore$ સ. ક. (3) નીચેનું રૂપ ધારણ કરશે.

$$\begin{aligned} I &= m(v-u) \\ &= mv - mu \\ &= \text{વેગમાનવૃદ્ધિ.} \end{aligned} \tag{4}$$

આ રીતે, **કોઈ પણ સમયાન્તરમાં બળનો આઘાત તે પદાર્થમાં તે જ સમયાન્તરમાં ઉત્પન્ન થતી વેગમાનવૃદ્ધિ બરાબર થાય.** આ એક વ્યાપક પ્રમેયની પ્રતિજ્ઞા છે; અલબત્ત આપણે પ્રમેયને ફક્ત અચળ બળ માટે જ સિદ્ધ કર્યું છે. વેગમાન સદિશ છે. તેથી બળનો આઘાત પણ સદિશ થશે. સ. ક. (4) એક સદિશ સમીકરણ થશે. એટલે કે તે સમીકરણનું વાંચન આ પ્રમાણે થવું જોઈએ. કોઈ પણ દિશામાં બળનો આઘાત તે જ દિશાની પદાર્થની વેગમાનવૃદ્ધિ બરાબર થાય. આપણે હવે, આઘાતના આ ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરીને આઘાતી ગતિ શું છે તે સમજવા યત્ન કરીશું.

૩. આઘાતી ગતિ.

જમીન તરફ ફેંકાતા એક રબરના દડાની ગતિનો આપણે વિચાર કરીશું. રબરના દડાને જોરથી જમીન તરફ ફેંકતાં તે જમીન પર અફળાય છે અને તરત જ પાછો ઉપર ઊછળે છે. જ્યારે શરૂઆતમાં દડો નીચે પડતો હોય છે ત્યારે તેનો પ્રવેગ અચળ રહે છે (પ્રવેગ$=g$) તે તો આપણે જાણીએ છીએ. કોઈ પણ સમયે તેની સ્થિતિ કે વેગ પણ સૂત્રોની મદદથી શોધી શકાય. દડાની આ નીચે તરફની ગતિ (અધોગતિ)ની આપણને પૂરેપૂરી જાણકારી છે. જે વેગ v સાથે દડો જમીન પર અફળાય છે તે પણ આપણે શોધી શકીશું. પરંતુ જેવો દડો જમીનને અડકયો કે આપણી તેની ગતિ વિષેની જાણકારી પૂરી થઈ. પછી કંઈક થાય છે (શું થાય છે તે આપણે અત્યારે જાણતા નથી) જેને પરિણામે દડો તરત જ

ઉપર તરફ કોઈ નિશ્ચિત વેગ (ધારો કે u) થી ગતિ કરવા લાગે છે. આ વેગ uની કિંમત પણ આપણે જાણતા નથી. પરંતુ એક વાર દડાની ઊર્ધ્વગતિ શરૂ થઈ એટલે તેનો પ્રવેગ $-g$ થશે અને આપણાં અચળ પ્રવેગનાં સૂત્રો વાપરીને ઉર્ધ્વગતિની માહિતી મેળવી શકીશું.

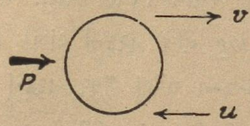
આ રીતે દડાની કુલ ગતિ ત્રણ ભાગમાં વહેંચી શકાય: (૧) નીચે તરફની ગતિ — અધોગતિ કે પતનગતિ, (૨) જમીન સાથે અફળાવું, (૩) ઉપર તરફની ગતિ — ઊર્ધ્વગતિ કે ઉત્થાનગતિ. આમાંની પહેલી અને ત્રીજી ગતિ આપણાં અચળ પ્રવેગનાં સૂત્રો વડે સમજી કે ચર્ચી શકાશે. અહિં આપણે બીજા ભાગની — જમીન સાથે દડાની અથડામણની — ચર્ચા કરવી છે. દડાની ગતિના આ વિભાગને **આઘાતી ગતિ** કહે છે. દડાનો ફર્શ પર પછડાટ, ક્રિકેટમાં બોલને બૅટનો ફટકો, એરણ ઉપર હથોડાનો ઘા, આ બધાં આઘાતી ગતિનાં ઉદાહરણો છે.

આવી આઘાતી ગતિ બહુ જ થોડા સમય માટે ચાલુ રહે છે. આ ટૂંકા સમયમાં એક બીજા સાથે અથડાતા પદાર્થો પોતાની સ્થિતિ બદલતા નથી, પરંતુ તેમના વેગમાં ઘણા મોટા ફેરફાર થાય છે. ઉપરના ઉદાહરણમાં દડો નીચે તરફના v વેગથી જમીન પર અફળાયો અને ઉપર તરફના u વેગથી ઊછળ્યો. હવે વેગમાન એ વેગ અને દ્રવ્યમાનના ગુણાકારથી પ્રાપ્ત થાય છે. તેથી દડાના જમીન પરના પછડાટ દરમિયાન દડાનું વેગમાન બદલાઈ ગયું. વેગમાનનો ફેરફાર તે દડા પર કાર્ય કરતા આઘાતની બરાબર થાય. જો આપણે આ આઘાતની કિંમત જાણતા હોઈશું તો દડાની વેગમાનવૃદ્ધિ શોધી કાઢી શકીશું. અને તેથી ઊલટું જો આ વૃદ્ધિ જાણતા હોઈશું તો આઘાતનું મહત્ત્વ શોધી શકાશે. નીચેનાં ઉદાહરણો આ રીતને વધારે સ્પષ્ટ કરશે.

૪. ઉદાહરણો.

(૧) 2 ઔંસ વજનના અને ક્ષૈતિજ દિશામાં 60 ફૂ./સેક. ના વેગથી ગતિ કરતા એક ટેનીસદડાને ફટકો મારીને સીધો 100 ફૂ./સેક. ના વેગથી પાછો વાળવામાં આવે છે. જો ફટકા દરમિયાન સંપર્ક $\frac{1}{20}$ સેકન્ડ સુધી ચાલુ રહ્યો હોય તો રેકેટથી કેટલા મહત્ત્વનું સરેરાશ બળ અજમાવાયું હશે?

માની લો કે આ સરેરાશ બળનું મહત્ત્વ P પાઉન્ડલ છે, તો પછી તે બળનો આઘાત $= P \times t = P \times \frac{1}{20}$ થશે.



આકૃતિ ૭૪

હવે આપણે દડાની વેગમાનવૃદ્ધિ ગણી કાઢીશું. દડાનું દ્રવ્યમાન 2 ઔંસ $= \frac{1}{8}$ પા. છે. આપણે બળની દિશાને ધન દિશા ગણી છે. તેથી આઘાત પહેલાંનો દડાનો વેગ -60 ગણાશે અને રેકેટના ફટકા પછી દડો $+100$ ના વેગથી પાછો ફરે છે.

ફટકા પહેલાંનું દડાનું વેગમાન $= \frac{1}{8}(-60)$

ફટકા પછીનું દડાનું વેગમાન $= \frac{1}{8}(100)$

$\therefore$ વેગમાનવૃદ્ધિ = (ફટકા પછીનું વેગમાન) − (ફટકા પહેલાંનું વેગમાન)

$$= \frac{1}{8}(100) - \frac{1}{8}(-60)$$
$$= 20.$$

આ આઘાતની બરાબર હોવું જોઈએ.

$$\therefore \quad \frac{1}{20} P = 20$$
$$\therefore \quad P = 400 \text{ પાઉન્ડલ}$$
$$= \frac{25}{2} \text{ પા. વ.}$$

(૨) 4 પા. નું એક દ્રવ્ય 3 ફૂ. ની ઊંચાઈએથી એક એરણ ઉપર પછડાય છે. અને 4 ઇન્ચ જેટલું ઊંચું ઊછળે છે. જો પછડાટ દરમિયાન બે વચ્ચેનો સંપર્ક $\frac{1}{50}$ સેકન્ડ સુધી ચાલુ રહ્યો હોય, તો દ્રવ્ય અને એરણ વચ્ચેના આઘાત દરમિયાન ઉત્પન્ન થયેલા બળનું સરેરાશ મહત્ત્વ શોધો.

ધારો કે આ બળનું સરેરાશ મહત્ત્વ P છે. આ બળ એરણ ઉપર નીચેની દિશામાં કાર્ય કરે છે. અને દ્રવ્ય ઉપર તેથી ઊલટી (ઉપરની) દિશામાં કાર્ય કરશે. આપણે દ્રવ્ય પર કાર્ય કરતાં બળોનો વિચાર કરીશું. તે બળો નીચે પ્રમાણે છે:

(૧) તેનું વજન mg નીચે તરફની લંબક દિશામાં.

(૨) આઘાતથી ઉત્પન્ન થયેલું ઉપર તરફનું બળ P.

આપણે ઉપર તરફની દિશાનાં સદિશોને ધન નિશાની આપીશું. તો પછી પદાર્થ પર $(P - mg)$ બળ ઉપરની દિશામાં કાર્ય કરે છે. તે બળનો આઘાત $(P - mg)\frac{1}{50}$ થશે.

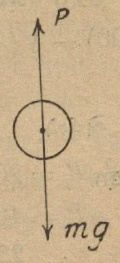
હવે વેગમાનની ગણતરી કરીશું :

માનો કે પદાર્થ v વેગથી એરણ પર અથડાય છે.

તો $\quad v^2 = u^2 + 2fs$ માંથી પ્રાપ્ત થશે કે

$$v^2 = 0 + 2g \times 3 = 6g$$

$\therefore \quad v = 8\sqrt{3}$ ફૂ./સેક.



આકૃતિ ૭૫

આ વેગની દિશા નીચે તરફની લંબક છે.

ધારો કે પદાર્થ u વેગથી ઉપર તરફ ઊછળે છે.

ફરી પાછું $v^2 = u^2 + 2fs$ વાપરતાં જણાશે કે

$$0 = u^2 - 2g\frac{4}{12}$$

$\therefore \quad u = 8/\sqrt{3}$ ફૂ./સેક.

આ વેગની દિશા ઉપર તરફની લંબક છે.

$\therefore$ ઉપર તરફની લંબક દિશામાં વેગમાનવૃદ્ધિ

$$= m \times \frac{8}{\sqrt{3}} - m\,(-8\sqrt{3})$$

$$= \frac{m \times 32}{\sqrt{3}}.$$

આ વૃદ્ધિને એ જ દિશાના આઘાત સાથે સરખાવતાં નીચેનું સમીકરણ મળશે :

$$(P - mg)\,\frac{1}{50} = \frac{32m}{\sqrt{3}}.$$

પરંતુ $m = 4.$

$\therefore$ $$P = \frac{4 \times 32\,(50 + \sqrt{3})}{\sqrt{3}} \text{ પાઉન્ડલ}$$

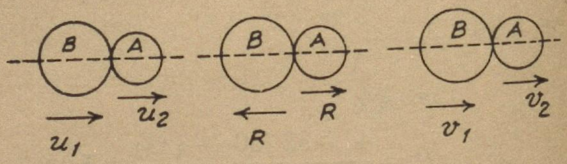
$$= \left(\frac{200}{\sqrt{3}} + 4\right) \text{ પા. વ.}$$

૫. વેગમાનનો સિદ્ધાન્ત.

ઉપરનાં આઘાતી ગતિનાં ઉદાહરણોમાં, જે ટૂંકા સમયાન્તર દરમિયાન અથડાતા પદાર્થો એકબીજા જોડે સંપર્કમાં રહે છે, તે સમયાન્તરો આપેલાં હતાં. પરંતુ વ્યવહારમાં આવાં ટૂંકાં સમયાન્તરો માપવાં બહુ મુશ્કેલ છે. પરંતુ જો આ સમયાન્તરો માપી શકાય નહિ તો આપણે બળનો આઘાત શોધી શકીએ નહિ એટલે ઉપર વાપરેલી ગતિવ્યવસ્થા જાણવાની આપણી રીત કામ ન આપી શકે. આવી પરિસ્થિતિમાં આપણે ન્યૂટનનો ત્રીજો નિયમ વાપરીએ છીએ અને અથડાતા બન્ને પદાર્થોનો એક સાથે વિચાર કરીએ છીએ.

u_1 અને u_2 વેગથી એક જ સુરેખામાં ગતિ કરતા m_1 અને m_2 દ્રવ્યમાનના બે પદાર્થો લો. તે પદાર્થો એકબીજા જોડે અથડાય છે અને અથડામણ પછી અનુક્રમે v_1 અને v_2 વેગથી પ્રવાસ શરૂ કરે છે. અથડામણ દરમિયાન A પદાર્થ

ઉપર R બળ કાર્ય કરે છે. ન્યૂટનના ત્રીજા નિયમ પ્રમાણે પદાર્થ B ઉપર એ જ મહત્ત્વનું અને વિરુદ્ધ દિશાનું પ્રતિક્રિયાબળ કાર્ય કરશે. તેથી પદાર્થ B ઉપર $-R$ બળ કાર્ય કરશે. આ રીતે દરેક પદાર્થ ઉપર એક એક બળ કાર્ય કરે છે. પરંતુ જો આપણે બન્ને પદાર્થો A અને B નો એક સાથે વિચાર કરીશું તો જણાશે કે બન્ને પદાર્થોને સાથે ગણતાં તેમનાં ઉપરનાં બળો $+R$ અને $-R$ છે; એટલે કે શૂન્ય છે. આ રીતે ન્યૂટનના ત્રીજા નિયમથી ફલિત થાય છે કે બન્ને પદાર્થોને એક સાથે ગણતરીમાં લેતાં તેમના પર કોઈ બળ કાર્ય કરતું નથી. તેથી બન્નેને સાથે ગણતાં તેમના ઉપર કોઈ આઘાતી બળ નથી.



આકૃતિ ૭૬

∴ બન્નેની, સાથે ગણતાં, વેગમાનવૃદ્ધિ શૂન્ય થશે.

∴ અથડામણ પહેલાં બન્નેનું વેગમાન

= અથડામણ પછીનું બન્નેનું વેગમાન.

$$\therefore \qquad m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2. \qquad (1)$$

આ છેલ્લું સમીકરણ **વેગમાન ભંડોળની સુરક્ષિતતાનો સિદ્ધાન્ત** સૂચવે છે. તે સિદ્ધાન્ત વાપરતાં બે મુદ્દાઓ ધ્યાનમાં રાખવા જરૂરી છે. પ્રથમ તો એ સિદ્ધાન્ત બન્ને પદાર્થોને સાથે લઈને વાપરવાનો છે, નહિ કે બેમાંના કોઈ એક પદાર્થ માટે. બીજું, બધાં વેગમાન એક જ દિશામાં લેવાવાં જોઈએ. જો એકાદ વેગ ઊલટી દિશામાં હોય તો તે સ. ક. (1) માં ઋણ નિશાની સાથે આવશે.

૬. ઉદાહરણો.

(૧) *કલાકે 6 માઇલની ઝડપે દોડતી 5 ટન વજનની ટ્રક તેની આગળ કલાકે 4 માઇલની ઝડપે દોડતી 10 ટન વજનની એક ટ્રકને પકડી પાડે છે અને તેની સાથે અથડાય છે. અથડામણ બાદ જો ભારે ટ્રકનો વેગ કલાકે 5 માઇલ થઇ જાય તો બીજી ટ્રકનો વેગ શો હશે તે શોધી કાઢો.*

ધારો કે અથડામણ બાદ બીજી ટ્રકનો વેગ કલાકે v માઈલ થશે. વેગમાનના સિદ્ધાન્ત પ્રમાણે

અથડામણ પહેલાંનું વેગમાન = અથડામણ પછીનું વેગમાન

$\therefore \quad 10 \times 4 + 5 \times 6 = 10 \times 5 + 5 \times v$

$\therefore \quad v = 4$ મા./કલાક.

$\therefore$ બીજી ટ્રકનો વેગ કલાકે 4 માઇલ થશે.

(૨) *12 ફૂ./સેક.ના વેગથી ગતિ કરતો 2 પા. વજનનો એક દડો તેની સામેથી 4 ફૂ./સેક.ના વેગથી આવતા 4 પા. વજનના બીજા દડા સાથે અથડાય છે. જો અથડામણ બાદ બન્ને દડા એક સાથે જ નાના દડાની ગતિની દિશામાં પ્રવાસ કરે તો તે બન્નેનો સામાન્ય વેગ શોધો.*

ધારો કે બન્નેનો સામાન્ય વેગ v ફૂ./સેક. છે.

અથડામણ પહેલાં :

પહેલા દડાનું દ્રવ્યમાન	2	છે.
તેનો વેગ	12	છે.
બીજા દડાનું દ્રવ્યમાન	4	છે.
તેનો વેગ	−4	છે.

અથડામણ પછી :

બન્નેનો વેગ v છે.

∴ વેગમાનભંડોળની સુરક્ષિતતાનો સિદ્ધાન્ત વાપરતાં જણાશે કે

$$2 \times 12 + 4 . (-4) = 2 \times v + 4 \times v$$

$$\therefore \quad v = \tfrac{4}{3} \text{ ફૂ./સિક.}$$

(૩) 8 પા. વજનની એક બંદૂકમાંથી $\frac{1}{8}$ ઔંસ વજનની ગોળી 1200 ફૂ./સેક. ના વેગથી છોડવામાં આવે છે. ગોળી છુટતાંની સાથે બંદૂક શા વેગથી પાછળ હઠશે તે શોધી કાઢો.

ગોળી પર જે બળ કાર્ય કરે છે તેથી ઉલટી જ પ્રતિક્રિયા બંદૂક પર કાર્ય કરે છે. ફરી પાછું બન્નેને સાથે ગણતાં, તેમની પર કોઈ બળ કાર્ય કરતું નથી એમ જણાશે. અને તેથી તેમનું કુલ વેગમાન સચવાઈ રહેશે. માનો કે બન્દૂક v ફૂ./સિક. વેગથી પાછળ હઠે છે. તેનો વેગ $-v$ લેવો જોઈશે.

ગોળીનું વેગમાન $= (\frac{1}{8} \times \frac{1}{16}) \times 1200 = \frac{75}{8}$.

બન્દૂકનું વેગમાન $= 8(-v) \qquad = -8v$.

પરંતુ ગોળી છૂટી તે પહેલાં વેગમાન શૂન્ય હતું.

∴ વેગમાનભંડોળની સુરક્ષિતતાના સિદ્ધાન્ત અનુસાર

ગોળી છૂટતાં પહેલાંનું વેગમાન

= ગોળી છૂટયા પછીનું વેગમાન.

$$\therefore \quad 0 = \frac{75}{8} - 8v$$

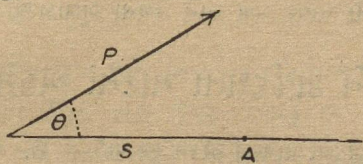
$$\therefore \quad v = \frac{75}{64} = 1\frac{11}{64} \text{ ફૂ./સિક.}$$

૭. કાર્ય.

હવે આપણે બીજા સિદ્ધાન્ત—શકિતના સિદ્ધાન્ત—તરફ વળીશું. પરંતુ તે સિદ્ધાન્ત ચર્ચીએ તે પહેલાં **કાર્ય** અને **કાર્યદક્ષતા** (પાવર)ના

ખ્યાલોથી પરિચિત થઈ જવું જરૂરી છે. અહિં પણ આપણને અચળ મહત્ત્વનાં બળો સાથે જ સંબંધ છે, તે યાદ કરી લઈએ.

બળના મહત્ત્વ અને તેના કાર્યબિન્દુના બળની દિશામાં થયેલા સ્થળાન્તરના ગુણાકારને આપણે બળના કાર્ય તરીકે વ્યાખ્યા કરીશું.



આકૃતિ ૭૭

O પર રહેલા કણ પર બળ P કાર્ય કરે છે. અને આ કણ $OA = s$ અન્તર ખસે છે. (**આ. ૭૭.**)

$$\text{બળે કરેલું કાર્ય} = P \times s \cos \theta. \tag{1}$$

જો બળ સ્થળાન્તર OAની દિશામાં જ કાર્ય કરતું હોય તો θ શૂન્ય થશે, $\cos \theta = 1$ થશે અને

$$P\text{નું કાર્ય} = P \times s. \tag{2}$$

સુરેખા ગતિના અનુસંધાનમાં આપણને સામાન્ય રીતે સ. ક. (2) નો ખપ વધારે પડવાનો છે.

૮. કાર્યદક્ષતા અથવા પાવર.

પાવર એટલે બળનો કાર્ય કરવાનો દર. અચળ બળની અસર નીચે થતી સુરેખાગતિમાં પાવર માટે આપણને એક સાદી અભિવ્યકિત મળી શકે છે.

$$\text{પાવર} = \text{કાર્ય કરવાનો દર}$$

$$= \frac{d}{dt}\,(\text{કાર્ય})$$

$$= \frac{d}{dt}(Ps)$$

$$= P\frac{ds}{dt}$$

$\therefore$ પાવર $= Pv$.

