B. S. Mohawaku

Personal Copy

Vorlesungen

zur Einführung in die

Relativitätstheorie

Von

Ernst Richard Neumann
o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Marburg

Mit 39 Abbildungen im Text



Jena
Verlag von Gustav Fischer
1922

Alle Rechte vorbehalten.
Copyright 1922 by Gustav Fischer, Publisher, Jena.

CARL NEUMANN

zum neunzigsten Geburtstag
am 7. Mai 1922

gewidmet

Vorwort.

Das vorliegende Buch ist entstanden aus zwei Vorlesungen, die ich im Sommersemester 1920 und dem darauffolgenden Wintersemester an der hiesigen Universität gehalten habe, und an der Bezeichnung als „Vorlesungen“ habe ich festgehalten, um sogleich äußerlich anzudeuten, daß sich der Inhalt auch in der neuen Form in erster Linie an die Studierenden wendet. Sodann habe ich aber bei der Abfassung auch an den weiteren Kreis aller derer gedacht, die, schon fern der Hochschule, sich einst in ihrer Studienzeit mit Mathematik und den Grundzügen der exakten Naturwissenschaften beschäftigten und nun den Wunsch haben, auch die neueren Umwälzungen auf diesen Gebieten kennen zn lernen. — Vor allem dachte ich dabei an unsere Oberlehrer.

Gerade aus ihren Reihen ist mir häufiger der Wunsch nach einem solchen in die Relativitätstheorie einführenden und doch bis zur mathematischen Formulierung der Theorie vordringenden Werke geäußert worden, und darin möchte ich auch zugleich die beste Rechtfertigung für mein Unternehmen erblicken, wenn ich es wage, den vielen Büchern über Relativitätstheorie noch ein weiteres hinzuzufügen.

Ein Blick auf die vorhandene Literatur lehrt jedoch, daß auf der einen Seite die schier unübersehbare Menge der „populären“ Schriften steht — darunter (neben manchem Minderwertigen) auch sehr gute Darstellungen, die aber doch den mathematisch vorgebildeten Leser darum nicht voll befriedigen können, weil sie zwar die allgemeinen Ideen auseinandersetzen, aber ihren Ausbau bis zu einer mathematisch-physikalischen Theorie nicht geben. — Auf der anderen Seite stand, wenigstens bis vor kurzem, nur das bekannte Buch von Weyl, als eigentlich das einzige, das auch eine zusammenfassende Darstellung der mathematischen Theorie enthielt. So unbestritten dieses Buch aber für jeden Kenner des Gebietes eine reiche Fundgrube neuer Erkenntnis ist und eine Fülle von Anregungen bietet, scheint es doch wenig geeignet, jemand erstmalig in die Theorie einzuführen, denn einmal stellt es (entgegen der Versicherung des Verfassers in dem Vorwort zur ersten Auflage) doch in Wahrheit recht hohe Anforderungen an den Leser, sodann dürfte aber auch der ganze Weg, den Weyl geht, daß er

nämlich zunächst eine abstrakt mathematische Theorie aufbaut und sie dann erst nachträglich physikalisch deutet — so interessant er an sich ist — doch wenig dem ersten Bedürfnis des Anfängers auf diesem Gebiete entsprechen.

So klaffte eine gewisse Lücke zwischen den die allgemeinen Grundideen behandelnden Schriften einerseits und dem die mathematische Theorie sehr abstrakt darstellenden Weylschen Buche, und diese Erkenntnis ließ vor etwa Jahresfrist den Plan zu dem vorliegenden Buche in mir reifen. Wenn nun auch in diesem Jahre mehrere Werke erschienen sind, welche eine gewisse mittlere Linie zwischen den geschilderten Extremen halten, wie das Buch von Kopff, der zweite Teil des Laueschen Werkes und der Enzyklopädie-Artikel von Pauli (die übrigens auf meine Arbeit nicht mehr von Einfluß gewesen sind), so hoffe ich doch, daß mein Buch auch neben ihnen wird bestehen können, um so mehr, als doch die Tendenz jener Werke meist eine ganz andere ist. So stehen z. B. bei Laue ganz und gar die physikalischen Anwendungen der Theorie im Vordergrunde, während ich das eigentliche Werden der mathematischen Theorie darstellen will, ihre Entwicklung aus dem allgemeinen physikalischen und erkenntnistheoretischen Grundlagen heraus — ich habe mir eben zur Hauptaufgabe gewählt, die in der Literatur noch fehlende Brücke zu schlagen zwischen den beiden oben geschilderten Arten von Darstellungen.