અચળ બળનો પાવર બળ અને વેગના ગુણાકારથી પ્રાપ્ત થાય છે.

૯. કાર્ય અને કાર્યદક્ષતા માટેનાં એકમો.

F.P.S. પદ્ધતિમાં પાવરનું એકમ ફૂટ પાઉન્ડલ છે. જ્યારે 1 પાઉન્ડલનું બળ તેના કાર્યબિન્દુને 1 ફૂ. પોતાની દિશામાં ખસેડે છે ત્યારે તે બળ 1 ફૂટ પાઉન્ડલનું કાર્ય કરે છે એમ કહેવાય છે.

F.P.S. પદ્ધતિમાં પાવરનું એકમ ફૂટ પાઉન્ડલ/સેકન્ડ છે.

C.G.S. પદ્ધતિમાં કાર્યનું એકમ અર્ગ છે.

જ્યારે 1 ડાઇનનું બળ તેના કાર્યબિન્દુને 1 સે. મી. પોતાની દિશામાં ખસેડે છે ત્યારે તે બળ 1 અર્ગનું કાર્ય કરે છે એમ કહેવાય છે.

C.G.S. પદ્ધતિમાં પાવરનું એકમ અર્ગ/સેકન્ડ છે.

અર્ગ પ્રતિ સેકન્ડ કે ફૂટ પાઉન્ડલ પ્રતિ સેકન્ડ એ પાવર માપવા માટેનાં બહુ નાનાં એકમો છે. વ્યવહારમાં એથી મોટાં એકમોનો ઉપયોગ થાય છે. આ મોટાં એકમો તે વૉટ અને હોર્સ-પાવર (અશ્વબળ) છે. વૉટ એ C.G.S. પદ્ધતિનું મોટું એકમ છે.

1 વૉટ $= 10^7$ અર્ગ/સેકન્ડ.

હોર્સ-પાવર એ F.P.S. પદ્ધતિનું મોટું એકમ છે.

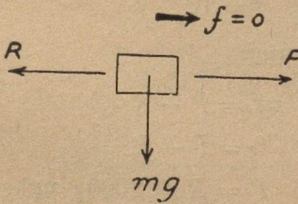
1 હોર્સ-પાવર $= 550g$ ફૂટ પાઉન્ડલ/સેક.

આ રીતે, જો કોઈ યંત્રનો પાવર H હોર્સ-પાવર હોય તો તેનો પાવર $H550g$ ફૂટ પાઉન્ડલ/સેક. થશે. તેથી આગલા પેરેગ્રાફના છેલ્લા સમીકરણ (4) પ્રમાણે $H550g = Pv$ થશે.

અહિં P એ યંત્ર વડે અજમાવાતું અચળ બળ છે. અને તેને પાઉન્ડલમાં દર્શાવવું જોઈએ. યંત્રોના પાવરને લગતા દાખલાઓમાં સ. ક. (4) બહુ ઉપયોગનું છે. આપણે ફરીથી નોંધી લઈએ કે સ. ક. (4) માં P પાઉન્ડલમાં અને v ફૂ./સિકન્ડમાં દર્શાવવાં જોઈએ.

૧૦. ઉદાહરણો.

(૧) એક એન્જિન અને ટ્રેનનું કુલ દ્રવ્યમાન 200 ટન છે. જો એન્જિન ગાડીને લેવલ પાટા ઉપર કલાકે 60 માઈલની ઝડપે ગતિ કરતી રાખી શકે તો તે માટે એન્જિનને કેટલો હોર્સ-પાવર વાપરવો જોઈશે તે શોધી કાઢો. ઘર્ષણ વગેરેને કારણે ઉત્પન્ન થતું અવરોધક બળ પ્રતિ ટન 10 પા. વ. છે.



આકૃતિ ૭૮

પ્રથમ તો આપેલી રાશિઓને આપણાં પ્રમુખ એકમોમાં વ્યકત કરી લઈએ.

દ્રવ્યમાન $= 200$ ટન

$= 200 \times 2240$ પા.

વેગ $= 60$ મા./ક.

$= 88$ ફૂ./સિક.

અવરોધક બળ $=$ પ્રતિ ટન 10 પા. વ.

$= 2000$ પા. વ.

$= 2000g$ પાઉન્ડલ.

ધારો કે એન્જિનનો હોર્સ-પાવર H છે તો

એન્જિનનો પાવર $= H \times 550g$ ફૂટ પાઉન્ડલ/સેક.

એન્જિન વડે અજમાવાતાં બળને P કહો. ન્યૂટનના બીજા નિયમનો ઉપયોગ કરીને આપણે P ની કિંમત શોધી શકીશું.

ટ્રેન પર કાર્ય કરતાં બળોની યાદી :

(૧) એન્જિને અજમાવેલું બળ P.

(૨) અવરોધક બળ R.

(૩) ટ્રેનનું વજન.

(૪) પાટાની પ્રતિક્રિયા.

હવે ગાડી અચલ વેગથી પ્રવાસ કરે છે તેથી તેનો પ્રવેગ શૂન્ય થશે.

$$\therefore \quad f = 0.$$

ન્યૂટનના બીજા નિયમ પ્રમાણે

$$mf = P - R$$

$$\therefore \quad 0 = P - R$$

$$\therefore \quad P = R = 2000g \text{ પાઉન્ડલ.}$$

$$\text{હવે} \quad \text{પાવર} = \text{બળ} \times \text{વેગ}$$

$$\therefore \quad H550g = 2000g \times 88$$

$$\therefore \quad H = 320.$$

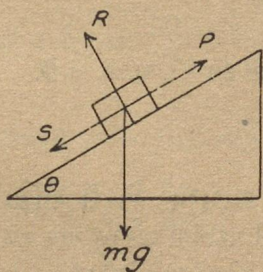
(૨) 400 હો. પા. નું એક એન્જિન 200 ટન વજનની ગાડીને 280 માં 1 ના ઢાળ ઉપર કલાકે 30 માઈલની ઝડપે ખેંચી શકે છે. પાટા સાથે ઘર્ષણને કારણે ઉત્પન્ન થતું અવરોધક બળ પ્રતિ ટન કેટલા પાઉન્ડ વજનનું હશે તે શોધી કાઢો.

પ્રથમ તો પ્રત્યેક આપેલી રાશિને આપણાં પ્રધાન એકમોમાં વ્યક્ત કરી લઈએ.

$$\text{પાવર} = 400 \text{ હો. પા.}$$
$$= 400 \times 550g \text{ ફૂટ પાઉન્ડલ/સેક.}$$
$$\text{દ્રવ્યમાન} = 200 \text{ ટન}$$
$$= 200 \times 2240 \text{ પા.}$$
$$\text{વેગ} = 30 \text{ મા/ક.}$$
$$= 44 \text{ ફૂ./સેક.}$$

ધારો કે અવરોધક બળ પ્રતિ ટન x પા. વ. છે.

$$\therefore \quad \text{અવરોધક બળ} = \text{પ્રતિ ટન } x \text{ પા. વ.}$$
$$= 200x \text{ પા. વ.}$$
$$= 200\,xg \text{ પાઉન્ડલ.}$$



આકૃતિ ૭૯

હવે એન્જિન વડે અજમાવાતું બળ P આપણે ન્યૂટનનો બીજો નિયમ વાપરીને શોધીશું.

ટ્રેન પર કાર્ય કરતાં બળોની યાદી:

(૧) તેનું વજન mg

(૨) એન્જિન વડે અજમાવાતું બળ P, ઢોળાવની દિશામાં.

(૩) અવરોધક બળ S.

(૪) ઢાળની પ્રતિક્રિયા R.

વેગ અચળ છે તેથી પ્રવેગ શૂન્ય થશે.

$$\therefore \quad f = 0.$$

ઢોળાવની ઉપર તરફની દિશામાં ન્યૂટનના બીજા નિયમનું સદિશ સ. ક. લખીએ.

$$\therefore \quad mf = P - S - mg\sin\theta$$

$$\therefore \quad 0 = P - 200xg - 200 \times 2240g\frac{1}{280}$$

$$\therefore \quad P = 200g(x + 8).$$

હવે પાવર = બળ × વેગ

$$\therefore \quad 400 \times 550g = 200g(x + 8) \times 44$$

$$\therefore \quad x + 8 = 25$$

$$\therefore \quad x = 17.$$

અવરોધક બળ પ્રતિ ટન 17 પા. વ. નું છે.

૧૧. શકિત.

કાર્ય કરવાનું સામર્થ્ય એટલે શક્તિ. પદાર્થ કેટલું કાર્ય કરી શકે એમ છે તે માપવાથી પદાર્થની શકિતનું માપ મળે. ભિન્ન ભિન્ન કારણોને લઈને પદાર્થ શકિત ધારણ કરી શકે અને તેથી કરીને આપણને શકિતના ઘણા પ્રકારો જોવા મળે છે. જેમકે ઉષ્ણતાશકિત, વિદ્યુતશકિત વિગેરે વિગેરે. આ પુસ્તકમાં આપણને પદાર્થની "યાંત્રિકશકિત"માં રસ છે. પદાર્થના સ્થિતિ કે ગતિના યાંત્રિક ગુણધર્મોને કારણે તેને જે શકિત મળી રહે તે તેની યાંત્રિકશકિત કહી શકાય.

આ યાંત્રિકશકિત બે પ્રકારની હોય છે: (૧) ગતિશકિત. (૨) સ્થિતિશકિત અથવા ગર્ભિતશકિત.

૧૨. ગતિશક્તિ.

પદાર્થની ગતિને કારણે તેને મળનારી શક્તિ તે પદાર્થની ગતિશક્તિ.

v વેગથી પ્રવાસ કરતા m દ્રવ્યમાનના એક કણનો આપણે વિચાર કરીશું. કણ ગતિમાન્ છે. તેથી તે થોડી ગતિજન્ય શકિત ધારણ કરે છે. આપણે તેની આ શકિતની m અને v ના સંકેતમાં અભિવ્યકિત શોધીશું.

માનો કે આ ગતિમાન કણ લાકડાના એક દટ્ટાને ભેદીને તેની અંદર x ફૂ. સુધી ધસી જઈને પછી સ્થિર થાય છે. આમ કરવામાં કણને લાકડાના અવરોધક બળ Rની વિરુદ્ધ થોડું કાર્ય કરવું પડશે. આ કાર્ય એ ગતિ કરતા કણની શકિતનું માપ થશે.

કણની ગતિશકિત = અવરોધ સામે કરેલું કાર્ય

$\therefore$ ગ. શ. $= Rx.$ (1)

અવરોધ R પ્રતિપ્રવેગ f ઉત્પન્ન કરશે, જ્યાં

$$R = mf.$$

હવે સ. ક. (1) નીચે પ્રમાણે લખી શકાશે:

ગ. શ. $= mfx.$ (2)

પરંતુ પ્રતિપ્રવેગ f (અથવા પ્રવેગ$-f$ને) કારણે વેગ v, x અન્તરમાં શૂન્ય થઈ જશે.

તેથી $v^2 = u^2 + 2fs$ એ સૂત્ર પ્રમાણે

$$0 = v^2 - 2fx$$

$$\therefore \quad fx = \tfrac{1}{2}v^2.$$

તેથી સ. ક. (2) હવે

ગ. શ. $= mfx = \frac{1}{2}mv^2$ થશે.

v વેગથી ગતિ કરતા કણની ગતિશકિત $\frac{1}{2}mv^2$ થઈ.

૧૩. સ્થિતિશક્તિ.

પદાર્થના સ્થાનને કારણે પદાર્થને મળતી શક્તિ તે પદાર્થની સ્થિતિશક્તિ. આપેલા સ્થાન પરથી કોઈ પૂર્વનિશ્ચિત સ્થાન

સુધી પહોંચતાં પદાર્થ જે કાર્ય કરે છે તે આપેલા સ્થાન પરની પદાર્થની સ્થિતિ-શકિત થશે. કોઈ પદાર્થને જમીનથી h ફૂ. ની ઊંચાઈએ મૂકવામાં આવે તો ત્યાં તેને થોડી સ્થિતિશકિત પ્રાપ્ત થાય છે જે પદાર્થને ત્યાંથી જમીન સુધી પડવા દેવામાં થતા કાર્ય વડે માપી શકાય.

આ કાર્ય = પદાર્થનું વજન $\times h$

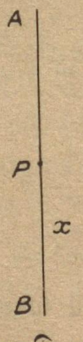
$$= mgh.$$

m દ્રવ્યમાનના h ઊંચાઈએ રહેલા પદાર્થની સ્થિતિશકિત mgh છે.

૧૪. શક્તિનો સિદ્ધાન્ત.

પદાર્થની ગતિની કોઈ પણ ક્ષણે પદાર્થની સ્થિતિ-શક્તિ અને ગતિશક્તિનો સરવાળો અચળ છે.

આ એક સર્વસામાન્ય સિદ્ધાન્ત છે. આપણે ફકત ગુરુત્વાકર્ષણ નીચે પડતા કણની ગતિ માટે તેની સત્યતા પુરવાર કરીશું.



આકૃતિ ૮૦

B બિન્દુથી h ફૂ. ની ઊંચાઈએ આવેલા A બિન્દુએ સ્થિર રહેલું એક કણ નીચે પડે છે. t સેકન્ડ બાદ કણ કોઈ P બિન્દુએ પહોંચશે. Pની Bથી ઊંચાઈને x કહો.

A બિન્દુ ઉપર :

$$\text{સ્થિતિશકિત} = mgh.$$

$$\text{ગતિશકિત} = \tfrac{1}{2}m(0)^2 = 0$$

$$\text{સ્થિ. શ.} + \text{ગ. શ.} = mgh. \qquad (1)$$

P બિન્દુ ઉપર :

$$\text{સ્થિતિશકિત} = mgx.$$

$$\text{ગતિશકિત} = \tfrac{1}{2}mv^2.$$

પરંતુ
$$v^2 = u^2 + 2fs$$
$$= 0 + 2g(h - x).$$

$$\therefore \quad \text{ગતિશકિત} = \tfrac{1}{2}m2g(h - x)$$
$$= mg(h - x).$$

$$\therefore \quad \text{સ્થિ. શ.} + \text{ગ. શ.} = mgx + mg(h - x)$$
$$= mgh. \qquad (2)$$

B બિન્દુ ઉપર :

$$\text{સ્થિતિશકિત} = 0.$$

$$\text{ગતિશકિત} = \tfrac{1}{2}mv^2.$$

પરંતુ
$$v^2 = u^2 + 2fs$$
$$= 0 + 2gh.$$

$$\therefore \quad \text{ગતિશકિત} = \tfrac{1}{2}m2gh = mgh$$

$$\therefore \quad \text{સ્થિ. શ.} + \text{ગ. શ.} = mgh. \qquad (3)$$

સ. ક. (1), (2) અને (3) દર્શાવે છે કે ગતિની ગમે તે ક્ષણે ગ. શ. + સ્થિ. શ. નું મૂલ્ય એક જ આવે છે.

૧૫. ઉદાહરણો.

(૧) m દ્રવ્યમાનનું એક કણ u વેગથી ગતિ કરે છે. એક અચળ બળ P તેની ઉપર t સેકન્ડ લગી કાર્ય કરે છે. સિદ્ધ

કરેા કે આ સમય દરમિયાન કણની ગતિશક્તિની વૃદ્ધિ એ બળ P એ કરેલા કાર્યની બરાબર થાય.

બળ P પ્રવેગ f ઉત્પન્ન કરશે જ્યાં

$$P = mf \text{ અથવા } f = P/m.$$

આ પ્રવેગને કારણે કણનેા વેગ t સેકન્ડમાં બદલાઈને v થઈ જાય છે.

એટલે ગતિશકિતની વૃદ્ધિ $= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mu^2$. (1)

આ સમયમાં જો કણ s અન્તર કાપે તેા

બળ P નું કાર્ય $= Ps$. (2)

પરંતુ $$v^2 = u^2 + 2fs$$

$$\therefore \quad \frac{v^2 - u^2}{2} = fs = \frac{P}{m} s.$$

$\therefore$ સ. ક. (1) માંથી

$$\text{ગતિશકિતની વૃદ્ધિ} = \tfrac{1}{2}m(v^2 - u^2)$$

$$= m \frac{P}{m} s$$

$$= Ps$$

$= $ બળ P એ કરેલું કાર્ય.

(૨) 20 ફૂ. ઊંડા ફૂવામાંથી મિનિટના 1100 ગેલન પાણીને ખેંચીને તેને નળવાટે 192 ફૂ./સેક. ના વેગથી આગળ ધકેલવા માટે કેટલા હોર્સ–પાવરના પંપની જરૂર પડશે? (૧ ગેલન પાણીનું વજન 10 પા. થાય છે.)

પંપ બે હેતુસર કાર્ય કરે છે. (૧) પાણીને 20 ફૂ.ની ઊંચાઈ સુધી ઉપર ચઢાવવાનું. (૨) તે પાણીને $v = 192$ ફૂ./સેક. નેા વેગ આપવાનું. આ બન્ને હેતુઓ માટે પંપને પ્રતિ સેકન્ડ કેટલું કાર્ય કરવું પડે છે તે આપણે શેાધીશું.

1 ગેલન પાણીનું દ્રવ્યમાન 10 પા. છે.

$\therefore$ 1100 ,, ,, ,, 11000 પા. થશે.

આટલું પાણી એક મિનિટમાં ચઢાવવાનું છે. તેથી એક સેકન્ડમાં $\frac{11000}{60}$ પા. પાણી ચઢાવવાનું છે.

$\therefore$ પાણી ચઢાવવામાં થતું કાર્ય

$$= mgh$$

$$= \frac{11000}{60} \times g \times 20.$$

આ કાર્યને W_1 કહો.

પાણીને v વેગ આપવા માટે જરૂરી કાર્ય

= પાણીને મળતી ગતિશકિત

$$= \tfrac{1}{2}mv^2$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{11000}{60}\ (192)^2 \text{ ફૂટ પાઉન્ડલ/સેક.}$$

આ કાર્યને W_2 કહો.

પંપનો પાવર = પ્રતિ સેકન્ડ પંપને કરવું પડતું કાર્ય

$$= W_1 + W_2$$

$$= \frac{11000}{60}\left(20g + \frac{(192)^2}{2}\right)$$

$$= \frac{550}{3}g(20 + 576)$$

જો પંપનો હોર્સ-પાવર H હોય તો પાવર $H550g$ પણ થશે

$$\therefore \quad H550g = \frac{550}{3}g(20 + 576)$$

$$\therefore \quad H = \frac{596}{3} = 198{\cdot}66.$$

મનોયત્ન X.

(૧) 12 પા. વજનનું દ્રવ્ય 8 ફૂ./સેક.ના વેગથી ગતિ કરે છે. તેને $\frac{1}{5}$ સેકન્ડમાં સ્થિર કરવા માટે કેટલા મહત્ત્વના અચળ બળની જરૂર પડશે તે કહો.

(૨) 5 પા. વજનનો એક પદાર્થ 20 ફૂ./સેક. ના વેગથી ગતિ કરે છે. એક અચળ અવરોધક બળ પદાર્થ ઉપર 2 સેકન્ડ સુધી કાર્ય કરે છે. અને તેને કારણે તેનો વેગ ઘટીને 10 ફૂ./સેક. થઈ જાય છે. અવરોધનું મહત્ત્વ શોધો.

(૩) 5 પા. નું એક દ્રવ્ય સ્થિર છે. તેને ફટકો મારીને 15 ફૂ./સેક. ના વેગથી ગતિમાન્ કરવામાં આવે છે. જો ફટકાની અવધિ $\frac{1}{100}$ સેકન્ડની ગણી શકાય તો ફટકા દરમિયાન પદાર્થ ઉપર કાર્ય કરતા બળનું સરેરાશ મહત્ત્વ ગણી કાઢો.

(૪) કલાકના 3·75 માઈલના વેગથી દોડતો 10 ટન વજનનો ટ્રેનનો એક ડબ્બો 0·5 સેકન્ડમાં બફર સાથે અથડાઈને સ્થિર થાય છે. બફરમાં ઉત્પન્ન થયેલા બળનું સરેરાશ મહત્ત્વ શું હશે?

(૫) 4 ફૂ. ની ઊંચાઈથી 10 પા. વજનનો હથોડો લોખંડની પટ્ટી પર પડે છે. જો આઘાતનો સમય $\frac{1}{40}$ સેકન્ડ લઈએ તો હથોડા વડે અજમાવાયેલા બળનું સરેરાશ મહત્ત્વ શોધો.

(૬) એક લીસા ટેબલ ઉપર પડેલા લાકડાના 1 પા. વજનના કકડામાં 900 ફૂ./સેક. ના વેગથી આવતી 2 ઔંસ વજનની બંદૂકની ગોળી ધસી જાય છે અને કકડાની અંદર ફસાઈ રહે છે. લાકડાનો કકડો (ગોળી સાથે) શા વેગથી ચલણ કરે છે તે શોધી કાઢો.

(૭) 64 ટન વજનની એક તોપ 800 પા. વજનનો ગોળો 2100 ફૂ./સેક. ના વેગથી છોડે છે. તોપ શા વેગથી પાછળ હઠશે તે શોધી કાઢો. પાછળ હઠતી તોપને 6 ફૂ.નું અન્તર કાપતાં સુધીમાં સ્થિર કરવા માટે કેટલા પાઉન્ડ વજનનું અવરોધક બળ જોઈશે?

(૮) 2 ઔંસ વજનનો એક દડો 3 ફૂ. ઊંચાઈએથી ફર્શ પર પછડાય છે અને 3 ફૂ. ઊંચો ઉછળે છે. તેના વેગમાનનો ફેરફાર શોધી કાઢો.

(૯) 4 ઔંસ વજનનો એક લોખંડનો દડો લોખંડની પટ્ટી ઉપર 10 ફૂ. ની ઊંચાઈએથી પડે છે અને 12 ફૂ./સેક. ના વેગથી પાછો ઊછળે છે. દડાના વેગમાનનો ફેરફાર શોધો. જો અથડામણનો સમય $\frac{1}{48}$ સેકન્ડ હોય તો પછડાટને કારણે દડા પર કાર્ય કરતા બળનું સરેરાશ મહત્ત્વ શોધો.

(૧૦) 10 પા. વજનનો દડો 10 ફૂ./સેક. ના વેગથી 9 ફૂ. નીચે આવેલા ક્ષૈતિજ સમતલ પર ફેંકવામાં આવે છે. અને તેટલી જ ઊંચાઈ સુધી પાછો ઉપર ઊછળે છે. સમતલ સાથે અફળાવાને કારણે દડાનાં વેગમાન અને શકિતમાં થયેલા ફેરફાર ગણી કાઢો. જો અફળાટ દરમિયાન સંપર્ક $\frac{1}{28}$ સેક. ચાલુ હતો એમ ગણીએ તો પછડાટને કારણે દડા પર કાર્ય કરતા બળનું સરેરાશ મહત્ત્વ શોધો.

(૧૧) જમીનથી 100 ફૂ. ની ઊંચાઈએ આવેલા એક બિન્દુ પરથી છોડેલો 2 પા. વજનનો એક પદાર્થ લંબક દિશામાં નીચે પડે છે. પ્રસ્થાન સમયે તેની સ્થિતિશકિત શોધો. 60 ફૂ. નું અન્તર નીચે પડયા પછી તેની સ્થિતિ અને ગતિશકિત પણ શોધો.

(૧૨) 8 પા. વજનના એક પડતા પત્થરનો વેગ જ્યારે 40 ફૂ./સેક. છે ત્યારે તે જમીનથી 50 ફૂ. ની ઊંચાઈએ હોય છે. જમીન પર પહોંચતાં સુધીમાં તેનામાં કેટલું કાર્ય કરવાનું સામર્થ્ય છે તે ગણી કાઢો.

(૧૩) 3 ઔંસ દ્રવ્યમાનની એક ગોળી 1630 ફૂ./સેક. ના વેગથી એક નિશાન તરફ છોડવામાં આવે છે. નિશાનનું વજન 10 પા. છે અને તે ગતિ કરવા માટે સ્વતંત્ર છે. અથડામણથી થતી શકિતની ઘટ શોધી કાઢો.

(૧૪) 10 ફૂ./સેક. ના વેગથી ગતિ કરતું 20 પા. નું એક દ્રવ્ય તેની સામેની દિશામાંથી 6 ફૂ./સેક.ના વેગથી આવતા 10 પા. ના દ્રવ્ય જોડે અથડાય છે. જો બે દ્રવ્યો મળીને એક દ્રવ્ય થઈ જાય તો એ એક દ્રવ્યનો વેગ શોધો અને ગતિશકિતની ઘટ શોધી કાઢો.

(૧૫) *M* ટનની તોપમાંથી 8 પા. વજનનો એક ગોળો 1400 ફૂ./સેક. ના વેગથી છોડવામાં આવે છે. પાછી હઠતી તોપને 7 પા. વ.નું બળ અવરોધે

છે. અને પરિણામે 5 ફૂ. પાછળ હઠયા બાદ તે સ્થિર થઈ જાય છે. Mની કિંમત શોધો.

(૧૬) કલાકે 15 માઈલની ઝડપે એક રેલ્વે વેગન ગતિ કરે છે. જમીન પર સ્થિર ઊભા રહેલા માણસ પાસેથી જ્યારે વેગન પસાર થાય છે ત્યારે એકદમ પેલો માણસ તે પર ચઢી જાય છે. જો માણસનું વજન 160 પા. હોય અને વેગનનું વજન ૨ ટન હોય તો સાબિત કરો કે વેગન પ્રતિસેકન્ડ $\frac{22}{29}$ ફૂ. નો વેગ ગુમાવશે. જો માણસ વેગનમાંથી એકદમ ઊતરી પડે તો વેગનના વેગમાં કાંઈ ફેરફાર થશે? અને થશે તો કેટલો થશે?

(૧૭) કલાકે 40 માઈલની ઝડપે પ્રવાસ કરતી એક ટ્રેનમાંથી 90 પા. વજનનો એક ટપાલનો થેલો, સ્થિર ઊભેલા એક વેગનમાં નાખવામાં આવે છે. જો વેગનનું દ્રવ્યમાન 140 પા. હોય તો 30 ફૂ. નું અન્તર કાપતાં સુધીમાં તેને સ્થિર કરવા માટે કેટલું સરેરાશ અવરોધક બળ જોઈશે?

(૧૮) $\frac{1}{2}$ ઔંસ વજનનું એક જન્તુ 6 ફૂ. ઊંચી દિવાલ ઉપર 4 કલાકમાં ચઢી જાય છે. જન્તુ કેટલા હો. પા. થી કાર્ય કરે છે?

(૧૯) 100 હો. પા.નું એક એન્જિન અચળ અવરોધ સામે 250 ટનની ગાડીને કલાકે 45 માઈલની ઝડપે દોડાવી શકે છે. અવરોધક બળનું મહત્ત્વ શોધો.

(૨૦) લેવલ ઉપર કલાકે 45 માઈલની ઝડપે દોડતી ગાડીનું એન્જિન જો 25 હો. પા. ની શકિત વાપરતું હોય તો ગતિને અવરોધતાં બળોનું મહત્ત્વ શોધો.

જો ગાડીનું કુલ વજન 1 ટન હોય તો એટલી જ ઝડપે 20 માં 1 ના ઢાળ ઉપર ગાડી ચલાવવા માટે કેટલા વધારાના હોર્સ-પાવરની જરૂર પડશે?

(૨૧) એન્જિન અને ટ્રેનનું કુલ વજન 440 ટન છે. જો લેવલ ઉપર ટ્રેન કલાકના 45 માઈલની ઝડપે દોડતી રહે તો તે માટે એન્જિન કેટલા હો. પા. થી કાર્ય કરતું હશે તે શોધી કાઢો. અવરોધક બળો દર ટને 10 પા. વજનનાં ગણવાં.

(૨૨) પ્રતિટન 9 પા. વજનના અવરોધક બળ સામે 400 ટનની ટ્રેનને 200માં 1 ના ઢાળ ઉપર કલાકે 40 માઈલનો વેગ આપવા માટે ઓછામાં ઓછા કેટલા હોર્સ-પાવરનું એન્જિન જોઈશે?

(૨૩) 1 ટન વજનની મોટરગાડી 60માં 1 ના ઢાળવાળી ટેકરી પર કલાકના 8 માઈલના વેગથી ચઢી શકે છે. અવરોધક બળ ગાડીના વજનનો 50મો ભાગ છે. જો ટેકરી ઉપરથી ઊતરતાં એન્જિન એટલા જ હો. પા.થી કાર્ય કરે તો ગાડી શા વેગથી નીચે ઊતરશે તે શોધી કાઢો.

(૨૪) 30 ફૂ. ઊંડા કૂવામાંથી મિનિટના 2000 પા. પાણી ખેંચીને તેને 10 ફૂ./સેક.ના વેગથી નળમાં વહાવવા માટે કાર્ય કરતો પંપ કેટલા હોર્સ-પાવરનો જોઈશે તે શોધી કાઢો.

(૨૫) 55 ફૂ. ની ઊંડાઈથી પાણી ઉપર ચઢાવીને સેકન્ડના 16 ગેલનના હિસાબે 44 ફૂ./સેક.ના વેગથી નળમાં વહેવડાવવાનું છે. એક ગેલન પાણીનું વજન જો 10 પા. હોય તો એક સેકન્ડમાં વહી જતા પાણીની ગતિશકિત કાઢો અને આ સઘળું કાર્ય કરતા પંપનો હોર્સ-પાવર શોધો.

(૨૬) 5 ટન વજનનો ઈંટનો જથ્થો 50 ફૂ. ઊંચા મકાનની અગાશી ઉપર લઈ જવાનો છે. તે માટે સરેરાશ $\frac{1}{12}$ હો. પા. શકિતવાળા 10 માણસો કામે લાગે છે. કામ પૂરું કરતાં તેમને કેટલો સમય લાગવો જોઈએ?

(૨૭) જો 168 પા. વજનનો એક માણસ $\frac{1}{5}$ હો. પા. તાકાત ધરાવતો હોય તો

(૧) 40 ફૂ. ઊંચી સીડી ચઢીને ઉપરના રૂમમાં તે ઓછામાં ઓછા કેટલા સમયમાં પહોંચી શકે?

(૨) 12માં 1 ના ઢાળ ઉપર 30 પા. વજનની સાયકલ તે વધારેમાં વધારે કેટલા વેગથી ચલાવી શકશે?

(૨૮) 9 ઈન્ચની ઊંચાઈવાળાં 124 પગથિયાંનો એક દાદર છે. 196 પા. વજનનો એક માણસ આ દાદર ઉપર 8 સેકન્ડમાં ચઢી જાય છે; 140 પા. વજનનો એક બીજો માણસ આ જ દાદર ઉપર 6 સેકન્ડમાં ચઢી જાય છે. બન્નેની તાકાત (પાવર)ની સરખામણી કરો.

(૨૯) m દ્રવ્યમાનનું એક કણ સ્થિર છે. ચોક્કસ સમય માટે તેની ઉપર એક અચળ બળ કાર્ય કરે છે. આ સમય દરમિયાન બળનો આઘાત I છે. સિદ્ધ કરો કે આ સમયમાં ઉત્પન્ન થતી ગતિશકિત $\frac{I^2}{2m}$ થશે.

(૩૦) 10 ફૂ. ની ઊંચાઈએ કામ કરતા એક કડીઆને એક મજૂર ઈંટો પહોંચાડે છે. તે એવી રીતે ઈંટો ફેંકે છે કે જ્યારે ઈંટ કડીઆના હાથમાં પહોંચે ત્યારે તેનો વેગ 10 ફૂ./સેક. હોય. કડીઆના હાથમાં બરાબર પહોંચી જ રહે તેવા વેગથી જો મજૂર ઈંટો ફેંકતો હોત તો તે કેટલા પ્રમાણમાં કાર્યનો બચાવ કરી શકત તે શોધી કાઢો.

(૩૧) નદીના વહેણનો વેગ જો કલાકે $4\frac{1}{2}$ માઈલનો હોય તો જે જગ્યાએ નદીનો પટ 100 ફૂ. છે અને સરેરાશ ઊંડાઈ 20 ફૂ. છે ત્યાંથી વહેણમાંથી કેટલો પાવર ઉત્પન્ન થઈ શકશે તે કહો.

જો આ નદીને છેડે 50 ફૂ. નીચે પડતો ધોધ હોય તો પાણીમાંથી કેટલો હો. પા. મળી રહેશે?

[1 ઘન ફૂ. પાણીનું વજન 62·5 પા.]

(૩૨) 150 ટનની એક ટ્રેન જ્યારે કલાકે 30 માઈલના વેગથી દોડતી હોય છે ત્યારે 20 ટન વજનનો તેનો પાછલો ભાગ છુટ્ટો થઈ જાય છે. જો આ ભાગ સ્થિર થવા પહેલાં 1 માઈલ સુધી દોડયા કરે અને જો તેની ગતિને અવરોધતું પ્રતિટન બળ આખી ગાડીની ગતિને અવરોધતાં બળ જેટલું જ હોય તો આ અવરોધક બળનું મહત્ત્વ શોધો અને પાછલો ભાગ છુટ્ટો થયો તે પહેલાં એન્જિન કેટલા હો. પા.થી કાર્ય કરતું હતું તે પણ શોધી કાઢો.

(૩૩) જો M દ્રવ્યમાનની તોપમાંથી m દ્રવ્યમાનનો ગોળો છોડવામાં આવે તો સિદ્ધ કરો કે તોપની પાછળ હઠવાની શકિત અને ગોળાની આગળ વધવાની શકિત $m:M$ ના પ્રમાણમાં છે.

(૩૪) 8 પા. દ્રવ્યમાનવાળી એક ઈંટ કૂવામાં પડે છે. સ્થિર સ્થિતિમાંથી 25 ફૂ. ના પતન બાદ ઈંટ પાણીની સપાટી સાથે અફળાય છે. અફળાટનો

આઘાત બરાબર એટલો છે કે જો તે $\frac{1}{4}$ પા. દ્રવ્યમાનના 25 ફૂ. ઊંચાઈથી પડતા પદાર્થ પર કાર્ય કરે તો પદાર્થનું વેગમાન સંપૂર્ણ નાબૂદ કરી નાખે. પછી ઈંટ પાણીમાં $g/2$ પ્રવેગ સાથે ઊતરવા લાગે છે અને પાણીની સપાટીથી $55\frac{1}{2}$ ફૂ. ઊંડાઈએ આવેલા કૂવાને તળિયે જઈ બેસે છે. (૧) સ્થિર સ્થિતિમાંથી કૂવાના તળિયા સુધીનો ગતિ સમય તથા (૨) તળિયે પહોંચતાં ઈંટનું વેગમાન ગણી કાઢો.

જવાબો :

(૧) 15 પા. વજન. (૨) 25 પાઉન્ડલ. (૩) $234\frac{3}{8}$ પા. વ. (૪) 7700 પા. વ. (૫) 210 પા. વ. (૬) 100 ફૂ./સેક. (૭) $11\frac{23}{32}$ ફૂ./સેક., 22·8 ટન વજન. (૮) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ F.P.S. એકમ. (૯) 9·32 પા. ફૂ./સેક., 14·23 પા. વ. (૧૦) 500 પા. ફૂ./સેક. 500 ફૂટ પાઉન્ડલ, $322\frac{1}{2}$ પા. વ. (૧૧) 200 ફૂ. પા. વ., 120 ફૂ. પા. અને 80 ફૂ. પા. (૧૨) 16000 ફૂટ પાઉન્ડલ એટલે કે 500 ફૂ. પા. (૧૩) $7640\frac{5}{8}$ ફૂ. પા. વ. (૧૪) $4\frac{2}{3}$ ફૂ/.સેક., $26\frac{2}{3}$ ફૂ. પા. (૧૫) 5. (૧૬) ફેરફાર થશે નહિ. (૧૭) 63·13 પા. વ. (૧૮) (1/42240000). (૧૯) પ્રતિટન $3\frac{1}{3}$ પા. વ. (૨૦) $208\frac{1}{3}$ પા. વ. 13·44. (૨૧) 528. (૨૨) 862 કરતાં થોડું ઓછું. (૨૩) 88 મા./ક. (૨૪) $1\frac{241}{264}$ એટલે કે લગભગ 2. (૨૫) 4840 ફૂ. પા., 24·8. (૨૬) $20\frac{4}{11}$ મિનિટ. (૨૭) લગભગ 1 મિનિટ, $6\frac{2}{3}$ ફૂ/.સેક. (૨૮) 21:20. (૩૦) 5/37. (૩૧) લગભગ 1021, 76021. (૩૨) પ્રતિટન $12\frac{5}{6}$ પા. વ., 154. (૩૪) 2·4 સેક., 458 ફૂ. પા. સે. એકમ.

પ્રકરણ ૯

વક્રરેખામાં ગતિ

૧. પ્રાસ્તાવિક.

જ્યારે કોઈ કણ સુરેખામાં ગતિ કરે છે ત્યારે ગતિ સાથે સંબંધ ધરાવતાં સદિશો (જેવાં કે વેગ, પ્રવેગ વગેરે) એક જ દિશામાં — ગતિદિશામાં જ — રહે છે. આ કારણે સુરેખાગતિનો અભ્યાસ ખૂબ જ સરળ થઈ જાય છે કારણ કે આપણે આ સદિશોના મહત્ત્વના ફેરફારોનો જ વિચાર કરવાનો રહે છે. તેઓની દિશા તો બદલાતી જ નથી.

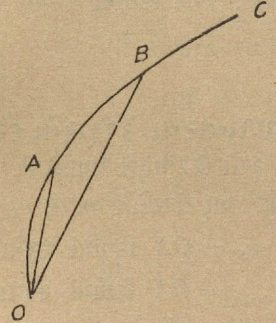
આ પ્રકરણમાં આપણે કણની વક્રરેખામાં થતી ગતિનો અભ્યાસ કરવાનો છે. અને તેથી સુરેખાગતિને કારણે મળતી સરળતા અહિં નહિ મળે. આપણે સ્થળાન્તર, વેગ, પ્રવેગ, વગેરેની વ્યાખ્યાથી શરૂઆત કરીશું અને આ સદિશોનાં મહત્ત્વ તથા દિશા બન્ને તરફ હવે લક્ષ કેન્દ્રિત કરીશું. આ રીતે આ બધાં સદિશો વક્રરેખા ગતિમાં કઈ રીતે વપરાય છે તે જોયા પછી આપણે વક્રરેખાગતિનું એક સાદું ઉદાહરણ લઈશું.

૨. સ્થળાન્તર.

O કણનું પ્રસ્થાનબિન્દુ છે. $OABC$ રેખા ઉપર કણ ગતિ કરે છે. [**આ.** (૮૧) જુઓ.] થોડા સમય પછી કણ A પર આવે છે. ત્યારે તેનું સ્થળાન્તર **OA** થશે. એક વાત યાદ રાખવી જરૂરી છે કે સ્થળાન્તર ફક્ત પ્રસ્થાનબિન્દુ O અને અન્તિમ બિન્દુ A ઉપર જ આધાર રાખે છે. કણ O થી A સુધી કયે માર્ગે ગતિ કરીને જાય છે તે માર્ગ સાથે સ્થળાન્તરને સંબંધ નથી. એટલે જ્યારે કણ A બિન્દુએ પહોંચશે ત્યારે તેનું સ્થળાન્તર **OA** થશે. જ્યારે તે B બિન્દુએ પહોંચશે ત્યારે તેનું સ્થળાન્તર **OB** થશે. આ રીતે સ્થળાન્તરનાં દિશા અને

મહત્ત્વ બન્ને બદલાતાં રહે છે. આપણે આ બન્નેના ફેરફારો ગણતરીમાં લેવા જોઈશે.

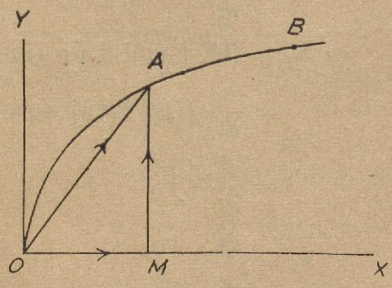
O માંથી બે સગવડ પડતી પરસ્પર લંબ રેખાઓ OX, OYને અક્ષ તરીકે પસંદ કરો. આ અક્ષોના આધારે A નાં યામ (x, y) મૂકો.



આકૃતિ ૮૧

આ. (૮૨)માં $OM = x$ અને $MA = y$. હવે સદિશ સરવાળાના નિયમ પ્રમાણે

$$\mathbf{OA} = \mathbf{OM} + \mathbf{MA}.$$



આકૃતિ ૮૨

સ્થળાન્તર **OA** બે સંઘટકોનું બનેલું છે. (૧) એક સંઘટક $OM = x$ છે અને તેની દિશા $\parallel OX$ છે. (૨) બીજો સંઘટક $MA = y$ છે તેની

દિશા $\|$ OY છે. જ્યારે કણ એક સુરેખામાં ગતિ કરે છે ત્યારે તેનું સ્થળાન્તર ગતિ દિશામાં માપેલા એક જ અન્તર s વડે દર્શાવી શકાય છે પરંતુ જ્યારે કણ વક્રરેખામાં ગતિ કરે છે ત્યારે તેના સ્થળાન્તરને OX અને OY દિશાના બે સંઘટકો x અને y વડે દર્શાવવું જોઈએ. **આ.** (૮૨) માં જો Bનાં યામ (h,k) હોય તો સ્થળાન્તર **OB** બે સંઘટકોનું બને છે: OX દિશામાં h અને OY દિશામાં k.