So gehe auch ich von einer möglichst allgemeinverständlichen Darlegung der Grundlagen aus, und manche Abschnitte des Buches (z. B. § 3 des ersten Teiles) stellen an den Leser nicht im mindesten höhere Anforderungen wie die vielen populären Schriften. Doch bleibe ich nicht bei diesen allgemeinen Betrachtungen stehen, sondern dringe auf ihnen aufbauend bis zu einer im mathematischem Gewande erscheinenden Theorie vor.

Physikalische Anwendungen dieser Theorie in größerer Zahl zu bringen, lag außerhalb des Planes dieses Werkes, und so wird denn auch die Tensorrechnung nur verhältnismäßig kurz behandelt, die heute zwar ein wohl unentbehrliches Hilfsmittel bei diesen Anwendungen, aber m. E. eben doch immer nur ein Hilfsmittel bildet, und nicht die Theorie selber ist, wie es nach manchen Darstellungen fast scheinen könnte. —

Was sodann den von mir eingeschlagenen Weg anlangt, so habe ich geglaubt, daß der historische Entwicklungsgang einer Theorie im allgemeinen auch der zur Einführung geeignetste Weg sein dürfte, und so bin ich denn im wesentlichen den Gedankengängen der beiden Einsteinschen Originalarbeiten „Zur Elektrodynamik bewegter Körper“ Ann. d. Phys. Bd. 17, 1905) und „Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie“ (ebenda Bd. 49, 1916) gefolgt. Ich würde den Zweck des Buches als erfüllt ansehen, wenn es mir geglückt sein sollte, durch näheres Eingehen auf die Punkte, die dem Anfänger erfahrungsgemäß Schwierigkeiten bereiten, den Leser in den Stand gesetzt zu

haben, nun auch Originalarbeiten zu lesen. Um das Maß der erforderlichen mathematischen Vorkenntnisse nach Möglichkeit einzuschränken, habe ich es häufiger, z. B. beim Zurückgreifen auf die Flächentheorie, für richtig gehalten, etwas weiter auszuholen.

Ueberhaupt habe ich im Interesse eines möglichst sicheren Verständnisses geglaubt, mich einer gewissen Breite befleißigen zu sollen, und bin damit bewußt dem Beispiele Carl Neumanns gefolgt, dem ich dieses Buch in Dankbarkeit und Ehrfurcht widme, als dem Manne, der durch seine meisterhafte Analyse der Galilei-Newtonschen Theorie (1870) das Interesse für ein Problem neu belebt hat, für das seiner Generation das Verständnis verloren zu gehen drohte, ein Problem, das dann später mit den Ausgangspunkt für die Relativitätstheorie gebildet hat. —

Dank sagen möchte ich zum Schluß noch vor allem meinem Kollegen, Herrn Prof. Dr. Cl. Schaefer, für das rege Interesse, das er an dem Werden meines Buches genommen hat; er hat das ganze Manuskript gelesen und mich auch noch bei den Korrekturen tatkräftig unterstützt. Ihm verdanke ich manch wertvollen Ratschlag. — Danken möchte ich auch Herrn Kollegen Prof. Dr. E. Take, der mir eine sorgfältige Ausarbeitung meiner zweiten Vorlesung zur Verfügung stellte.

Bei den Korrekturen, aber über sie auch noch weit hinaus, war mir vor allem Herr cand. math. Erich Rieckmann behilflich, dann aber auch mein ältester Sohn stud. math. Franz Neumann, von dem auch die Mehrzahl der Figuren gezeichnet ist. — Auch ihnen beiden sei an dieser Stelle mein wärmster Dank gesagt.

Endlich bleibt mir noch übrig, auch der Verlagsbuchhandlung und der Buchdruckerei zu danken für ihr bereitwilliges Eingehen auf alle meine Wünsche bezüglich der Ausstattung und für die rasche Drucklegung des Werkes.

Marburg (Lahn), Ostern 1922.

E. R. Neumann.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Vorwort V
Einleitung 1

Erster Teil.

Die spezielle Relativitätstheorie.