૩. વેગ

વેગ એટલે સ્થળાન્તરના ફેરફારનો દર. કણના સ્થળાન્તરની બે નિશ્ચિત રેખાઓ OX અને OYમાં બે સંઘટકો છે. તેથી વેગના પણ એ જ દિશામાં બે સંઘટકો મળશે. આ સંઘટકોને આપણે v_x અને v_y કહીશું.

$$v_x = OX \text{ દિશામાં વેગનો સંઘટક}$$
$$= OX \text{ દિશામાં સ્થળાન્તરના ફેરફારનો દર}$$
$$= \frac{d}{dt}\,(OX \text{ દિશામાં સ્થળાન્તર})$$
$$= \frac{d}{dt}\,(x).$$

$$\therefore \qquad v_x = \frac{dx}{dt}. \qquad (1)$$

એ જ પ્રમાણે $\qquad v_y = OY$ દિશામાં વેગનો સંઘટક

$$= \frac{d}{dt}\,(OY \text{ દિશાનું સ્થળાન્તર})$$
$$= \frac{d}{dt}\,(y).$$

$$\therefore \qquad v_y = \frac{dy}{dt}. \qquad (2)$$

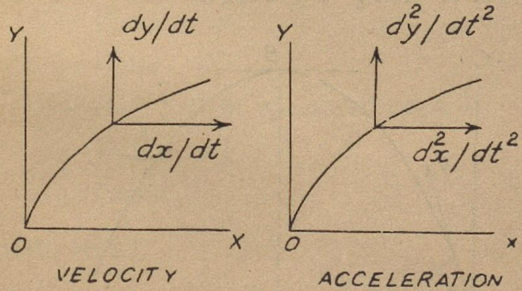
કણની ગતિના કોઈ પણ સમયે તેનો વેગ નીચેના બે સંઘટકોનો પરિણામી થશે: OX દિશાનો સંઘટક $v_x = \dfrac{dx}{dt}$ અને OY દિશાનો સંઘટક $v_y = \dfrac{dy}{dt}$.

૪. પ્રવેગ.

પ્રવેગ એ વેગવૃદ્ધિનો દર છે, અને તેથી ઉપર પ્રમાણે પ્રવેગના પણ બે સંઘટકો મળશે: (૧) OX દિશાનો સંઘટક f_x અને (૨) OY દિશાનો સંઘટક f_y.

$$f_x = OX \text{ દિશાનો પ્રવેગનો સંઘટક}$$
$$= OX \text{ દિશાનો વેગવૃદ્ધિનો દર}$$
$$= \frac{d}{dt} \;(OX \text{ દિશામાં વેગ})$$
$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right).$$

$$\therefore \qquad f_x = \frac{d^2x}{dt^2}. \qquad (3)$$



આકૃતિ ૮૩.

એ જ પ્રમાણે

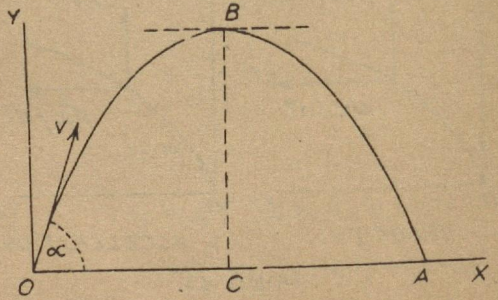
$$f_y = OY \text{ દિશામાં પ્રવેગનો સંઘટક}$$
$$= \frac{d}{dt} \;(OY \text{ દિશાનો વેગ})$$
$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)$$
$$= \frac{d^2y}{dt^2}. \qquad (4)$$

ગતિમાન કણની કોઈ પણ સ્થિતિમાં કણનો પ્રવેગસદિશ નીચેના બે સંઘટકોનો પરિણામી હશે: (૧) OX દિશામાં $f_x = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ અને (૨) OY દિશામાં $f_y = \dfrac{d^2y}{dt^2}$.

વેગ અને પ્રવેગના સંઘટકો **આ.** (૮૩)માં બતાવવામાં આવ્યા છે. હવે આપણે વક્રરેખાગતિનો એક સરળ દાખલો લઈશું.

૫. પ્રક્ષિપ્તની ગતિ.

ક્ષિતિજ જોડે α કોણ બનાવતી દિશામાં V વેગથી એક કણને ગુરુત્વાકર્ષણની અસર નીચે ફેંકવામાં આવે છે. પ્રક્ષિપ્ત કણની ગતિનું વર્ણન કરો.



આકૃતિ ૮૪

કણના પ્રસ્થાનબિન્દુને O કહો. Oમાંથી દોરેલી એક ક્ષૈતિજ રેખાને OX તરીકે પસંદ કરો અને O માંથી દોરેલી ઉપર તરફની લંબકને OY તરીકે પસંદ કરો. પ્રસ્થાન સમયે $t = 0$ થશે અને કણનું સ્થાન O છે $\therefore$ પ્રસ્થાન સમયે $x = 0$, $y = 0$. તે સમયે કણનો વેગ (પ્રસ્થાન વેગ) V છે અને તે ક્ષિતિજ જોડે α કોણ બનાવે છે.

$\therefore$ પ્રસ્થાન વેગનો x – સંઘટક $V\cos\alpha$ થશે.

અને ,, ,, y – સંઘટક $V\sin\alpha$ થશે.

કણ ગુરુત્વાકર્ષણ નીચે ગતિ કરે છે. તેથી ગતિની કોઈ પણ ક્ષણે તેનો પ્રવેગ નીચે તરફ g હશે.

$\therefore$ OX દિશામાં પ્રવેગ શૂન્ય થશે.

OY દિશામાં પ્રવેગ $-g$ થશે.

હવે આપણે OX અને OY દિશામાં ગતિની જુદી જુદી ગણતરી કરીશું અને દરેક દિશામાં આપણાં અચળ પ્રવેગનાં સૂત્રોનો ઉપયોગ કરીશું.

OX દિશામાં ગતિ :

પ્રવેગ $f = 0$, પ્રસ્થાનવેગ $u = V\cos\alpha$.

$\therefore$ $v = u + ft$ એ સૂત્ર પરથી જણાશે કે

$$v_x = V\cos\alpha + 0t$$

$$\therefore \quad v_x = V\cos\alpha. \tag{1}$$

હવે $s = ut + \frac{1}{2}ft^2$ એ સૂત્ર વાપરતાં જણાશે કે

$$x = V\cos\alpha t + \tfrac{1}{2} \times 0 \times t^2.$$

$$\therefore \quad x = Vt\cos\alpha. \tag{2}$$

OY દિશામાં ગતિ :

પ્રવેગ $f = -g$, પ્રસ્થાનવેગ $u = V\sin\alpha$.

$\therefore$ $v = u + ft$ સૂત્ર પરથી માલૂમ પડશે કે

$$v_y = V\sin\alpha - gt. \tag{3}$$

વળી $s = ut + \frac{1}{2}ft^2$ સૂત્ર પરથી જણાશે કે

$$y = V\sin\alpha t + \tfrac{1}{2}(-g)t^2$$

$$\therefore \quad y = Vt\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2. \tag{4}$$

પ્રક્ષિપ્તની ગતિ દરમિયાન કોઈ પણ ક્ષણે કણનું સ્થાન અને વેગ શોધવા માટે આપણે નીચેનાં ચાર સમીકરણો પ્રાપ્ત કર્યાં:

$$v_x = V\cos\alpha,$$
$$x = Vt\cos\alpha,$$
$$v_y = V\sin\alpha - gt,$$
$$y = Vt\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

પ્રક્ષિપ્તની ગતિ માટે જોઈતી માહિતી આપણને આ ચાર સમીકરણોમાંથી મળી રહેશે. આ કેમ બને છે તે જોવા માટે આપણે આ ગતિ માટે નીચેની બાબતોની માહિતી મેળવવા યત્ન કરીશું.

(૧) કણે કાપેલું ક્ષૈતિજ અંતર OA.

(૨) Oથી A સુધી જવા માટે કણને જે કુલ સમય લાગે છે તે સમય T. આ સમયને ઉડ્ડયનનો સમય પણ કહે છે.

(૩) ગતિ દરમિયાન કણે પ્રાપ્ત કરેલી વધારેમાં વધારે ઊંચાઈ H.

(૪) જે વક્રરેખામાં કણ ગતિ કરે છે તેનું સમીકરણ.

૬. ક્ષૈતિજ અન્તર અને ઉડ્ડયનનો સમય.

ધારો કે કણે કાપેલું ક્ષૈતિજ અંતર $= R$ છે અને ગતિનો કુલ સમય T છે. ત્યારે A બિન્દુ ઉપર

$$x = R,\ y = 0,\ t = T.$$

આપણે આ કિંમતો સ. ક. (2) અને (4) માં મૂકીશું.

સ.ક. (2) માંથી $R = VT\cos\alpha$ મળશે.

સ. ક. (4) માંથી $0 = VT\sin\alpha - \frac{1}{2}gT^2$ મળશે.

$\therefore$ $T(V\sin\alpha - \frac{1}{2}gT) = 0$

$\therefore$ કાં તો $T = 0$, નહિ તો $V\sin\alpha = \frac{1}{2}gT$.

પરંતુ $T \neq 0 \quad \therefore \quad V\sin\alpha = \frac{1}{2}gT$.

$$\therefore \quad T = \frac{2V\sin\alpha}{g}$$

ઉડ્ડયનનો સમય $\dfrac{2V\sin\alpha}{g}$ છે.

ક્ષૈતિજ અન્તર હવે નીચેના સ. ક. માંથી મળશે.

$$
\begin{aligned}
R &= VT\cos\alpha \\
&= V \times \frac{2V\sin\alpha}{g}\cos\alpha \\
&= \frac{V^2\sin 2\alpha}{g}.
\end{aligned}
$$

$\therefore$ ક્ષૈતિજ $R = \dfrac{V^2\sin 2\alpha}{g}$.

ફલિત પ્રમેય: મહત્તમ ક્ષૈતિજ અન્તર:

ક્ષૈતિજ અન્તર R α ઉપર આધાર રાખે છે. $R = V^2\sin 2\alpha/g$. જેમ α બદલાતો જશે તેમ R પણ બદલાશે. જ્યારે $\sin 2\alpha$ મહત્તમ થશે ત્યારે R મહત્તમ થશે.

પરંતુ $\sin 2\alpha$ ની મહત્તમ કિંમત 1 છે.

$\therefore$ R મહત્તમ થશે ત્યારે

$$\sin 2\alpha = 1$$

એટલે $$2\alpha = 90^\circ$$

અથવા $$\alpha = 45^\circ.$$

R ની મહત્તમ કિંમત R_{max} નીચે પ્રમાણે મળશે.

$$
\begin{aligned}
R_{max} &= \frac{V^2\sin 2\alpha}{g}, \text{ જ્યાં } \alpha = 45^\circ \\
&= \frac{V^2\sin 90^\circ}{g} = \frac{V^2}{g}.
\end{aligned}
$$

$\therefore$ મહત્તમ ક્ષૈતિજ અંતર $\dfrac{V^2}{g}$ છે અને જ્યારે કણને ક્ષિતિજ જોડે 45° નો ખૂણો બનાવતી દિશામાં ફેંકવામાં આવે છે ત્યારે તે આ મહત્તમ અંતર કાપે છે.

૭. કણે પ્રાપ્ત કરેલી વધારેમાં વધારે ઊંચાઈ.

કણના ગતિમાર્ગમાં ઉચ્ચતમ બિન્દુને B કહો. હવે વેગના OY દિશાના સંઘટકને કારણે કણ ઊંચું ચઢે છે. B સૌથી ઊંચે આવેલું બિન્દુ છે. એટલે કે કણ B બિન્દુથી વધારે ઊંચું જતું નથી. તેથી B ઉપર કણનો OY દિશાનો વેગ શૂન્ય થઈ જવો જોઈએ.

$\therefore$ B બિન્દુએ $v_y = 0$

$\therefore$ સ. ક. (3) વાપરતાં $V\sin\alpha - gt = 0$

અથવા તો $$t = \frac{V\sin\alpha}{g}.$$

આ B બિન્દુ પહોંચવાનો સમય મળ્યો. હવે જો મહત્તમ ઊંચાઈ H હોય તો B ઉપર $y = H$ અને $t = \dfrac{V\sin\alpha}{g}$.

$\therefore$ સ. ક. (4) વાપરતાં હવે જણાશે કે

$$y = Vt\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2$$

$$\therefore \quad H = V \times \frac{V\sin\alpha}{g}\sin\alpha - \tfrac{1}{2}g\frac{V^2\sin^2\alpha}{g}$$

$$= \frac{V^2\sin^2\alpha}{2g}.$$

કણે પ્રાપ્ત કરેલી મહત્તમ ઊંચાઈ $\dfrac{V^2\sin^2\alpha}{2g}$ છે.

૮. ગતિપથનું સમીકરણ.

$$x = Vt\cos\alpha. \qquad (2)$$

$$y = Vt\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2. \qquad (4)$$

જે વક્રરેખામાં કણ ગતિ કરે છે તે રેખાનાં આ પ્રચલીય સમીકરણો છે, જેમાંનો પ્રચલ t છે. ગતિપથનું (x, y) સમીકરણ આ બે સમીકરણો વચ્ચે tનું નિરસન કરવાથી પ્રાપ્ત થશે.

સ. ક. (2) માંથી tની કિંમત કાઢીએ.

$$t = \frac{x}{V\cos\alpha}.$$

હવે tની કિંમત સ. ક. (4) માં મૂકી દઈએ:

$$y = V \times \frac{x}{V\cos\alpha} \times \sin\alpha - \tfrac{1}{2}g\frac{x^2}{V^2\cos^2\alpha}.$$

અથવા
$$y = x\tan\alpha - \tfrac{1}{2}\frac{gx^2}{V^2\cos^2\alpha}.$$

જે વક્રરેખામાં કણ ગતિ કરે છે તે વક્રરેખાનું આ સમીકરણ છે. આ સમીકરણ દ્વિપરિમાણ છે. દ્વિપરિમાણીય પદ x^2 છે જે સંપૂર્ણ વર્ગ છે. તેથી આ વક્રરેખા પરવલય છે.

૯. ઉદાહરણો.

(૧) 30° ના પ્રક્ષેપખૂણાએ એક કણને 96 ફૂ./સેકન્ડના વેગથી ફેંકવામાં આવે છે. તેણે પ્રાપ્ત કરેલી મહત્તમ ઊંચાઈ, ઉડ્ડયનનો કુલ સમય અને જ્યારે તે જમીનથી 11 ફૂ. ની ઊંચાઈએ આવે છે ત્યારનો તેનો વેગ અને ગતિ દિશા શોધી કાઢો.

અહિં પ્રક્ષેપવેગ $V = 96$ અને $\alpha = 30°$.

$\therefore$ મહત્તમ ઊંચાઈ $= \dfrac{V^2\sin^2\alpha}{2g} = \dfrac{(96)^2.\frac{1}{4}}{2 \times 32}.$

$= 36$ ફૂ.

ઉડ્ડયનનો સમય $= \dfrac{2V\sin\alpha}{g}$

$= \dfrac{2 \times 96 \times \frac{1}{2}}{32}$

$= 3$ સેકન્ડ.

11 ફૂ. ની ઊંચાઈએ $y = 11$

$\therefore$ $y = Vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$ વાપરતાં જણાશે કે

$$11 = 96t\tfrac{1}{2} - 16t^2$$

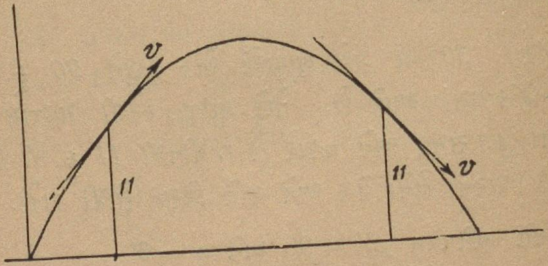
$\therefore$ $$16t^2 - 48t + 11 = 0$$

$\therefore$ $$16t^2 - 4t - 44t + 11 = 0$$

$\therefore$ $$(4t - 1)\ (4t - 11) = 0$$

$\therefore$ $$t = \tfrac{1}{4},\quad t = \frac{11}{4}.$$

કણ 11 ફૂ. ની ઊંચાઈએ બે વખત આવે છે. એક તો પ્રસ્થાનથી $\frac{1}{4}$ સેકન્ડ બાદ અને બીજું પ્રસ્થાનથી $\frac{11}{4}$ સેકન્ડ બાદ. આ વસ્તુસ્થિતિ **આ.** (૮૫) માંથી સ્પષ્ટ સમજાય છે.



આકૃતિ ૮૫

આ ઊંચાઈએ આપણે કણનો વેગ જાણવો છે. એ માટે આપણે v_x અને v_y શોધીશું.

$$v_x = V\cos\alpha = 96 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 48\sqrt{3}.$$

$$v_y = V\sin\alpha - gt = 96 \times \tfrac{1}{2} - 32t = 48 - 32t.$$

જ્યારે $t = \frac{1}{4}$, ત્યારે $v_x = 48\sqrt{3}$ $v_y = 40.$

જો પરિણામી વેગ v OX જોડે θ કોણ બનાવતી દિશામાં હોય તો, વિ. અં. ની પદ્ધતિ પ્રમાણે

$$v_x = v\cos\theta$$

$$v_y = v\sin\theta$$

$$\therefore \quad v^2 = v_x^2 + v_y^2 = 3(48)^2 + (40)^2$$

$$\therefore \quad v = 8\sqrt{133}$$

અને $$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{5}{6\sqrt{3}}.$$

જ્યારે $t = \dfrac{11}{4}$, ત્યારે

$$v_x = 48\sqrt{3}$$

$$v_y = -40$$

$\therefore$ $$v^2 = v_x^2 + v_y^2 \text{ અને } \tan\theta = \frac{v_y}{v_x}$$

અથવા $$v = 8\sqrt{133}, \text{ અને } \tan\theta = -\frac{5}{6\sqrt{3}}.$$

આ. (૮૫) ની સંમિતિ જોતાં $\tan\theta$ ની ઋણ નિશાની તરત જ સમજી શકાશે.

(૨) પ્રક્ષિપ્તના ગતિપથનું સમીકરણ $y = x\tan\alpha(1 - x/R)$ આ રૂપમાં પ્રાપ્ત કરો. અહિં પ્રક્ષિપ્તે કાપેલું ક્ષૈતિજ અન્તર R વડે દર્શાવાયું છે. આવી રીતે સમીકરણ મેળવ્યા પછી સિદ્ધ કરો કે પ્રક્ષિપ્તનો પ્રક્ષેપકોણ α

$$\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\,\frac{R}{R-x}\right) \text{ થશે.}$$

ક્ષૈતિજ અંતર R માટેનું સૂત્ર:

$$R = \frac{V^2\sin 2\alpha}{g} = \frac{2V^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}. \qquad (1)$$

હવે ગતિપથનું સમીકરણ લખીએ.

$$y = x\tan\alpha - \frac{1}{2}\,\frac{gx^2}{V^2\cos^2\alpha}. \qquad (2)$$

આપણે જે રૂપમાં સ. ક. લખવું છે તેમાં V^2 આવતો નથી તેથી આપણે સ. ક. (1) માંથી V^2ની કિંમત કાઢીશું અને સ. ક. (2) માં તે મૂકી દઈશું.

સ. ક. (1) માંથી $V^2 = \dfrac{gR}{2\sin\alpha\cos\alpha}$.

હવે સ. ક. (2) નીચે પ્રમાણે લખી શકાશે:

$$y = x\tan\alpha - \frac{1}{2}\,\frac{gx^2 \times 2\sin\alpha\cos\alpha}{gR\cos^2\alpha}$$

$$= x\tan\alpha - \frac{x^2\tan\alpha}{R}$$

$$\therefore \qquad y = x\tan\alpha\left(1 - \frac{x}{R}\right)$$

અને આ રૂપમાં જ આપણે સમીકરણને મૂકવું હતું. હવે α શોધવો બહુ સહેલો છે.

$$\frac{y}{x} = \tan\alpha\left(\frac{R-x}{R}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{y}{x}\cdot\frac{R}{R-x} = \tan\alpha$$

જેમાંથી α ની કિંમત મળી શકશે.

(૩) V વેગથી ફેંકાયેલા પ્રક્ષિપ્તે કાપેલું ક્ષૈતિજ અન્તર R હોય તો સિદ્ધ કરો કે કણે પ્રાપ્ત કરેલી મહત્તમ ઊંચાઈ H નીચેના સમીકરણમાંથી મળી શકશે.

$$16gH^2 - 8V^2H + gR^2 = 0$$

$$R = \frac{V^2 \sin 2\alpha}{g} \quad \text{અને} \quad H = \frac{V^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

આપણે R અને H વચ્ચેનો સંબંધ શોધવો છે. અને તે સંબંધમાં α ન આવવો જોઈએ. ઉપરનાં બે સમીકરણો વચ્ચે αનું નિરસન કરવાથી આપણને એ સંબંધ મળી રહેશે.

$$H = \frac{V^2 \sin^2\alpha}{2g} \qquad \therefore \quad \sin^2\alpha = \frac{2gH}{V^2}. \qquad (1)$$

$$R = \frac{V^2 \sin 2\alpha}{g} \qquad \therefore \quad \sin 2\alpha = \frac{gR}{V^2}$$

$$\therefore \qquad 2\sin\alpha\cos\alpha = gR/V^2$$

$$\therefore \qquad 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha = g^2R^2/V^4.$$

હવે સ. ક. (1) માંથી $\sin^2\alpha$ ની કિંમત મૂકો.

$$\therefore \qquad 4 \times \frac{2gH}{V^2}\cos^2\alpha = g^2R^2/V^4$$

$$\therefore \qquad \cos^2\alpha = \frac{gR^2}{8V^2H}. \qquad (2)$$

હવે સ. ક. (1) અને (2) નો સરવાળો કરો.

$$\therefore \qquad 1 = \frac{2gH}{V^2} + \frac{gR^2}{8V^2H}$$

$$\therefore \qquad 16gH^2 - 8V^2H + gR^2 = 0.$$

મનોયત્ન XI.

(૧) ક્ષિતિજ જોડે $30°$નો ખૂણો બનાવતી દિશામાં, O બિન્દુએથી, 72 ફૂ./સેક.ના વેગથી એક પત્થર ફેંકવામાં આવે છે. તે વધારેમાં વધારે કેટલી ઊંચાઈ સુધી ચઢશે અને O ના લેવલની જમીન ઉપર O થી કેટલે દૂર પડશે તે શોધી કાઢો.

(૨) 64 ફૂ./સેક. ના વેગથી એક કણને ફેંકવામાં આવે છે. ક્ષૈતિજ સમતલ ઉપર તેની મહત્તમ દૂરી (અંતર) શોધી કાઢો અને ક્ષૈતિજ અંતર 64 ફૂ.નું મેળવવા માટે પ્રક્ષેપની દિશા શોધી કાઢો.

(૩) જો ઉડ્ડયનનો સમય T હોય, ક્ષૈતિજ અંતર R હોય તો સિદ્ધ કરો કે $gT^2 = 2R\tan\alpha$, જેમાં α એ પ્રક્ષેપકોણ છે.

એક તોપ દૂરમાં દૂર 1 માઈલ અને 1600 વારના અંતર સુધી ગોળાઓ ફેંકી શકે છે. સિદ્ધ કરો કે આવા ગોળાનો ગતિસમય 1 મિનિટ થશે.

(૪) જો એક પ્રક્ષિપ્તે કાપેલું ક્ષૈતિજ અંતર $400\sqrt{3}$ ફૂ. હોય અને પ્રક્ષેપવેગ 160 ફૂ./સેક. હોય તો સિદ્ધ કરો કે પ્રક્ષેપકોણ $60°$ અથવા $30°$ હોવો જોઈએ.

(૫) 92 ફૂ. ઊંચા ટાવરને મથાળે એક નિશાન ગોઠવવામાં આવ્યું છે. ટાવરને ભોંયતળીએથી 2560 ફૂ. ને અંતરે આવેલા એક બિન્દુથી, 320 ફૂ./સેક.ના વેગથી ગોળીઓ છોડતી એક બન્દૂક વડે નિશાનને ભેદવાનું છે. ક્ષિતિજથી કેટલા ખૂણાની ઊંચાઈએ ગોળીઓ છોડવી જોઈએ?

(૬) 144 ફૂ. ઊંચા ટાવરને મથાળેથી ક્ષૈતિજ દિશામાં 100 ફૂ./સેક.ના વેગથી એક તોપનો ગોળો છોડવામાં આવે છે. ગોળાનો કુલ ગતિસમય શોધો અને ટાવરને તળીએથી કેટલે દૂર જમીન પર ગોળો પડશે તે શોધી કાઢો.

(૭) 100 ફૂ. ઊંચા ટાવરને મથાળેથી ક્ષૈતિજ દિશામાં 600 ફૂ./સેક.ના વેગથી રિવોલ્વરમાંથી ગોળી છોડવામાં આવે છે. ગોળી જમીન પર કયાં અથડાશે તે શોધી કાઢો.

(૮) 96 ફૂ. ઊંચા ટાવરને મથાળેથી ક્ષિતિજથી $30°$ની ઊંચાઈવાળી દિશામાં 80 ફૂ./સેક. ના વેગથી એક પત્થરને ફેંકવામાં આવે છે. પત્થર જમીન પર જે બિન્દુએ પડે છે તે બિન્દુનું ટાવરના ભોંયતળીઆથી અંતર શોધો.

(૯) પ્રક્ષેપવેગ V હોય, પ્રક્ષેપકોણ α હોય, અને પ્રસ્થાનબિન્દુ જમીનથી h ફૂ. ની ઊંચાઈએ આવેલું હોય તો સિદ્ધ કરો કે પ્રક્ષિપ્ત ક્ષૈતિજ દિશામાં R અંતર કાપશે જ્યાં

$$2V^2(h + R\tan\alpha) = gR^2\sec^2\alpha.$$

(૧૦) સિદ્ધ કરો કે ક્ષિતિજ જોડે $\tan^{-1}(\frac{3}{4})$ ના કોણે 100 ફૂ./સેક. ના વેગથી ફેંકવામાં આવેલું એક કણ 80 વાર દૂર આવેલી 36 ફૂ. ઊંચી એક દિવાલને બરાબર ઘસાઈને ઓળંગી જશે.

(૧૧) જો પ્રક્ષિપ્તે કાપેલું ક્ષૈતિજ અંતર R હોય અને તેણે પ્રાપ્ત કરેલી મહત્તમ ઊંચાઈ H હોય તો સિદ્ધ કરો કે તેનો પ્રક્ષેપ વેગ

$$\frac{\sqrt{[2gH(16H^2 + R^2)]}}{4H}$$

થશે અને પ્રક્ષેપકોણ $\tan^{-1}(4H/R)$ થશે.

(૧૨) જો પ્રક્ષિપ્તે કાપેલું મહત્તમ ક્ષૈતિજ અંતર R હોય તો સિદ્ધ કરો કે ત્યારે તેણે પ્રાપ્ત કરેલી મહત્તમ ઊંચાઈ $R/4$ હોવી જોઈએ. વળી જે બિન્દુના ક્ષૈતિજ અને લંબક યામ $\frac{1}{2}R$ અને $\frac{1}{4}R$ છે તે બિન્દુ પણ ગતિ માર્ગ પર છે.

(૧૩) જો પ્રક્ષિપ્તે કાપેલું મહત્તમ ક્ષૈતિજ અંતર R હોય તો સિદ્ધ કરો કે જ્યારે પ્રક્ષિપ્તને ક્ષિતિજ જોડેના $\tan^{-1}(3)$ ને ખૂણે ફેંકવામાં આવે ત્યારે તે $3R/5$ નું ક્ષૈતિજ અંતર કાપશે. આ પ્રસંગે તે મહત્તમ ઊંચાઈ કેટલી પ્રાપ્ત કરશે તે પણ શોધી કાઢો.

(૧૪) જો કોઈ પ્રક્ષિપ્તનું મહત્તમ ક્ષૈતિજ અંતર R હોય તો સિદ્ધ કરો કે જો પ્રક્ષેપબિન્દુથી ક્ષૈતિજ અને લંબક $\frac{1}{2}R$ અને $\frac{1}{4}R$ ને અંતરે આવેલું કોઈ બિન્દુ ગતિપથ પર હોય તો પ્રક્ષેપકોણની સ્પર્શજ્યા (tangent) 1 અથવા 3 હોવી જોઈએ.

(૧૫) એક ફુવારામાંથી સઘળી દિશામાં 20 ફૂ./સેક.ના વેગથી પાણી ઉડે છે. ફુવારાને એક વર્તુળાકાર થાળું છે, જેના મધ્યમાં ફુવારો આવેલો છે. જો ફુવારામાંથી ઉડતું સઘળું પાણી થાળામાં ઝીલાય તેવી વ્યવસ્થા કરવી હોય તો થાળાનો ઓછામાં ઓછો વ્યાસ કેટલો જોઈએ?

(૧૬) સામાન્ય વપરાશના સંકેતમાં નીચેનું ક્ષૈતિજ અંતર R માટેનું સમીકરણ સ્થાપિત કરો :

$$R = \frac{V^2}{g}\sin 2\alpha.$$

જો $\alpha = 30°$ હોય તો, જ્યારે પ્રક્ષિપ્ત ક્ષૈતિજ અંતર $\frac{3R}{4}$ કાપે છે ત્યારે તેની ઊંચાઈ કેટલી હશે તે કહો. જવાબ Rના સંકેતમાં આપો.

(૧૭) જમીનથી h ઊંચાઈએ આવેલા એક બિન્દુથી એક દડાને ફેંકવામાં આવે છે. દડો મહત્તમ ઊંચાઈ $(h+b)$ પ્રાપ્ત કરે છે અને પ્રક્ષેપ બિન્દુથી a ફૂટને ક્ષૈતિજ અંતરે તે જમીન સાથે અથડાય છે. સિદ્ધ કરો કે પ્રક્ષેપ-કોણ નીચેના સમીકરણમાંથી પ્રાપ્ત થઈ શકશે.

$$a^2\tan^2\alpha - 4ab\tan\alpha - 4bh = 0.$$

(૧૮) એક પ્રક્ષિપ્તને એવી રીતે ફેંકવામાં આવે છે કે તે બે દિવાલોને બરાબર ઘસાઈને ઓળંગી જાય. આમાંની એક દિવાલની ઊંચાઈ p છે અને તે પ્રક્ષેપ બિન્દુથી q અંતરે આવેલી છે. જ્યારે બીજી દિવાલની ઊંચાઈ q છે અને તે પ્રક્ષેપ બિન્દુથી p અંતરે આવેલી છે. સિદ્ધ કરો કે પ્રક્ષિપ્તે કાપેલું કુલ ક્ષૈતિજ અંતર

$$\frac{p^2 + pq + q^2}{p + q} \text{ છે.}$$

[**સૂચના :** ઉદાહરણ (૨)માં આપેલા ગતિપથના સમીકરણનો ઉપયોગ કરો અને R શોધો.]

(૧૯) b ઊંચાઈની એક દિવાલને ઘસાઈને એક પ્રક્ષિપ્ત પસાર થઈ જાય છે. જો દિવાલનું પ્રક્ષેપ બિન્દુથી અંતર a હોય અને પ્રક્ષિપ્તે કાપેલું ક્ષૈતિજ

અંતર c હોય તો સિદ્ધ કરો કે પ્રક્ષેપકોણ $\tan^{-1}[bc/a(c-a)]$ થશે.

આ સૂત્ર પરથી પ્રક્ષેપદિશા માટેની નીચેની રચનાની સાબિતી આપો: A પ્રસ્થાન બિન્દુ છે, B દિવાલનું મથાળું છે, C ક્ષૈતિજ અંતરનો છેડો છે. CB જોડી દો અને તેને લંબાવીને Aમાંથી દોરેલા લંબકને Dમાં મળવા દો. D માંથી DE ક્ષૈતિજ દોરો તથા B માંથી દોરેલા લંબકને Eમાં મળવા દો. AE પ્રક્ષેપદિશા દર્શાવે છે.

(૨૦) ઉપરના દાખલામાં જો પ્રક્ષેપવેગ V હોય તો સિદ્ધ કરો કે

$$2V^2 = g\left\{\frac{a^2(c-a)^2 + b^2c^2}{ab(c-a)}\right\}.$$

(૨૧) જો પ્રક્ષિપ્તના પ્રસ્થાનવેગના ક્ષૈતિજ અને લંબક ઘટકો u અને v હોય તો સિદ્ધ કરો કે તેના ગતિપથમાં પ્રક્ષિપ્ત h ઊંચાઈ બે બિન્દુએ પ્રાપ્ત કરે છે જે બે બિન્દુ વચ્ચેનું અંતર

$$\frac{2u}{g}(v^2 - 2gh)^{\frac{1}{2}}$$

થશે; વળી આ બે બિન્દુ વચ્ચે પસાર થતાં પ્રક્ષિપ્તને $\frac{2}{g}\sqrt{(v^2-2gh)}$ સેકન્ડ લાગશે તે પણ દર્શાવો.

(૨૨) 64 ફૂ./સિક.ના વેગથી એક પ્રક્ષિપ્તને એવી રીતે ફેંકવામાં આવે છે કે જેથી તેનું ક્ષૈતિજ અંતર મહત્તમ આવે. સિદ્ધ કરો કે પ્રક્ષિપ્ત તેના ગતિપથમાં 16 ફૂ.ની ઊંચાઈ સર્વપ્રથમ પ્રાપ્ત કર્યા પછી 2 સેકન્ડમાં ફરી પાછું એ જ ઊંચાઈ પ્રાપ્ત કરશે.

(૨૩) પ્રસ્થાન પછી t_1 સેકન્ડ બાદ પ્રક્ષિપ્ત તેના ગતિપથના કોઈ બિન્દુ P એ પહોંચે છે. જો કુલ ઉડ્ડયન સમય $t_1 + t_2$ સેકન્ડ હોય તો સિદ્ધ કરો કે Pની પ્રક્ષેપ બિન્દુથી ઊંચાઈ 16 t_1t_2 ફૂ. છે.

જવાબો :

(૧) $20\frac{1}{4}$ ફૂ. $81\sqrt{3}$ ફૂ. (૨) 128 ફૂ., 15° અથવા 75°. (૫) $\tan^{-1}(9/16)$ અથવા $\tan^{-1}(31/16)$. (૬) 3 સેક., 300 ફૂ. (૭) ટાવરને તળીએથી 1500 ફૂ. (૮) $160\sqrt{3}$ ફૂ. (૧૩) $9R/20$. (૧૫) 25 ફૂ. (૧૬) $\dfrac{R\sqrt{3}}{16}$ ફૂ.

પ્રકરણ ૧૦

સાપેક્ષ વેગ

૧. પ્રાસ્તાવિક.

અત્યાર સુધી આપણે ગતિ કરતા એક જ કણની ચર્ચા કરી છે. દૃઢ પદાર્થની ગતિની ઉપરછલી ચર્ચા પણ આ પુસ્તકની મર્યાદાની બહારની વાત છે. આ પ્રકરણમાં એ વિષય તરફ જરા અંગુલિનિર્દેશ કરીને જ સંતોષ માનીશું.

કોઈ પણ દૃઢ પદાર્થને અનેક નાનાં કણોમાં વિભાજીત કરી શકાય. આ રીતે પદાર્થને કણોના સમૂહ તરીકે ગણી શકાય. હવે જ્યારે પદાર્થ ગતિ કરે છે ત્યારે જે અનેક કણોનો તે પદાર્થ બનેલો છે તે કણો પણ ગતિ કરવા લાગે છે, અને આ સર્વ કણો એક જ સરખી ગતિ કરે તેવું કાંઈ નથી; દા. ત. આ સઘળાં કણોનો વેગ એક સરખો જ હોવો જરૂરી નથી. એક સાદા ઉદાહરણથી આ વસ્તુ સ્પષ્ટ કરીએ. ધારો કે એક ધાતુની વર્તુળાકાર રકાબી તેના મધ્યબિન્દુ O આસપાસ ફરે છે. ત્યારે O સ્થિર છે એટલે કે Oનો વેગ શૂન્ય છે. રકાબીનાં બીજાં બિન્દુઓ O આસપાસ પરિભ્રમણ કરે છે એટલે કે આ બીજાં બિન્દુઓના વેગ શૂન્ય નથી. ઉપરાંત મધ્યબિન્દુ નજીકનું કોઈ બિન્દુ નાના વર્તુળ—ચાપ ઉપર ફરે છે જ્યારે દૂરનું બિન્દુ, એટલા જ સમયમાં મોટા વર્તુળના ચાપ ઉપર ફરે છે. એથી કેન્દ્ર નજીકના બિન્દુનો વેગ ઓછો છે અને કેન્દ્રથી દૂરના બિન્દુનો વેગ વધારે છે. આથી સ્પષ્ટ થાય છે કે જ્યારે કોઈ દૃઢ પદાર્થ ગતિ કરે છે ત્યારે તેનાં જુદાં જુદાં કણોનો એક સરખો વેગ ન પણ હોય, દૃઢ પદાર્થની ગતિનો અભ્યાસ એટલે આવા કણ-સમૂહની ગતિનો અભ્યાસ. સમૂહનાં ભિન્નભિન્ન કણોને ભિન્નભિન્ન વેગ હોઈ શકે. સરળતા ખાતર પહેલાં કણસમૂહને બદલે બે જ કણની ગતિનો વિચાર કરવો ઠીક થઈ પડશે. ઉપર બતાવ્યા પ્રમાણે આ બે કણની ગતિના વિષયનો પણ પૂર્ણ અભ્યાસ અહિં શકય નથી. એક કણની દૃષ્ટિએ બીજા કણની ગતિ કેવી લાગે છે તેનો જ અભ્યાસ આપણે અહિં કરીશું. અલબત્ત, આ અભ્યાસ દૃઢ પદાર્થની ગતિના અભ્યાસ માટેનું જરૂરી પ્રથમ પગથિયું છે.

૨ સાપેક્ષ ગતિ.

એક પત્થરનો ટુકડો લઈને રૂમમાં ટેબલ ઉપર મૂકો. પત્થર ટેબલ ઉપર સ્થિર છે. તે ગતિમાન નથી. પત્થર ગતિમાન નથી એમ આપણે શા ઉપરથી કહીએ છીએ? તે ટેબલ પર સ્થિર પડ્યો છે માટે જ તો. પરંતુ ટેબલનું શું? ટેબલ રૂમમાં સ્થિર છે; રૂમ ઘરમાં સ્થિર છે, અને ઘર પૃથ્વી ઉપર સ્થિર છે. પરંતુ પૃથ્વીનું શું? ઘરમાં ડોશીમા એમ કહે છે કે પૃથ્વી શેષનાગ ઉપર સ્થિર છે પરંતુ આપણે જાણીએ છીએ કે પૃથ્વી સ્થિર નથી પરંતુ સૂર્ય આસપાસ ભ્રમણ કરે છે. એટલે હવે તો પરિસ્થિતિ પલટાઈ ગઈ. પૃથ્વી ગતિ કરે છે તેની સાથે રૂમ ગતિ કરે છે. રૂમ સાથે ટેબલ ગતિ કરે છે અને ટેબલ સાથે પેલો પત્થર પણ ગતિમાન છે! ત્યારે શું ખરેખર પત્થર સ્થિર છે કે ગતિમાન છે? એ તો તમે કઈ રીતે પરિસ્થિતિ નિહાળો છો તેની ઉપર આધારિત છે. જો તમે ટેબલ અને રૂમ ઉપર જ તમારું ધ્યાન કેન્દ્રિત કરશો તો પત્થર સ્થિર છે. પરંતુ તમે તમારો દૃષ્ટિકોણ વિસ્તારીને આખા સૂર્યમંડળને નજર સમક્ષ રાખશો તો પત્થર પૃથ્વી સાથે સૂર્યની આસપાસ ફરતો જણાશે. ટેબલની સાપેક્ષે પત્થર સ્થિર છે; સૂર્યની સાપેક્ષે પત્થર ગતિમાન છે. ગતિમાત્ર સાપેક્ષ છે. પદાર્થની ગતિ અથવા સ્થિતિ પદાર્થને અવલોકનાર ઉપર આધારિત છે. ટેબલ પરથી અવલોકનારની દૃષ્ટિએ પત્થર સ્થિર છે, સૂર્ય પરના અવલોકનકારની દૃષ્ટિએ પત્થર ગતિમાન છે.

આપણે એક બીજો જાણીતો દાખલો લઈશું. આપણે જ્યારે ટ્રેનમાં સફર કરીએ છીએ ત્યારે બારી બહાર ઝાડ ઉલટી દિશામાં ગતિ કરતાં જણાય છે. ઝાડને પ્રાપ્ત થતી ગતિ તે સાપેક્ષ ગતિ છે. એ ગતિ ટ્રેનની સાપેક્ષે છે. જેવી ગાડી સ્થિર થશે તેવાં જ વૃક્ષો પણ સ્થિર દેખાશે. જ્યારે બે કણો ભિન્નભિન્ન વેગથી સફર કરતાં હોય ત્યારે તેમની સાપેક્ષ ગતિનો આપણે અભ્યાસ કરવાનો છે એટલે કે એક કણની દૃષ્ટિએ બીજા કણની ગતિ કેવી લાગે છે તે આપણે જાણવું છે.