§ 1. Allgemeine Vorbemerkungen 4
§ 2. Rückblick auf die klassische Mechanik 7
§ 3. Zur Frage, ob der Weltäther ruht oder mit der Materie mitgeführt wird 25
§ 4. Die Problemstellung von Einstein. Voruntersuchung 38
§ 5. Das Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit 48
§ 6. Die schließliche Lösung des Einsteinschen Problems. Die Lorentz-Transformationen 55
§ 7. Vergleichung von Längen und Zeiten in zwei Systemen 67
§ 8. Die einfachsten Anwendungen der Theorie 72
§ 9. Die Transformation der Maxwellschen Gleichungen für das Vakuum . 81
§ 10. Minkowskis geometrische Veranschaulichung der Lorentz-Transformationen 87
§ 11. Die Grundzüge der Minkowskischen Mechanik 107
§ 12. Minowskis imaginäre Welt 119

Zweiter Teil.

Die allgemeine Relativitätstheorie.

§ 1. Vorbemerkungen. Das Einsteinsche Aequivalenzprinzip 130
§ 2. Graphische Darstellungen. Exkurs in die Flächentheorie. Invarianz und Kovarianz 146
§ 3. Der analytische Ausdruck für das Gravitationsfeld. Das allgemeine Relativitätsprinzip 157
§ 4. Weitere Beziehungen zur Flächentheorie sowie zur nichteuklidischen Geometrie 167
§ 5. Das Einsteinsche Fundamentalgesetz 190
§ 6. Grundzüge der Tensorrechnung 201
§ 7. Die infinitesimale Parallelverschiebung eines Vektors und die Krümmung einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit 211
§ 8. Die Feldgleichungen der Gravitation. Die Planetenbewegung 218

Anhang.

Kurzer Ausblick auf die Weylsche Theorie 225

Es können möglicherweise uns diejenigen mathematischen Vorstellungen, diejenigen Vorstellungen über Raum und Zeit noch fehlen, welche notwendig sind, um auf den wahren einfachen Grund der elektrischen und magnetischen Erscheinungen hinabzusteigen.

CARL NEUMANN.
(Tübinger Antrittsvorlesung 1865.)

Einleitung.

Es ist bekannt, daß zu den Zeiten von COPERNICUS, KEPPLER, GALILEI ein heftiger Streit um die Frage geführt ist, ob die Sonne sich um die Erde, oder aber die Erde sich um die Sonne drehe. Wenn wir heute Stellung zu dieser Streitfrage nehmen, so werden wir sagen müssen, daß an sich beide Ansichten durchaus gleichberechtigt sind, denn Bewegung ist nichts Absolutes, sondern etwas nur Relatives, alles, was wir an Bewegungen wahrnehmen, sind nur Lageänderungen verschiedener Körper gegeneinander. Bei einer Bewegung müssen also immer mindestens zwei Körper beteiligt sein — ob wir dann von dem einen sagen, er bewege sich um den anderen, oder von dem anderen, er bewege sich um den einen — das hängt ganz von unserem freien Ermessen ab.

Weshalb aber erzählen wir denn unseren Kindern und Schülern stets, daß sich die Erde um die Sonne bewege, wenn doch, wie wir soeben sagten, die andere Auffassung ganz gleichberechtigt ist? — einzig und allein aus Gründen der Zweckmäßigkeit, weil wir so zu einem einfacheren Bilde von unserem Planetensysteme gelangen. Würden wir die Erde als ruhend betrachten, so würden wir von den übrigen Planeten sagen müssen, sie bewegten sich um die Sonne, die sich ihrerseits um die Erde drehe, und die Beschreibung der Bewegung der Trabanten der Planeten, z. B. der Jupitermonde, würde sich noch schwieriger gestalten. — Da kann es wohl keinem Zweifel unterliegen, daß tatsächlich das COPERNICANISCHE System mit der ruhenden Sonne entschieden das einfachere ist, und daß es daher den Vorzug vor dem PTOLEMAEISCHEN Systeme verdient.