૩. સાપેક્ષ વેગ.

બે ગતિમાન કણો A અને B લો. કોઈ ક્ષણે તેમનો વેગ અનુક્રમે **u** અને **v** હશે. B ઉપર રહેલી કોઈ વ્યક્તિને Aની ગતિ કેવી દેખાશે તે આપણે જાણવું છે. Bની સાપેક્ષે A ના વેગ માટે આપણે નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યા કરીશું.

પોતાને સ્થિર માનતા, B ઉપર રહેલા કોઈ અવલોકનકારને A જે વેગથી ગતિ કરતું દેખાય તે Bની સાપેક્ષે Aનો વેગ અથવા Bની દૃષ્ટિએ Aનો સાપેક્ષ વેગ છે.

આ સાપેક્ષ વેગ શોધવાની વિચારણા કરીએ તે પહેલાં વ્યાખ્યામાં આવતા "પોતાને સ્થિર માનતા" એ શબ્દપ્રયોગનો અર્થ સમજી લેવો જરૂરી છે. જ્યારે જ્યારે આપણે કાંઈ અવલોકન કરીએ છીએ ત્યારે આપણે આપણી ગતિ વિસરી જઈએ છીએ અને આપણી જાતને સ્થિર માની લઈએ છીએ. ગાડીમાં સફર કરતા ઉતારૂને બહારનાં વૃક્ષો ગતિ કરતાં દેખાય છે તેનું પણ આ જ કારણ છે કે અવલોકન કરતી વખતે મુસાફર પોતાની ગતિ ભૂલી જાય છે. અવલોકન કરતી વખતે અવલોકનકાર પોતાની જાતને સ્થિર માની લે છે તે મનુષ્યસહજ સ્વભાવને લીધે છે. મનુષ્યોનો આ સ્વભાવ અવલોકનોનાં વર્ણન કરવા માટે તે જે ભાષા વાપરે છે તે ભાષામાં ચોકખો તરી આવે છે. નીચેનું ઉદાહરણ આ વાત સ્પષ્ટ કરશે.

ટ્રેનમાં મુસાફરી કરતા એક ઉતારૂ Aની કલ્પના કરો. આ ટ્રેન કોઈ સ્ટેશન પાસે આવે છે, ધારો કે અમદાવાદ સ્ટેશન પાસે આવે છે. Aને સામો તેડવા માટે તેનો મિત્ર B અમદાવાદ સ્ટેશને આવેલો છે. ગાડી અમદાવાદ સ્ટેશન નજીક આવતી જાય છે ત્યારની પરિસ્થિતિ A અને B કેવી રીતે વર્ણવશે તે આપણે જોઈએ. ટ્રેનમાં બેઠેલો A કહેશે: "જુઓ ભાઈ, અમદાવાદ આવી ગયું." પ્લેટફોર્મ ઉપર ઊભેલો B કહેશે, "ચાલો, ચાલો, ગાડી આવી ગઈ." આપણને મનમાં આશ્ચર્ય થાય છે: "છેવટે આવ્યું કોણ? અમદાવાદ આવ્યું કે ગાડી આવી?" અલબત્ત ઉતારૂ A પોતાની જાતને સ્થિર માને છે અને તેથી કહે છે કે અમદાવાદ તેની પાસે આવ્યું! પ્લેટફોર્મ ઉપરથી B ગાડીને આવતી જુએ છે. **આપણે કરેલાં અવલોકનોનું વર્ણન કરતી વેળાએ આપણે હમેશાં આપણી જાતને સ્થિર માની લઈએ છીએ.** એથી જ તો જો આપણે Bની નજરે Aનો શો વેગ હશે તે જાણવું હોય તો આપણે Bને સ્થિર કરવો જોઈએ.

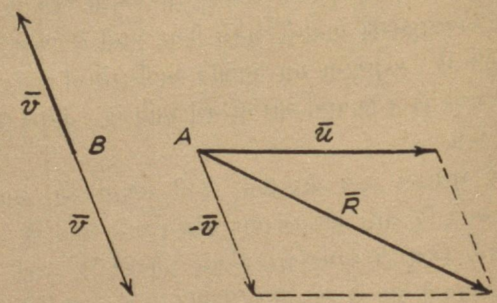
૪. સાપેક્ષ વેગ શોધવાની રીતો.

(૧) ભૌમિતિક અથવા સદિશ પદ્ધતિ:

બે ગતિમાન કણો A અને Bનો આપણે વિચાર કરીએ છીએ. ધારો કે A નો વેગ $\mathbf{u}$ છે અને B નો વેગ $\mathbf{v}$ છે.

Bની સાપેક્ષે Aનો વેગ આપણે શોધવો છે. એટલે Bની નજરે Aનો શો વેગ છે તે આપણે શોધવું છે.

તેથી આપણે Bને સ્થિર કરવો જોઈશે તે અર્થે આપણે બન્નેને (Aને અને Bને) $-\mathbf{v}$ વેગ આપીશું. (**આ.** ૮૬ જુઓ.) તેની અસર એ થશે કે Bનો વેગ $+\mathbf{v}-\mathbf{v}=0$ થશે.



આકૃતિ ૮૬

એટલે કે B સ્થિર થઈ જશે.

A ને $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ વેગ મળશે.

સદિશ સરવાળા માટેના સ.બા.ચ. કોણના નિયમ પ્રમાણે $\mathbf{u}$ અને $-\mathbf{v}$નું પરિણામી $\mathbf{R}$ શોધો.

$$\mathbf{R}=\mathbf{u}-\mathbf{v}.$$

જ્યારે B પોતાને સ્થિર માને છે ત્યારે તેને A આ વેગ $\mathbf{R}$થી ગતિ કરતો જણાય છે. એટલે $\mathbf{R}$ એ Bની સાપેક્ષે Aનો વેગ છે.

સાપેક્ષ વેગ શોધવા માટેની આ સદિશ પદ્ધતિ છે.

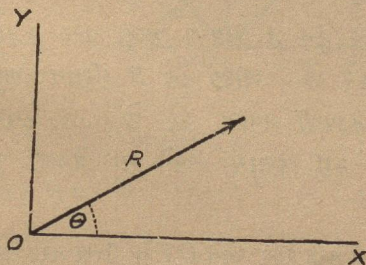
(૨) વૈશ્લેષિક પદ્ધતિ:

Aનો વેગ $\mathbf{u}$ છે. B $\mathbf{v}$ વેગથી ગતિ કરે છે. આપણે Bની સાપેક્ષે A નો વેગ શોધવો છે. આપણે આ સાપેક્ષ વેગ

$$\mathbf{R} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$$

થશે એમ બતાવ્યું છે.

વિભાજીત અંશોની પદ્ધતિ વાપરીને આપણે આ વેગ $\mathbf{R}$નું મહત્ત્વ અને દિશા વૈશ્લેષિક રીતે શોધી કાઢીશું. બે સગવડ પડતી, પરસ્પર લંબ રેખાઓ OX અને OYને અક્ષો તરીકે પસંદ કરો. $\mathbf{R}$ ના OX દિશાના વિભાજીત અંશને R_x કહો; અને OY દિશાના અંશને R_y કહો. $\mathbf{u}$ અને $\mathbf{v}$ માટે પણ એ જ સંકેતનો ઉપયોગ કરીને u_x, u_y; v_x, v_y નો અર્થ સમજીશું. વિભાજીત અંશોના પ્રમેય પ્રમાણે કોઈ પણ દિશામાં પરિણામીનો વિભાજીત અંશ = એ જ દિશામાં સંઘટકોના વિ. અં. નો સરવાળો:



આકૃતિ ૮૭

અહિં $\mathbf{R}$ એ $\mathbf{u}$ અને $-\mathbf{v}$નું પરિણામી છે.

તેથી OX અને OY દિશામાં સદિશોને વિભાજીત કરતાં જણાશે કે

$$R_x = u_x - v_x \qquad (1)$$

$$R_y = u_y - v_y \qquad (2)$$

હવે $\mathbf{u}$ અને $\mathbf{v}$ આપેલાં છે તેથી આપણે u_x, u_y, v_x અને v_y ગણી શકીશું. અને એ રીતે સ. ક. (1) અને (2) માંથી R_x અને R_y પ્રાપ્ત કરી શકીશું. અને R_x અને R_y જાણ્યા પછી $\mathbf{R}$ શોધવો એ તો સહેલી વાત છે.

ધારો કે **R** OX જોડે θ કોણ બનાવે છે. ત્યારે

$$R_x = R\cos\theta,\ R_y = R\sin\theta$$

વર્ગ કરીને સરવાળો કરતાં જણાશે કે

$$R^2 = R_x{}^2 + R_y{}^2 \tag{3}$$

અને ભાગાકાર કરવાથી જણાશે કે

$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x}. \tag{4}$$

સ. ક. (1) અને (2) માંથી R_x અને R_y શોધ્યા પછી સ. ક. (3) અને (4) માંથી મહત્ત્વ R અને દિશા માટે θ મળી રહેશે અને આ રીતે B સાપેક્ષે A નો વેગ શો છે તે જાણી શકાશે.

૫. ઉદાહરણો.

(૧) એક ટ્રેન A વાયવ્ય ખૂણા તરફ કલાકે 15 માઈલના વેગથી પ્રવાસ કરે છે. બીજી ટ્રેન B ઈશાન ખૂણા તરફ કલાકે 30 માઈલની ઝડપથી પ્રવાસ કરે છે. A ટ્રેનમાં બેઠેલા કોઈ ઉતારૂને B ટ્રેન કઈ દિશામાં અને શા વેગથી જતી લાગે છે તે શોધી કાઢો.

OX ને પૂર્વ તરફ દોરો અને OY ને ઉત્તર તરફ દોરો. આપણે A ની સાપેક્ષે B નો વેગ શોધવો છે. તેથી આપણે A ટ્રેનને સ્થિર કરવી પડશે. એથી આપણે

A ના વેગને v કહીશું. $v = 15$

B ના વેગને u કહીશું. $u = 30.$

હવે
$$u_x = 30\cos45^\circ = 30/\sqrt{2} = 15\sqrt{2}$$
$$u_y = 30\sin45^\circ = 30/\sqrt{2} = 15\sqrt{2}$$
$$v_x = -15\cos45^\circ = -15/\sqrt{2}$$
$$v_y = 15\sin45^\circ = 15/\sqrt{2}.$$

હવે $\qquad \mathbf{R} = \mathbf{u} - \mathbf{v}.$

$\therefore \qquad R_x = u_x - v_x$

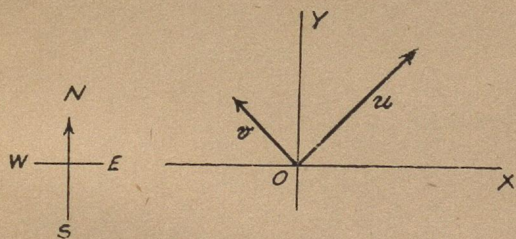
$$= 15\sqrt{2} + \frac{15}{\sqrt{2}} = \frac{45}{\sqrt{2}}.$$

$$R_y = u_y - v_y$$

$$= 15\sqrt{2} - \frac{15}{\sqrt{2}} = \frac{15}{\sqrt{2}}.$$

$\therefore \qquad R^2 = R_x{}^2 + R_y{}^2 = 5(15)^2$

$\therefore \qquad R = 15\sqrt{5}$ મા./ક.



આકૃતિ ૮૮

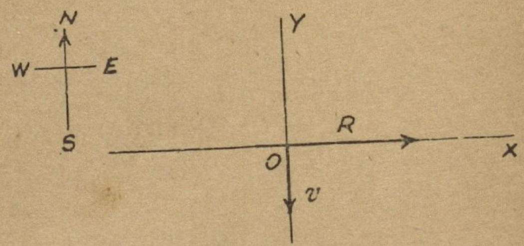
જો **R** OX જોડે કોણ બનાવે તો

$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{1}{3}.$$

તેથી આપણને જોઈતો વેગ $15\sqrt{5}$ મા./ક.નો છે અને તે ઉત્તર તરફ પૂર્વ જોડે $\tan^{-1}(\frac{1}{3})$ નો ખૂણો બનાવતી દિશામાં છે.

(૨) એક સાયકલસ્વાર કલાકે 5 માઈલની ઝડપે દક્ષિણ તરફ સફર કરે છે. તેને પવન પશ્ચિમમાંથી આવતો જણાય છે. જો તેને પવનનો વેગ કલાકે 4 માઈલ જણાય તો જ્યારે તે સ્વાર પોતાની ઝડપ વધારીને કલાકે 8 માઈલની કરશે ત્યારે તેને પવન કઈ દિશામાંથી આવતો જણાશે તે શોધી કાઢો.

પૂર્વ તરફ OX દોરો અને ઉત્તર તરફ OY દોરો. અહિં અવલોકનકાર સાયકલસ્વાર છે. તે બે અવલોકનો કરે છે. પ્રત્યેક અવલોકનમાં તેને સ્થિર માનવો જોઈએ. ધારો કે પવનનો ખરો વેગ **u** છે.



આકૃતિ ૮૯

પહેલું અવલોકન :

$$v_x = 0, \ \ v_y = -5$$

$$R_x = 4, \ R_y = 0.$$

પરંતુ　$\mathbf{R} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$

$\therefore$　$R_x = u_x - v_x$

$\therefore$　$4 = u_x - 0$

$\therefore$　$u_x = 4.$

$R_y = u_y - v_y$

$\therefore$　$0 = u_y + 5$

$\therefore$　$u_y = -5$

$\therefore$　$u_x = 4$ અને $u_y = -5.$

બીજું અવલોકન :

હવે **v**નું મહત્ત્વ 8 થઈ ગયું છે. **u**માં કશો ફેરફાર થતો નથી. આપણે નવો **R** શોધવો છે.

$$\therefore \quad v_x = 0, \quad v_y = -8$$

$$u_x = 4, \quad u_y = -5.$$

$$\therefore \quad R_x = u_x - v_x$$

$$= 4 - 0 = 4.$$

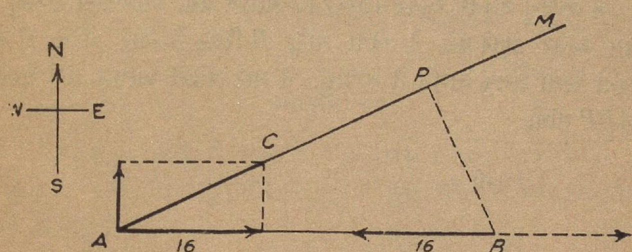
$$R_y = u_y - v_y$$

$$= -5 + 8 = 3.$$

$$\therefore \quad R^2 = 16 + 9 = 25 \text{ અથવા } R = 5.$$

જો R OX જોડે θ કોણ બનાવે તો $\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{3}{4}$. પૂર્વ અને ઉત્તર વચ્ચેની, પૂર્વ જોડે $\tan^{-1}(\frac{3}{4})$ નો ખૂણો બનાવતી દિશામાં પવન વહેતો જણાશે.

(૩) ઉત્તર તરફ કલાકે 4 માઈલની ઝડપે ગતિ કરતી એક આગબોટ પરથી તેની પૂર્વ તરફ 15 માઈલને અંતરે રહેલી એક બીજી આગબોટ દેખાય છે. આ બીજી આગબોટ જો પશ્ચિમ તરફ કલાકે ૧૬ માઈલની ઝડપથી ગતિ કરતી હોય તો બે આગબોટ એકબીજાથી વધારેમાં વધારે નજીક ક્યારે આવશે અને ત્યારે બે વચ્ચેનું અન્તર કેટલું હશે?



આકૃતિ ૯૦

શરૂઆતમાં A અને B વચ્ચેનું અંતર 15 માઈલ છે. બંને એકબીજાની વધુમાં વધુ નજીક ક્યારે આવશે તે આપણે જાણવું છે. તે માટે એકની સાપેક્ષે

બીજાનો વેગ શોધીશું. આપણે Bની સાપેક્ષે Aનો વેગ શોધીશું. તે માટે Bને સ્થિર કરીએ. એટલે કે Bને પૂર્વ તરફ 16 મા./ક.નો વેગ આપીએ. આ જ વેગ Aને પણ આપવો જોઈએ. આ રીતે હવે Aને ઉત્તર તરફ 4 અને પૂર્વ તરફ 16 મા./ક.ને વેગ મળશે. લંબચોરસ દોરીને આપણે Aનો પરિણામી વેગ શોધીશું.

$\therefore$ A ના સાપેક્ષવેગનું મહત્ત્વ $R = \sqrt{(4)^2 + (16)^2} = 4\sqrt{17}$ થશે. અને તે પૂર્વ જોડે θ કોણ બનાવશે જ્યાં $\tan\theta = \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$.

પરિણામે B સ્થિર થશે અને A $4\sqrt{17}$ ના વેગથી AM દિશામાં ગતિ કરતી જણાશે. $BP \perp AM$ દોરો. બન્ને વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર BP થશે. $\triangle APB$ માંથી જણાશે કે

$$\sin\theta = \frac{PB}{AB} = \frac{PB}{15};$$

પરંતુ
$$\sin\theta = \frac{4}{R} = \frac{4}{4\sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}.$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{PB}{15}.$$

$$\therefore \quad PB = 15/\sqrt{17} \text{ માઈલ.}$$

બે વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર $15/\sqrt{17}$ માઈલ થશે. આગબોટો વચ્ચેનું આ લઘુતમ અંતર ક્યારે થશે તે જોવા માટે, B સ્થિર છે ત્યારે A ને P સુધી પહોંચતાં કેટલો સમય લાગશે તે શોધીશું. તે માટે પહેલાં આપણે AP શોધીશું. $\triangle ABP$ માંથી

$$\cos\theta = \frac{AP}{AB}$$

$$\therefore \quad \frac{16}{4\sqrt{17}} = \frac{AP}{15}$$

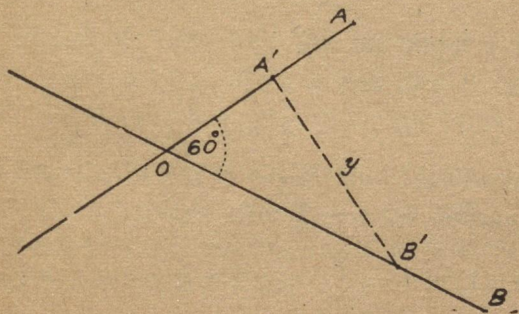
$$\therefore \quad AP = \frac{15 \times 16}{4\sqrt{17}} \text{ માઈલ.}$$

આ અંતર સાપેક્ષ વેગ $4\sqrt{17}$ મા./ક.થી કાપતાં t કલાક લાગશે જ્યાં

$$t=\frac{s}{u}=\frac{15\times16}{16\times17}=\frac{15}{17}.$$

આવા દાખલા ગણવાની એક બીજી રીત પણ છે. આ રીત નીચેના દાખલામાં દર્શાવી છે.

(૪) એક ચોકમાંથી બે રસ્તાઓ પરસ્પર 60°ને ખૂણે ફંટાય છે. લઘુકોણની બાજુએથી દરેક રસ્તા ઉપર એક એક માણસ એક સરખી ઝડપે ચોક તરફ ચાલતો આવે છે. કોઈ ક્ષણે તેમનું ચોકથી અન્તર અનુક્રમે 1 માઈલ અને 2 માઈલ છે. જ્યારે તેઓ એકબીજાની વધારેમાં વધારે નજીક હશે ત્યારે તેઓનું ચોકથી શું અન્તર હશે તે શોધી કાઢો.



આકૃતિ ૯૧

માણસો A અને B ઉપર છે. $OA=1$ અને $OB=2$. ધારો કે બન્ને u વેગથી O તરફ ગતિ કરે છે. t સમય બાદ જો તેઓ અનુક્રમે A' અને B' ઉપર આવે તો

$AA'=BB'=ut$. $A'B'$ જોડી આપો. $\triangle OA'B'$ માં

$$OA'=OA-AA'=1-ut$$

$$OB'=OB-BB'=2-ut.$$

ધારો કે $A'B' = y$

તો $A'B'^2 = OA'^2 + OB'^2 - 2OA' \cdot OB' \cos 60^\circ$

$$\therefore \quad y^2 = (1-ut)^2 + (2-ut)^2 - 2\,(1-ut)\,(2-ut)\tfrac{1}{2}$$
$$= u^2t^2 - 3ut + 3. \qquad (1)$$

આનું t સાપેક્ષ વિકલન કરો.

$$\therefore \quad 2y\frac{dy}{dt} = 2u^2t - 3u.$$

જો y લઘુતમ હોય તો $\frac{dy}{dt} = 0$

$$\therefore \quad 2u^2t - 3u = 0.$$
$$t = \frac{3}{2u}.$$

$\therefore$ જ્યારે y લઘુતમ થશે ત્યારે

$OA' = 1 - ut = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$

$OB' = 2 - ut = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$

A ચોક ઓળંગીને સામી બાજુએ O થી $\frac{1}{2}$ માઈલને અંતરે હશે અને B ને ચોક ઓળંગવા માટે હજુ $\frac{1}{2}$ માઈલ ચાલવો બાકી હશે.

સ. ક. (1) માં $t = \frac{3}{2u}$ મૂકવાથી બન્ને વચ્ચેના લઘુતમ અંતર yની કિંમત મળી શકશે.

મનોયત્ન XII.

(૧) એક ટ્રેન પૂર્વ તરફ કલાકે 60 માઈલના વેગથી પ્રવાસ કરે છે. એક વિમાન દક્ષિણ તરફ કલાકના 300 માઈલની ઝડપે ગતિ કરે છે. ટ્રેનની સાપેક્ષે વિમાનનો વેગ ગણી કાઢો.

(૨) એક આગબોટ A ઉપર રહેલા અવલોકનકારને બીજી આગબોટ N30°W દિશામાં કલાકના 20 માઈલની ઝડપે જતી દેખાય છે. જો A પોતે ઉત્તર તરફ કલાકના 10 માઈલના વેગથી હંકારાતી હોય તો B નો વાસ્તવિક વેગ કઈ દિશામાં છે અને કેટલા મહત્ત્વનો છે તે શોધી કાઢો.

(૩) લેવલ રસ્તા ઉપર મોટરગાડી કલાકે 30 માઈલની ઝડપે દોડે છે, અને વરસાદ સામેથી ગાડીની અંદર લંબક જોડે 60° ને ખૂણે આવતો હોય તેમ જણાય છે. જો વર્ષાબિન્દુઓનો વાસ્તવિક વેગ 22 ફૂ./સેક. હોય તો તેના મોટરમાંથી જણાતા વેગનું મહત્ત્વ શોધો અને વાસ્તવિક વેગની દિશા શોધો.

(૪) એક માણસ શાન્ત પાણીમાં કલાકે 5 માઈલની ઝડપે હલેસાં મારીને હોડી ચલાવી શકે છે. જો તે, વહેતા પાણીમાં ઉપરવાસ તરફ (પ્રવાહની વિરુદ્ધ) 2 માઈલ હોડી હંકારીને એટલું જ અંતર પાછું આવતાં કુલ સમય 1 કલાક 15 મિનિટ લે તો પ્રવાહનો વેગ શોધો.

(૫) એક સ્ટીમરની ગતિ દક્ષિણ તરફ છે અને તેનો વેગ 20 નૉટ* છે; પવન પશ્ચિમ તરફથી વાય છે. પરંતુ સ્ટીમરમાંથી નીકળતા ધૂમાડાની રેખા N30°E દિશા તરફ લંબાતી જણાય છે. પવનનો વાસ્તવિક વેગ શો છે?

(૬) રેલ્વે ટ્રેન કલાકે 30 માઈલની ઝડપે ગતિ કરે છે. ટ્રેનની ગતિને કાટખૂણે ક્ષૈતિજ દિશામાં 440 ફૂ./સેક.ના વેગથી ટ્રેન તરફ ગોળી છોડવામાં આવે છે. ટ્રેનની અંદર રહેલા કોઈ ઉતારૂને ગોળી કઈ દિશામાંથી અને કેટલા વેગથી આવતી જણાશે તે કહો.

(૭) ટ્રેન A દક્ષિણ તરફ કલાકે 30 માઈલની ઝડપે ગતિ કરે છે. બીજી ટ્રેન B પૂર્વ તરફ કલાકે 20 માઈલની ઝડપે પ્રવાસ કરે છે. B ની સાપેક્ષે Aનો વેગ શોધો. ત્રીજી ટ્રેન C જો આ સાપેક્ષ વેગથી ગતિ કરતી હોય તો C સાપેક્ષે A નો વેગ શોધો.

(૮) ક્ષૈતિજ દિશામાં ઉત્તર તરફ એક વિમાન કલાકે 120 માઈલના વેગથી પ્રવાસ કરે છે. વિમાની નીચે એક ટ્રેન જુએ છે જે તેને નૈઋત્ય દિશામાં

* નૉટ સમુદ્રમાં વેગ આપવા માટે વપરાતું એકમ છે.

જતી દેખાય છે. નકશામાં જોતાં તેને જણાય છે કે રેલ્વે લાઈન તો વાયવ્ય તરફ જાય છે. ટ્રેનની ઝડપ શોધો.

(૯) પૂર્વ તરફ કલાકે 5 માઈલના વેગથી સફર કરતા એક સાયકલસ્વારને પવન કલાકે 10 માઈલના વેગથી ઈશાન તરફથી આવતો જણાય છે. જો સ્વાર પોતાની ગતિની દિશા બદલીને ઈશાન તરફ સફર કરવા માંડે તો તેને પવન કઈ દિશામાંથી આવતો જણાશે?

(૧૦) પૂર્વ તરફ v વેગથી પ્રવાસ કરતા મુસાફરને પવન ઉત્તર તરફથી વહેતો જણાય છે. પોતાની ઝડપ બે ગણી કરવાથી પવન ઈશાનમાંથી જણાય છે. પવનની વાસ્તવિક દિશા અને વેગ શોધો.

(૧૧) કલાકે 10 માઈલના વેગથી સફર કરતા એક સાયકલસ્વારને વરસાદ લંબક દિશામાં પડતો દેખાય છે. તેજ દિશામાં કલાકે 30 માઈલના વેગથી દોડતી મોટરમાં સફર કરતા માણસને લંબક જોડે 30° નો ખૂણો બનાવતી દિશામાં વરસાદ પડતો જણાય છે. પૃથ્વી સાપેક્ષે વરસાદનો વેગ અને દિશા શોધો.

(૧૨) પરસ્પર લંબ બે સીધા માર્ગો ઉપર બે મોટર ગાડીઓ A અને B અનુક્રમે કલાકે 21 અને 28 માઈલના વેગથી દોડે છે. બન્ને ગાડીની ગતિની દિશા રસ્તાના છેદન બિન્દુ C તરફ છે. જ્યારે BC $\frac{3}{4}$ માઈલ હોય ત્યારે AC જો $\frac{1}{2}$ માઈલ હોય તો ગતિ દરમિયાન બન્ને વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર શોધો.

(૧૩) એક વહાણ A દક્ષિણ તરફ કલાકે 12 માઈલની ઝડપે સફર કરે છે. જ્યારે બીજું વહાણ B પૂર્વ તરફ કલાકે 5 માઈલની ઝડપે ગતિ કરે છે. Aની સાપેક્ષે B નો વેગ શોધો. જો શરૂઆતમાં A, B થી પૂર્વ તરફ 13 માઈલને અન્તરે હોય તો સિદ્ધ કરો કે સફર દરમિયાન બન્ને વચ્ચેનું ઓછામાં ઓછું અંતર 12 માઈલ થશે.

(૧૪) એક ચોકમાંથી બે સીધા રસ્તાઓ અનુક્રમે પૂર્વ તરફ અને $N30^\circ E$ તરફ ફંટાય છે. જ્યારે પૂર્વ તરફ કલાકે 35 માઈલના વેગથી દોડતી એક મોટર ચોકમાં આવે છે ત્યારે એક બીજી મોટર ચોકથી 5 માઈલ દૂર છે

અને ચોક તરફ N30°E દિશામાંથી કલાકે 30 માઈલના વેગથી પ્રવાસ કરતી હોય છે. તેઓ એકબીજાથી ઓછામાં ઓછા અંતરે ક્યારે આવશે તે શોધી કાઢો.

(૧૫) એક તરવૈયો શાન્ત પાણીમાં c વેગથી તરી શકે છે. v વેગથી વહેતી એક નદીમાં તે તરવા પડે તો સાબિત કરો કે (i) પ્રવાહની દિશામાં તરતાં તેનો વેગ $c+v$ થશે (ii) પ્રવાહની વિરુદ્ધ દિશામાં તરતાં તેનો વેગ $c-v$ થશે (iii) પ્રવાહને લંબ દિશામાં તરતાં તેનો વેગ $\sqrt{c^2-v^2}$ થશે.

[**સૂચના :** c, શાન્ત પાણીમાં વેગ છે એટલે c પાણી સાપેક્ષે તરવૈયાનો વેગ છે. પ્રત્યેક કિસ્સામાં તરવૈયાનો વાસ્તવિક વેગ શોધવાનો છે.]

(૧૬) ઉપરના દાખલામાં તરવૈયો પ્રવાહની દિશામાં l અંતર કાપી પાછો ફરી પ્રવાહ વિરુદ્ધ l અંતર કાપી મૂળ જગ્યાએ પાછો આવતાં $(2l/c)\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)^{-1}$ સમય લેશે એમ સાબિત કરો. એ જ પ્રમાણે પ્રવાહને લંબ દિશામાં l અંતર કાપી એ જ દિશામાં પાછો ફરતાં $(2l/c)\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ સમય લેશે તેમ દર્શાવો.

[**નોંધ :** આ બન્ને સમયોના તફાવત ઉપર વિખ્યાત માઈકલસન–મોર્લે પ્રયોગનું આયોજન થયું હતું.]

જવાબો :

(૧) કલાકે $60\sqrt{26}$ માઈલ, પશ્ચિમ સાથે દક્ષિણ તરફ θ ના ખૂણે જ્યાં $\tan\theta = 5$. (૨) $10\sqrt{7}$ મા./ક. પશ્ચિમ સાથે ઉત્તર તરફ $\tan^{-1}(2/\sqrt{3})$ ના ખૂણે. (૩) $22\sqrt{3}$ ફૂ./સેક. લંબક જોડે $30°$ ને ખૂણે. (૪) 3 મા./ક. (૫) $20/\sqrt{3}$ નૉટ. (૬) $44\sqrt{(101)}$. ટ્રેનની લંબાઈ જોડે $\tan^{-1}(10)$ ને ખૂણે. (૭) $10\sqrt{13}$ મા./ક. પૂર્વ જોડે દક્ષિણ તરફ $\tan^{-1}(3/2)$ ને ખૂણે; B ના વેગ જેટલો જ વેગ. (૮) $60\sqrt{2}$ મા./ક. (૯) ઉત્તરથી પૂર્વ તરફ $\tan^{-1}[(3-\sqrt{2})/3]$ ને ખૂણે. (૧૦) અગ્નિ ખૂણામાંથી; પવનનો વેગ $v\sqrt{2}$. (૧૧) $10\sqrt{(13)}$ મા./ક. લંબક જોડે $\tan^{-1}[1/2\sqrt{3}]$ ને ખૂણે. (૧૨) $\frac{1}{20}$ માઈલ. (૧૩) 13 મા./ક. પૂર્વ જોડે ઉત્તર તરફ $\tan^{-1}(12/13)$ ને ખૂણે. (૧૪) 4·49 મિનિટ પછી (એટલે કે લગભગ $4\frac{1}{2}$ મિનિટ પછી).

ગુજરાત યુનિવર્સિટી

ના

ઇન્ટર સાયન્સના પ્રશ્નપત્રો

[યંત્રવિદ્યા વિભાગ]

૧૯૫૭

૮. (અ) બળ ત્રિકોણનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો.

(બ) ચાર ફૂટ લાંબો અને બે પાઉંડ વજનનો એક સમાન દંડ AB દિવાલમાં બિંદુ C—જે A ઉપર લંબ દિશામાં છે—તેની સાથે દોરી BC થી જોડવામાં આવ્યો છે. જો સમતુલાની સ્થિતિમાં, દંડ દિવાલની સાથે 60° નો ખૂણો બનાવે તો દોરીની લંબાઈ તથા દોરીનો તણાવ શોધો.

૯. (અ) બે સજાતીય સમાન્તર બળોના પરિણામી બળનાં મહત્ત્વ, દિશા અને કાર્યબિન્દુ શોધો.

(બ) એક ચાર ફૂટ લાંબા સમાન દંડનું વજન દર ફૂટ દીઠ અર્ધો રતલ છે. તેના ઉપર આઠ અને છ રતલનાં બે વજન, પહેલું એક છેડેથી ચાર ઈંચ દૂર અને બીજું બીજે છેડેથી આઠ ઈંચ દૂર, એમ લટકાવવામાં આવ્યાં છે. તો દંડને સમતુલામાં રાખવા માટે ટેકો દંડના મધ્યબિંદુથી કેટલે દૂર મૂકવો તે, તેમજ ટેકા ઉપરનું દબાણ શોધો.

૧૦. (અ) એક જ બિન્દુએ, એક જ સમતલમાં, જુદી જુદી દિશામાં કાર્ય કરતાં બળોના પરિણામી બળનું મહત્ત્વ તેમજ તેની દિશા શોધો, અને તે ઉપરથી તેમની સમતુલાની શર્તો પ્રાપ્ત કરો.

(બ) એક જ બિન્દુએ કાર્ય કરતાં પાંચ સમતલીય બળો સમતુલામાં છે. જો તે પૈકી ચાર બળો અનુક્રમે 4, 4, 1 અને 3 lbs. ના વજન જેટલાં મહત્ત્વનાં હોય અને તેમની દરેકની દિશા આગલા બળની દિશા

સાથે 60° નો ખૂણો બનાવતી હોય તો પાંચમા બળનું મહત્ત્વ તથા તેની દિશા નક્કી કરો.

૧૧. (અ) પદાર્થના ગુરુત્વ કેન્દ્રની વ્યાખ્યા આપો.
આખા પદાર્થનું તથા તેના એક ભાગનું વજન તથા ગુરુત્વ કેન્દ્રની સ્થિતિ આપેલાં છે, તો બાકીના ભાગનું ગુરુત્વ કેન્દ્ર શોધો.

(બ) *ABCDEF* એક 3 ઈંચ બાજુવાળા સમાન નિયમિત ષટ્કોણ આકારનું ધાતુનું પટલ છે. તેમાંથી *BCD* ત્રિકોણ પટલ કાપી લેવામાં આવે છે. તો બાકીના ભાગના ગુરુત્વ કેન્દ્રનું, બિન્દુ *F* થી અંતર શોધો.

૧૨. (અ) એક લીસી ગરગડી ઉપરથી પસાર થતી દોરીને છેડે m_1 and m_2 દ્રવ્યમાનનાં બે દ્રવ્યો બાંધવામાં આવ્યાં છે તો જે ગતિ ચાલુ થશે તેનો પ્રવેગ તેમ જ દોરીનો તણાવ શોધો.

(બ) એક લીસી ગરગડી ઉપરથી પસાર થતી હળવી દોરીને છેડે 7 અને 14 lbs. નાં બે દ્રવ્યો લટકાવવામાં આવ્યાં છે. જો ગતિ 3 સેકન્ડ સુધી ચાલુ રહ્યા પછી દોરી તૂટી જાય તો દોરી તૂટયા પછી કેટલા વખતમાં નાનું વજન તેની મૂળ જગ્યાએ પાછું આવશે તે શોધો.

૧૩. (અ) બળનો આઘાત, કાર્ય અને કાર્યદક્ષતા એટલે શું તે સમજાવો.

(બ) અરધા ટન વજનનું એક દ્રવ્ય 800 ft./sec. ના વેગથી એક સ્થિર નિશાન સાથે અથડાય છે. અને $\frac{1}{100}$ sec. માં સ્થિર થઈ જાય છે. નિશાન પરના બળનો આઘાત શોધો. જો દ્રવ્ય સ્થિર થતા સુધીનો બધો સમય અવરોધક બળ એક સરખું ચાલુ હોય, તો નિશાનમાં તે દ્રવ્ય કેટલું દૂર ખુંપી જશે તે શોધો.

૧૪. (અ) ક્ષિતિજ જોડે α કોણ બનાવતી દિશામાં v વેગથી, ગુરુત્વાકર્ષણની અસર નીચે ફેંકવામાં આવેલા પ્રક્ષિપ્તના ગતિપથનું સમીકરણ શોધો.

(બ) જમીન ઉપરથી ફેંકાયેલું એક કણ 10 ft. ને અંતરે આવેલી એક 15 ft. ઊંચી દિવાલને બરાબર ઘસાઈને પસાર થાય છે, પછી તે પહેલી દિવાલથી 10 ft. ને અંતરે આવેલી બીજી સમાંતર દિવાલને જમીનથી 20 ft. ઊંચે અથડાય છે. જો પ્રક્ષિપ્તના ગતિપથનું સમતલ, બન્ને દિવાલના સમતલને લંબ હોય તો પ્રક્ષિપ્તનો મૂળ વેગ તથા પ્રક્ષેપ કોણ શોધો.

૧૯૫૮

૮. (અ) લામીનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો.

(બ) એક કણ ઉપર કાટખૂણે કાર્ય કરતાં બે બળોને તેઓમાંના એકની જોડે 120° નો ખૂણો બનાવતું ત્રીજું બળ સમતુલામાં રાખે છે. જો આ બે બળો પૈકી મોટું બળ 3 lbs. વજનનું હોય તો બીજાં બે બળોનાં મહત્ત્વ શોધો.

૯. (અ) સાબિત કરો કે કોઈ એક કણ ઉપર કાર્ય કરતાં બે એકબીજાને છેદતાં બળોનાં, તે બળોના સમતલમાં રહેલા કોઈપણ બિંદુ આસપાસના ભ્રામકોનો બૈજીક સરવાળો તે જ બિંદુ આસપાસના તેમના પરિણામીના ભ્રામકની બરાબર થાય છે.

(બ) 16 ft. લાંબા અને 20 પા. વજનના એક સમાન દંડને તેના બન્ને છેડાઓએ ટેકવવામાં આવ્યો છે. જ્યારે 64 lbs. નું એક વજન દંડના અમુક બિંદુએ લટકાવવામાં આવે છે, ત્યારે એક ટેકા આગળ પ્રતિક્રિયા 58 પા. વજન જેટલી થાય છે. તો આ ટેકાથી 64 lbs. નું વજન કેટલે દૂર લટકાવ્યું હશે તે શોધો.

૧૦. (અ) એક સમાન ત્રિકોણાકાર પટલનું ગુરુત્વ કેન્દ્ર શોધો અને સાબિત કરો કે આ ગુરુત્વ કેન્દ્ર, જ્યાં ત્રિકોણના શિરોબિંદુઓએ મૂકેલાં ત્રણ સરખા વજનનાં કણોનું ગુરુત્વ કેન્દ્ર છે, ત્યાં છે.

(બ) એક સમાન સમભુજ ત્રિકોણાકાર પટલ ACB માંથી, તેનાથી અર્ધા ક્ષેત્રફળવાળું સમદ્વિભુજ ત્રિકોણાકાર પટલ ADB કાપી લેવામાં આવે છે તો બાકી રહેલા પટલ $ADBC$ નું ગુરુત્વકેન્દ્ર શોધો.

૧૧. (અ) એક w વજનનો પદાર્થ ક્ષિતિજ સાથે α ખૂણો બનાવતા લીસા ઢાળ ઉપર, મહત્તમ ઢોળાવની દિશા સાથે θ જેવડો આપેલો ખૂણો બનાવતા P બળની અસર નીચે સમતુલામાં ટકી રહે છે. તો તે બળ P અને ઢાળની પ્રતિક્રિયા R નાં મહત્ત્વ શોધો.

(બ) એક જ લંબક સમતલમાં રહેલ, ઢોળાવની મહત્તમ તેમ જ ક્ષૈતિજ એમ બન્ને દિશામાં કાર્ય કરતાં, $\frac{w}{2}$ જેવડાં બે બળોની અસર નીચે w વજનનો એક પદાર્થ એક લીસા ઢાળ ઉપર સમતુલામાં ટકી રહે છે. તો તે ઢાળનાં ઢોળાવ અને પ્રતિક્રિયા શોધો.

૧૨. (અ) એક જ સુરેખામાં અચલ પ્રવેગથી ગતિ કરતા પદાર્થ માટે પ્રચલિત સંજ્ઞાઓ અનુસાર સાબિત કરો કે $s = ut + \frac{1}{2}ft^2$ અને $v^2 = u^2 + 2fs$.

(બ) એક 32 ft./sec. ના વેગથી લંબક દિશામાં ઊંચે ચઢતા બલૂન-માંથી છોડી દીધેલો પત્થર 17 સેકન્ડ પછી જમીન ઉપર પહોંચે છે. તો પત્થર છોડયો ત્યારે બલૂન કેટલે ઊંચે હશે?

૧૩. (અ) સ્થિતિશક્તિ અને ગતિશક્તિની વ્યાખ્યા આપો. સાબિત કરો કે કોઈપણ પળે, ગુરુત્વાકર્ષણની અસર નીચે ગતિ કરનાર પદાર્થની સ્થિતિશક્તિ અને ગતિશક્તિનો સરવાળો અચલ રહે છે.