Dieses einfache Beispiel enthält nun, so trivial an sich diese Ueberlegungen scheinen, eine äußerst wichtige Lehre für uns, nämlich diese: Es liegt häufig bei physikalischen Theorien für die Entscheidung für eine von verschiedenen Möglichkeiten keine Naturnotwendigkeit vor, sondern es sprechen lediglich Zweckmäßigkeitsgründe für sie — und allein die richtige Erkenntnis dieser Tatsache kann uns und muß uns den Mut geben, auch Theorien zuzulassen, die zunächst den uns geläufigen Vorstellungen widersprechen und uns zwingen, uns gewohnte und geradezu in Fleisch und Blut übergegangene Anschauungen aufzugeben — wir müssen uns zu solchen Theorien bekennen, wenn sie

eben nur zur Erklärung der Naturerscheinungen zweckmäßiger im obigen Sinne sind.

Das Prinzip der Zweckmäßigkeit spielt überhaupt in den theoretischen Naturwissenschaften eine hervorragende Rolle, ja selbst in der Mathematik, in der wir gewohnt sind, die verkörperte Logik und eine von aller Willkür freie Disziplin zu erblicken. Gleichwohl ist auch in ihr Vieles Uebereinkunft, also letzten Endes Willkür; erinnert sei da an die Axiome der Geometrie, die wir bekanntlich verschieden wählen können, ohne etwa auf Widersprüche zu kommen (Nichteuklidische Geometrien). Aber auch z. B. wenn wir die negativen Zahlen einführen, so müssen wir angeben, wie mit diesen zu rechnen ist, und dafür, wie das geschieht, sind eben wieder lediglich Zweckmäßigkeitsgründe maßgebend gewesen; an sich hätte man auch ganz andere als die jetzt üblichen Festsetzungen treffen können und hat sie anfänglich sogar vielfach getroffen. — Nun aber könnte sich jemand auch gerade auf einen entgegengesetzten Standpunkt stellen und einwenden: ja, die Mathematik sei eine reine Schöpfung unseres Geistes, und daher könnten wir allerdings in ihr die Festsetzungen treffen, wie wir wollten, aber die naturwissenschaftlichen Theorien müßten von solcher Willkür frei sein, bei ihnen könne es sich immer nur um die Frage handeln: Ist eine Theorie richtig oder ist sie falsch? nicht aber: Ist sie zweckmäßig oder unzweckmäßig? — Wer so spräche, beginge einen großen Irrtum, denn wir müssen uns immer vergegenwärtigen, daß wir nicht die Gesetze der Natur selber ergründen, sondern nur die Grundgesetze für ein Bild der Natur. Die Natur selber geht unabhängig vom Menschen mit ehernen Schritten ihren Gang, ihr wahres Wirken zu ergründen liegt außerhalb menschlicher Kraft, zwischen ihrem Walten und unseren Vorstellungen davon fehlt jede Brücke. „Die Elemente unseres Bildes von der Welt, sagt Bernhard Riemann*), sind von den entsprechenden Elementen des abgebildeten Realen gänzlich verschieden. Sie sind etwas in uns; die Elemente des Realen etwas außer uns.“ Es fehlt jede Stelle, wo man den Hebel zur Erklärung der Natur selber einsetzen könnte. Das Gravitationsgesetz, der Satz vom Parallelogramm der Kräfte, und andere sog. Naturgesetze sind nicht anzusehen als die Gesetze, nach denen sich die Natur selber richtet, sondern es sind lediglich Hypothesen, ersonnen, um auf ihnen ein der Natur möglichst ähnliches Gebäude zu errichten. Die Frage, ob ein Gesetz das wirklich „wahre“ ist, erscheint in diesem Sinne gänzlich verfehlt. Wir haben nur die Aufgabe unsere Grundgesetze und Grundvorstellungen möglichst zweckmäßig zu bilden, und darunter verstehen wir natürlich: so, daß ihre Folgerungen einer möglichst großen Anzahl beobachteter Naturerscheinungen gleichen, oder wie es Heinrich Hertz in der berühmten Einleitung zu seiner Mechanik**) so treffend ausdrückt: „von solcher Art, daß die denknotwendigen Folgen der Bilder stets wieder die Bilder seien von den naturnotwendigen Folgen der abgebildeten Gegenstände.“

Solche Grundlagen zu ermitteln, an die man überhaupt erst mit den Mitteln der Logik und Mathematik anknüpfen kann (aus denen

*) „Versuch einer Lehre von den Grundbegriffen der Mathematik und Physik als Grundlage für die Naturerklärung“ in den Fragmenten philosophischen Inhaltes, aus dem Nachlasse zusammengestellt in den Ges. Werken, 2. Auflage, Leipzig 1892, bei Teubner, S. 523.

**) Leipzig 1894, bei Joh. Ambr. Barth.

man „denknotwendige“ Folgerungen ziehen kann), ist die letzte Aufgabe jeder naturwissenschaftlichen Theorie. Ob wir diese Grundlagen dann „Grundgesetze“, „Hypothesen“ oder „Axiome“, oder sonst wie nennen, ist dabei ganz gleichgültig. —

Wenn wir die Aufgabe des theoretischen Naturforschers oben dahin umschrieben, er solle ein der Natur möglichst ähnliches Gebäude errichten, so sind jene Grundlagen in diesem Bilde die Fundamente des Gebäudes. Der Aufbau auf ihnen vollzieht sich zwangsläufig nach den ehernen Gesetzen der Logik — die Steine des Fundamentes selber kann uns aber die Logik niemals liefern, denn allein aus logischen Prinzipien heraus kann man keine naturwissenschaftliche Theorie ableiten. Wie wir diese Fundamente wählen, das steht ganz in unserem Ermessen, das einzige Kriterium für die Güte einer getroffenen Wahl besteht darin, daß das auf dieser Grundlage errichtete Gebäude ein möglichst getreues Bild der beobachteten Naturvorgänge liefere, wie das ein vielfach Copernicus zugeschriebener*) Ausspruch so trefflich zum Ausdruck bringt: „Neque enim necesse est, eas hypotheses esse veras, imo ne verosimiles quidem, sed sufficit hoc unum, si calculum observationibus congruentem exhibeant“ — diese Gesetze brauchen nicht einmal wahrscheinlich zu sein, wenn sie nur die Theorie den Beobachtungen gleichen lassen. — Wenn daher auch die im nachfolgenden zu behandelnde Relativitätstheorie von uns manches Opfer fordern und uns zwingen wird, manche uns fast in Fleisch und Blut übergegangene und, ich möchte sagen, uns liebgewordene Vorstellungen aufzugeben, so müssen wir doch die Theorie annehmen, wenn wir uns davon überzeugen, daß sie zur Erklärung der Natur im obigen Sinne mehr leistet als die älteren Theorien, und bezüglich dessen, was uns heute Schwierigkeit macht, müssen wir uns damit trösten, daß vielleicht kommende Geschlechter auch in die neuen Vorstellungen hineinwachsen werden, wie wir hineingewachsen sind z. B. in die Vorstellung der unvermittelt wirkenden Newtonschen Gravitationskraft, die dem Zeitalter Newtons selber noch sehr befremdlich erschien.

Also nicht von der „Richtigkeit“ der Relativitätstheorie will ich mich im folgenden bemühen, den Leser zu überzeugen, sondern davon, daß es im Sinne der obigen Ausführungen zweckmäßig ist, sich die Vorstellungen der neuen Theorie zu eigen zu machen, und für den ersten Teil des Buches, der von der sog. „speziellen Relativitätstheorie“ handelt, kann ich dies unter Hervorhebung des Hauptpunktes sogleich noch genauer folgendermaßen formulieren: ich will zeigen, daß es zweckmäßig ist, eine gewisse gegenseitige Abhängigkeit zwischen Zeitmessungen und Raummessungen anzunehmen.

*) Wegen des Historischen vgl. C. Neumann: Über die Prinzipien der Galilei-Newtonschen Theorie, Leipzig 1870, bei Teubner, S. 24—25.

Erster Teil.

Die spezielle Relativitätstheorie.

§ 1.

Allgemeine Vorbemerkungen.