(બ) 10 ft./sec. ના વેગથી ગતિ કરતું 20 lbs. નું એક દ્રવ્ય તેની સામેની દિશામાંથી 6 ft./sec. ના વેગથી આવતા 10 પાઉંડના બીજા દ્રવ્ય જોડે અથડાય છે. જો અથડાયા પછી બે દ્રવ્યો મળીને એક દ્રવ્ય થઈ જાય તો તે એક દ્રવ્યનો વેગ અને ગતિશક્તિની ઘટ શોધી કાઢો.

૧૪. (અ) એક દડાને U ft./sec. જેટલા વેગથી ક્ષિતિજ સાથે α ખૂણો બનાવતી દિશામાં ફેંકવામાં આવે છે તો તે દડો કેટલા સમય પછી અને પ્રસ્થાન બિંદુથી જમીન સાથે કેટલા અંતરે અથડાશે તે શોધો.

(બ) સઘળી દિશાઓમાં 20 ft./sec. ની ગતિથી પાણી ઉડાડતો ફુવારો એક વર્તુળાકાર થાળાની મધ્યમાં છે. તો ફુવારામાંથી ઊડતું સઘળું પાણી થાળામાં ઝીલાય તે માટે થાળાનો ઓછામાં ઓછો વ્યાસ કેટલો હોવો જોઈએ?

૧૯૫૯

૮. બળ ત્રિકોણનું પ્રમેય લખો ને સાબિત કરો.

બે ગ્રામ વજનના કણને ક્ષિતિજ જોડે 30° નો ખૂણો બનાવતા લીસા ઢાળ ઉપર સ્થિર રાખવા માટે કેટલું ક્ષૈતિજ બળ જોઈશે તે શોધી કાઢો.

૯. એક બિંદુ પર કાર્ય કરતાં અનેક સમતલીય બળોનું પરિણામી બળ શોધવાની રીત દર્શાવો. $ABCDEF$ એક નિયમિત ષટ્કોણ છે. AB, $2AC$, $3AD$, $2AE$ અને AF વડે દર્શાવાતાં બળો A બિંદુ ઉપર કાર્ય કરે છે. આ બળોનું પરિણામી બળ શોધો.

૧૦. સાબિત કરો કે $2a$ અને $2b$ લંબાઈની સમાંતર બાજુવાળા, સમલંબ ચતુષ્કોણનું ગુરુત્વકેન્દ્ર, આ બે બાજુઓના મધ્યબિંદુને જોડતી રેખાને $\dfrac{a+2b}{b+2a}$ ના ગુણોત્તરમાં વિભાગે છે.

એક સમાન તારના બનાવેલ ત્રિકોણ ABC માંથી CA બાજુ કાઢી નાખવામાં આવી છે અને બાકીનો ભાગ A બિંદુથી લટકાવવામાં આવ્યો છે. જો સમતુલાની સ્થિતિમાં BC ક્ષૈતિજ રહે તો સિદ્ધ કરો કે $b^2(c+2a) = c(c+a)^2$.

૧૧. સાબિત કરો કે બળયુગ્મ નહિ બનાવતાં એવાં બે સમાંતર બળોના કોઈપણ બિન્દુ આસપાસના ભ્રામકનો બૈજીક સરવાળો, બળોના પરિણામીના તે જ બિન્દુ આસપાસના ભ્રામકની બરાબર થશે

10 ફૂટ લંબાઈના અને W વજનના સમાન દંડના એક છેડે $3W$ વજનનું કણ બાંધવામાં આવ્યું છે. દંડ તેના કયા બિન્દુએ સમતુલિત થશે તે શોધી કાઢો.

12 પાઉંડ વજનના 14 ફૂટ લાંબા અને સમાન દંડના બે છેડે અનુક્રમે 4 પાઉંડ અને 12 પાઉંડનાં વજન લટકાવવામાં આવ્યાં છે. દંડના કયા બિંદુએ આ વજનોનું પરિણામી કાર્ય કરશે તે શોધી કાઢો.

૧૨. ન્યૂટનના ગતિનિયમો લખો ને ટૂંકમાં સમજાવો.

આ નિયમોની ગણિતની દૃષ્ટિએ સાબિતિ આપી શકાય ખરી કે?

m_1 દ્રવ્યમાનનો એક પદાર્થ એક લીસા ક્ષૈતિજ ટેબલ ઉપર તેની ધારથી a અંતરે પડેલો છે. a કરતાં વધારે લંબાઈની દોરીનો એક છેડો પદાર્થને બાંધેલો છે જ્યારે તેને બીજે છેડે, નીચે લટકતો m_2 $(m_2 > m_1)$ દ્રવ્યમાનનો પદાર્થ બાંધેલો છે. સાબિત કરો કે, પદાર્થનો સામાન્ય પ્રવેગ f હોય તો $\dfrac{f}{g-f} = \dfrac{m_2}{m_1}$; અને m_1 ને ટેબલની ધાર સુધી પહોંચતાં કેટલો સમય લાગશે તે શોધી કાઢો.

૧૩. ગુરુત્વાકર્ષણની અસર નીચે, ક્ષિતિજ જોડે α ખુણો બનાવતી દિશાએ, V વેગથી, એક કણ ફેંકવામાં આવે છે. પ્રક્ષેપ બિંદુમાંથી પસાર થતી ક્ષૈતિજ, ને ઉપર તરફની લંબક દિશાને x ને y અક્ષો તરીકે પસંદ કરીને, બતાવો કે પ્રક્ષિપ્તના ગતિમાર્ગનું સમીકરણ

$$y = x\tan\alpha - \tfrac{1}{2}g\frac{x^2}{V^2\cos^2\alpha} \text{ છે.}$$

આ સમીકરણ ઉપરથી તારવો કે

(૧) ગતિમાર્ગ પરવલય છે.

(૨) કણે પ્રાપ્ત કરેલી મહત્તમ ઉંચાઈ $\dfrac{V^2\sin^2\alpha}{2g}$ છે.

(૩) કણે કાપેલું ક્ષૈતિજ દિશાનું મહત્તમ અંતર $\dfrac{V^2}{g}$ છે.

પ્રસ્થાન પછી, t_1 સેકંડ બાદ પ્રક્ષિપ્ત તેના ગતિમાર્ગના કોઈ બિંદુ P ઉપરથી પસાર થાય છે. જો કુલ ઉડ્ડયન સમય $t_1 + t_2$ સેકંડ હોય તો સાબિત કરો કે P ની પ્રક્ષેપબિંદુથી ઊંચાઈ $16t_1t_2$ ફૂટ છે ($g = 32$ ft./sec^2.).

૧૪. (a) નીચેનાનો અર્થ સમજાવો:

(i) બળનો આઘાત

(ii) આઘાતી બળ

(iii) વેગમાનની સુરક્ષિતતાનો સિદ્ધાંત

(iv) બળથી કરાતું કાર્ય

(v) કોઈ યંત્રનો પાવર.

(b) 100 H.P. નું એક એંજીન 250 ટન વજનની એક ટ્રેનને, અચળ અવરોધ સામે 45 માઈલ પ્રતિ કલાકના વેગે ગતિ આપે છે. અવરોધનું મહત્ત્વ શોધો.

૧૯૬૦

૮. લામીનું પ્રમેય લખો અને તેની સાબિતી આપો.

એક સ્થિર બિન્દુએ બાંધેલી દોરીને બીજે છેડે W વજનનું એક કણ લટકાવવામાં આવેલું છે. કણ ઉપર H મહત્ત્વનું એક ક્ષૈતિજ બળ કાર્ય કરે છે, જેને પરિણામે, દોરી લંબક જોડે α ખૂણો બનાવે તેવી સ્થિતિમાં, કણ સ્થિર રહે છે. જો દોરી T_0 થી વધુ તણાવ સહન કરી શકે તેવી ન હોય તો ઓછામાં ઓછી Hની શી કિંમત માટે દોરી તૂટી જશે?

૯. સાબિત કરો કે દૃઢ પદાર્થ પર કાર્ય કરતાં કોઈપણ બે સમતલીય બળોનાં, સમતલમાંના કોઈપણ બિન્દુ આસપાસનાં ભ્રામકનો સરવાળો તેમના પરિણામીના તે જ બિન્દુ આસપાસના ભ્રામક બરાબર થશે.

એક ખોટાં ત્રાજવાંની બન્ને ડાંડીની લંબાઈ અસમાન છે તેમ જ બન્ને પલ્લાંનાં વજન પણ સરખાં નથી. છતાં પલ્લાં જ્યારે ખાલી હોય ત્યારે ત્રાજવું સમતુલામાં રહે છે. એક પદાર્થને એક પલ્લામાં મૂકતાં તેનું વજન w_1 થાય છે જ્યારે તેને બીજા પલ્લામાં મૂકતાં વજન w_2 થાય છે. સાબિત કરો કે પદાર્થનું ખરૂં વજન w_1 અને w_2 વચ્ચેનો ગુણોત્તર મધ્યક છે.

૧૦. $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots (x_n, y_n)$ બિન્દુઓ ઉપર આવેલાં $w_1, w_2 \ldots w_n$ વજનનાં કણોનાં ગુરુત્વબિન્દુ માટેના યામ શોધો.

7′ ઊંચાઈ અને 4′ 6″ પહોળાઈવાળા એક બારણાનું વજન 50 પા. છે. બારણાના મથાળેથી 3′ નીચે એક કેન્દ્ર લઈ, 6″ ત્રિજ્યાનું વર્તુળ દોરી બારણામાં એક છેદ પાડવામાં આવ્યો છે અને તે છેદમાં 6 પા. વજનની કાચની બારી જડી દેવામાં આવી છે. સાબિત કરો કે બારણાનું વજન હવે લગભગ પોણાપંચાવન પાઉન્ડ થશે. અને બારણાની નીચલી ધારથી ગુરુત્વકેન્દ્રની ઊંચાઈ શોધો.

૧૧. દૃઢ પદાર્થ પર કાર્ય કરતાં ત્રણ સમતલીય બળો જો પદાર્થને સમતુલામાં રાખે તો સાબિત કરો કે બળોની કાર્યરેખા કાં તો એક બિન્દુમાં મળશે અથવા તો સમાન્તર થશે.

10′ લાંબા એક સમાન દંડ ABને B ઉપર એક દિવાલ જોડે નકૂચા વડે જડી દેવામાં આવ્યો છે, તેના A છેડા ઉપર એક દોરી બાંધવામાં આવી છે અને દંડને ટેકવવા માટે દોરીનો બીજો છેડો દિવાલમાં Bથી 10′ લંબક દિશામાં ઉપર આવેલા C બિન્દુએ બાંધવામાં આવ્યો છે. જો દંડનું વજન 20 પા. હોય અને દોરીની લંબાઈ 15′ હોય તો દોરીનો તણાવ શોધો અને નકૂચા પરની પ્રતિક્રિયાનું મહત્ત્વ 13·2 પાઉન્ડ વજન હશે એમ સાબિત કરો.

૧૨. u વેગથી પ્રસ્થાન કરીને અચળ પ્રવેગ f થી પ્રવાસ કરતા એક પદાર્થની સુરેખાગતિનું વર્ણન કરતાં સમીકરણો મેળવો.

સ્થિર સ્થિતિમાંથી નીકળીને એક પદાર્થ અચળ પ્રવેગથી ગતિ શરૂ કરે છે. ગતિની પાંચમી સેકન્ડમાં તે 45 ફૂટનું અન્તર કાપે છે. પદાર્થનો અચળ પ્રવેગ શોધો. પ્રસ્થાન બિન્દુથી 245 ફૂટ અન્તર કાપતાં તેને કેટલો સમય લાગશે તથા ત્યારે તેનો શો વેગ હશે તે પણ શોધો.

૧૩. યંત્રના પાવરની વ્યાખ્યા આપો. હોર્સપાવર એટલે શું?

35 cwt. વજનની એક ગાડી સમતલ રસ્તા ઉપર 50 m.p.h. ના વેગથી પ્રવાસ કરી શકે અને 8માં 1ના ઢાળ ઉપર 15 m.p.h. ના વેગથી ચઢી શકે તો ગાડીના એન્જીનનો હોર્સપાવર શોધો. ગણતરી કરતી વખતે માની લેવાનું કે ઘર્ષણ વગેરેને કારણે ઉત્પન્ન થતાં અવરોધક બળો અચળ છે.

૧૪. પ્રક્ષિપ્તે પ્રાપ્ત કરેલી મહત્તમ ઊંચાઈ તથા તેણે કાપેલા ક્ષૈતિજ અન્તર માટેનાં સૂત્રો સ્થાપિત કરો.

એક ક્ષૈતિજ સમતલ પરથી ફેંકેલા પ્રક્ષિપ્તને તેના ગતિમાર્ગના કોઈ એક બિન્દુ P ઉપર પહોંચતાં t_1 સે. જેટલો સમય લાગે છે અને તે બિન્દુથી આગળ વધીને ફરી પાછું ક્ષૈતિજ સમતલ પર આવતાં બીજી t_2 સે. લાગે છે. સાબિત કરો કે Pની સમતલથી ઊંચાઈ $\frac{1}{2}gt_1t_2$ ફૂટ છે.

૧૯૬૧

૮. લામીના પ્રમેયની પ્રતિજ્ઞા અને સાબિતી આપો.

W વજનનો એક સમાન દંડ AB, A બિન્દુએ નકુચા વડે જડેલો છે, અને જેની લંબાઈ દંડની લંબાઈની બરાબર છે અને જે દંડના બીજા છેડે બાંધી છે તેવી દોરી BC વડે સમતુલામાં રાખેલ છે. જો AC ક્ષૈતિજ હોય અને $\angle BAC = \alpha$ હોય તો સાબિત કરો કે દોરીનો તણાવ $\frac{1}{4}W\operatorname{cosec}\alpha$ છે.

૯. જો બે બળોનું પરિણામી હોય તો સાબિત કરો કે કોઈ એક પદાર્થ ઉપર કાર્ય કરતાં, બે સમતલ બળોના પરિણામીનું તે સમતલના કોઈ એક બિન્દુ આસપાસનું ભ્રામક તે તે બળોના તે જ બિન્દુ આસપાસનાં ભ્રામકના સરવાળા બરાબર થાય છે.

20 સે. મી. લાંબો અને 273 ગ્રામ વજનનો એક સમાન પાટડો AB બે ટેકા P અને Q વડે ટેકવવામાં આવેલો છે. સમતુલા ગુમાવ્યા વગર, પાટડા ઉપર, A અથવા B છેડા ઉપર જે મહત્તમ વજનો મૂકી શકાય તે વજનો અનુક્રમે 182 ગ્રામ અથવા 117 ગ્રામ છે. લંબાઈ PQ શોધો.

૧૦. સમાન ત્રિકોણીય પટલનું ગુરુત્વકેન્દ્ર શોધો.

જેની AB, BC બાજુઓ સમાન છે અને જેમાં B કાટખૂણો છે તેવા કાટખૂણી ત્રિકોણાકાર પટલ ABC બિન્દુ A આગળ, મુક્ત રીતે લટકાવેલો છે. સાબિત કરો કે AC લંબકની સાથે ખૂણો $\tan^{-1}\frac{1}{3}$ બનાવે છે.

૧૧. ક્ષૈતિજ સાથે α કોણ બનાવતા લીસા ઢાળ ઉપર W વજનના એક પદાર્થને મહત્તમ ઢાળની રેખા સાથે θ કોણ બનાવતા બળ P વડે સમતુલામાં રાખવામાં આવેલ છે. બળ Pનું મહત્ત્વ અને ઢાળની પ્રતિક્રિયા શોધો.

10 ગ્રામ વજનના પદાર્થને સમતુલામાં રાખવા માટે લીસા ઢાળ ઉપર કાર્ય કરતા બળનું મહત્ત્વ શોધો; આપેલું છે કે બળ, ઢાળની પ્રતિક્રિયા અને પદાર્થનું વજન સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

૧૨. એક લીસી ગરગડી ઉપરથી પસાર થતી દોરીને છેડે m_1 અને m_2 દ્રવ્યમાનનાં બે કણો બાંધવામાં આવ્યાં છે. ગતિવ્યવસ્થાનો પ્રવેગ અને દોરીનો તણાવ શોધો.

100 ગ્રામ વજનનું એક એવાં બે પલ્લાં એક લીસી ગરગડી ઉપરથી પસાર થતી દોરી વડે લટકાવ્યાં છે. આ બે પલ્લાં વચ્ચે 18 ગ્રામ દ્રવ્યનું વિભાજન એવી રીતે કરો કે ભારે દ્રવ્ય પહેલી બે સેકન્ડમાં 9 સે. મી. નું અંતર નીચે ઉતરે.

૧૩. સ્થિતિશકિત અને ગતિશકિતની વ્યાખ્યા આપો. સાબિત કરો કે ગુરુત્વાકર્ષણ નીચે પડતા પદાર્થની ગતિની કોઈ પણ ક્ષણે પદાર્થની સ્થિતિશકિત તથા ગતિશકિતનો સરવાળો અચળ છે.

20 સે.મી./સેક. ના વેગથી ગતિ કરતો 45 ગ્રામ વજનનો એક પદાર્થ, તેની સામેથી 16 સે.મી./સેક. ના વેગથી આવતા 15 ગ્રામ વજનના બીજા પદાર્થ સાથે અથડાય છે. જો અથડામણ બાદ બન્ને પદાર્થો એકી સાથે જ પ્રવાસ કરે તો તે બન્નેનો સામાન્ય વેગ અને ગતિશકિતની ઘટ શોધો.

૧૪. પ્રક્ષિપ્તની ગતિ દરમિયાન, મહત્તમ ઊંચાઈ, ક્ષૈતિજ અંતર અને ઉડ્ડયનના સમય માટેનાં સૂત્રો મેળવો.

10·9 મીટર ઊંચી લંબક દિવાલના તળિયેથી 21·8 મીટર દૂર આવેલા બિન્દુએથી એક પ્રક્ષિપ્તને એવી રીતે ફેંકવામાં આવે છે કે તે દિવાલને મથાળે ક્ષૈતિજ દિશામાં અને દિવાલને ઘસાઈને, દિવાલ ઓળંગે છે. કયા વેગ વડે અને કયા ખૂણે પ્રક્ષિપ્તને ફેંકવામાં આવ્યો હશે તે શોધો.

પરિશિષ્ટ

[પુસ્તકમાં વપરાયેલા પારિભાષિક શબ્દોની સૂચિ]

Acceleration	પ્રવેગ
Action	ક્રિયા
Body	પદાર્થ
Centre of Gravity	ગુરુત્વમધ્યબિન્દુ
Component	સંઘટક
Couple	બળયુગ્મ, યુગ્મ
Direction	દિશા
Displacement	સ્થળાન્તર
Dynamics	પ્રવૈગિકી
Dyne	ડાઈન
Energy	શક્તિ
Equilibrium	સમતુલા
Erg	અર્ગ
Foot-poundal	ફૂટ પાઉન્ડલ
Force	બળ
Gramme	ગ્રામ
Greatest height	મહત્તમ ઊંચાઈ
Horizontal range	ક્ષૈતિજ અન્તર
Horse power	હોર્સ પાવર
Impact	અથડામણ
Impulse	આઘાત
Impulsive	આઘાતી
——force	—બળ
——Motion	—ગતિ
Inclined plane	ઢાળ
Kinetic Energy	ગતિશક્તિ
Lamina	પટલ
Like parallel forces	સજાતીય સમાન્તર બળો
Magnitude	મહત્ત્વ
Matter	દ્રવ્ય
Mass	દ્રવ્યમાન
Moment	ભ્રામક
Momentum	વેગમાન
Motion	ગતિ
Particle	કણ
Potential Energy	સ્થિતિ શક્તિ
Pound	પાઉન્ડ
Poundal	પાઉન્ડલ
Pound weight	પા. વજન
Power	પાવર
Principle of Conservation of Energy	શક્તિ ભંડોળની સુરક્ષિતતાનો સિદ્ધાન્ત

Principle of Conservation of Momentum
વેગમાન ભંડોળની સુરક્ષિતતાનો સિદ્ધાન્ત
Projectile પ્રક્ષિપ્ત
Reaction પ્રતિક્રિયા
Relative સાપેક્ષ
——Motion——ગતિ
——Velocity——વેગ
Resistance અવરોધક
અવરોધકબળ
Resolved part વિભાજીતઅંશ
Resultant પરિણામી
Retardation પ્રતિપ્રવેગ
Rigid દૃઢ
Rod દંડ
Scalar નિર્દિશ
Statics સ્થૈતિકી
Tension તણાવ
Thrust ધક્કો
Time of flight ઉડ્ડયનસમય
Uniform એકધારું
Unlike parallel forces
વિજાતીય સમાન્તર બળો
Vector સદિશ
Velocity વેગ
Vertical લંબક
Weight વજન
Work કાર્ય