Nicht ohne Absicht habe ich eingangs gerade an den Streit um das Copernicanische Weltbild erinnert, denn die dort berührten Fragen hängen auf das Engste mit dem Relativitätsprinzip, das uns nun näher beschäftigen soll, zusammen, ja wir haben sogar in unseren obigen kurzen Ausführungen dieses Prinzip bereits in seiner einfachsten Form ausgesprochen, als wir sagten: *Bewegung ist nichts Absolutes, sondern etwas Relatives*, oder auch: *Alles, was wir an Bewegungen wahrnehmen, sind nur Lageänderungen verschiedener Körper gegeneinander.*

Nach diesem Prinzipe hat es also keinen Sinn, von einem Körper schlechtweg zu sagen, er „ruhe“ oder er „bewege sich“, sondern man kann nur von zwei Körpern sagen, der eine ruhe oder bewege sich „relativ zu dem anderen“ oder „in Bezug auf den anderen“. Welchen von beiden wir als diesen „Bezugskörper“ wählen, oder, wie man das auszudrücken pflegt, welchen wir „als ruhend ansehn“, ist ganz in unser Ermessen gestellt, es soll nichts existieren, was uns ein größeres Recht gäbe, dies mit dem einen, als mit dem anderen zu tun.

Machen wir uns diese Auffassung zu eigen, so ergibt sich daraus sofort eine Folgerung von weittragender Bedeutung: Wenn wir uns zwei gegeneinander beliebig bewegte Körper denken, so müssen *alle physikalischen Versuche, auf dem einen der Körper angestellt, genau ebenso verlaufen, als wenn wir sie auf dem anderen anstellten*, denn anderenfalls hätten wir ja in dem verschiedenen Ablauf entsprechender Versuche ein Mittel, eine Ungleichwertigkeit der Körper zu konstatieren, die ihren Grund nur in der Verschiedenheit des Bewegungszustandes haben könnte, und eine solche sollen wir ja auf keine Weise imstande sein festzustellen, sollen wir ja doch in gleicher Weise berechtigt sein, den einen wie auch den anderen als „ruhend“ anzusehn.

Wir wollen diese soeben aus dem Relativitätsprinzip gezogene Folgerung noch etwas genauer präzisieren: Wir denken uns die beiden Körper etwa als Himmelskörper und auf jedem von ihnen ein Laboratorium $\mathfrak{L}$ bzw. $\mathfrak{L}'$. Jedes dieser Laboratorien sei ausgestattet mit Meßinstrumenten, insbesondere mit Maßstäben und Uhren zur Längen-

und Zeitmessung*). Dann fordert das Relativitätsprinzip mit der obigen Begründung, daß gleiche Versuche in beiden Laboratorien angestellt, genau gleichen Verlauf nehmen, d. h. jeder der beiden Versuche, beobachtet mittels der Instrumente des betreffenden Laboratoriums, muß zahlenmäßig gleiche Ergebnisse liefern, denn sonst könnten ja eben die beiden die Versuche anstellenden Physiker, wenn sie sich nachher über ihre Versuchsergebnisse verständigten, auf einen Unterschied zwischen ihren Laboratorien schließen, was, wie oben ausgeführt wurde, dem Relativitätsprinzip zufolge nicht der Fall sein darf.

Bei derartigen Ueberlegungen ist aber wohlgemerkt stets an zwei getrennte Parallelversuche zu denken, die von zwei Physikern einzig und allein mit den Apparaten des betreffenden Laboratoriums angestellt und mit den Instrumenten desselben messend verfolgt werden. Ich will derartige Parallelversuche „reine Laboratoriumsversuche“ oder auch kurz „Laboratoriumsversuche“ nennen und spreche dann die obige Folgerung aus dem Relativitätsprinzip folgendermaßen aus: *Gleiche in verschiedenen Laboratorien parallel angestellte Laboratoriumsversuche müssen den gleichen Verlauf nehmen.*

Die Beschränkung auf reine Laboratoriumsversuche ist durchaus notwendig, denn denken wir uns z. B. von den Laboratorien auf den beiden Himmelskörpern aus einen dritten Himmelskörper beobachtet, so können wir natürlich auf Grund des Relativitätspostulates nicht verlangen, daß auch derartige Beobachtungen gleich ausfallen, denn da spielt ja die Relativbewegung der beiden Laboratorien gegeneinander hinein, und deren Feststellung schließt ja das Relativitätsprinzip keineswegs aus, und ebensowenig fordert das Relativitätsprinzip etwa, daß ein in einem der beiden Laboratorien angestellter Versuch, auch von dem anderen aus beobachtet, denselben Verlauf nimmt.

Da diese Unterscheidung zwischen Versuchen, die, getrennt voneinander, parallel in beiden Laboratorien angestellt werden und solchen Versuchen, die nur gleichzeitig von beiden Laboratorien aus beobachtet werden, für die Folge von großer Bedeutung ist, will ich auch für die letzteren eine besondere Bezeichnung einführen und sie im Gegensatz zu den ersteren, den „parallelen reinen Laboratoriumsversuchen“ als „interlaboratorielle Versuche“ bezeichnen. —

Bei den reinen Laboratoriumsversuchen, von denen unser obiger Satz ausschließlich handelt, ist, wie schon aus den obigen Betrachtungen folgt, hier aber noch besonders hervorgehoben sei, die Zuhilfenahme von irgend etwas, das außerhalb des Laboratoriums liegt, ausgeschlossen zu denken; also dürfen bei derartigen Versuchen auch nicht die Wirkungen von Kräften herangezogen werden, die ihren Sitz außerhalb des Laboratoriums haben, und deshalb müssen wir vor Allem auch von der Schwerkraft (Gravitation) und ihren Wirkungen ganz absehen**). Erst im zweiten Teile des Buches wird auch die Schwerkraft in den Bereich der Betrachtungen gezogen werden. —

Wenn so auch der Begriff des reinen Laboratoriumsversuches jetzt wohl eindeutig umschrieben ist, so enthält freilich der obige Satz

*) Nur der Einfachheit halber sehen wir im Text immer von der Messung der dritten physikalischen Fundamentalgröße, der „Masse“, ab.

**) Höchstens Gravitationswirkungen von Massen innerhalb der Laboratorien brauchten nicht ausgeschlossen zu werden. — Doch werde ich im folgenden, wenn ich kurz von Gravitationswirkungen spreche, das immer im Sinne von „äußeren Gravitationswirkungen“ tun.

„Gleiche Laboratoriumsversuche müssen gleichen Verlauf nehmen" doch noch eine Unbestimmtheit, die allerdings hier noch nicht aufgeklärt werden kann. Nämlich mit Recht wird man fragen: Wann sind denn Versuche in beiden Laboratorien als „gleich" zu betrachten? Augenscheinlich, wenn die Versuchsbedingungen (die Dimensionen der benutzten Körper, die Anordnungen usw.) gemessen mit den Instrumenten des betreffenden Laboratoriums in beiden Fällen gleich sind. Es wird also die Beantwortung der aufgeworfenen Frage wesentlich von der Wahl der Meßinstrumente in den beiden Laboratorien abhängen, und gerade bei dieser Erkenntnis setzt die Einsteinsche Relativitätstheorie ein, die wir im folgenden darstellen wollen.

Zunächst sei aber hier für die aus dem Relativitätsprinzip gezogene Folgerung bezüglich des Ablaufes paralleler Laboratoriumsversuche noch eine andere Formulierung gegeben, die auch im folgenden eine große Rolle spielt: Wenn wir mittels der Maßstäbe in jedem der beiden Laboratorien $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$ die Lage eines Punktes auf ein mit dem betreffenden Himmelskörper oder Laboratorium fest verbundenes Cartesisches Koordinatensystem (x, y, z) bzw. (x', y', z') beziehen, so wird durch jeden Naturvorgang eine gewisse Verknüpfung von Raumkoordinaten mit der Zeit t dargestellt, und diese Verknüpfung muß dann eben bei Parallelversuchen in beiden Laboratorien, die ja stets zahlenmäßig gleiche Ergebnisse liefern sollen, genau die gleiche sein. — Die Gesetze dieser Verknüpfung von Raum- mit Zeitgrößen kann man nun geradezu als die „Naturgesetze" ansprechen — natürlich nur in dem Sinne von Gesetzen unserer Bilder von der Natur (vgl. die Einleitung, S. 2) — und wir können daher z. B. im ersten Laboratorium $\mathfrak{L}$ diese Naturgesetze symbolisch durch eine Gleichung von der Form

$$\mathfrak{N}\{x, y, z, t\} = 0$$

andeuten*). Dann also müssen die Naturgesetze im zweiten Laboratorium $\mathfrak{L}'$ durch dieselben Beziehungen zwischen x', y', z' und t dargestellt werden, also in derselben Symbolik durch die Gleichung

$$\mathfrak{N}\{x', y', z', t\} = 0,$$

und diese Forderung drückt man meist kurz so aus: *Die Naturgesetze müssen sich invariant verhalten beim Uebergang von einem Bezugssystem (Laboratorium) zu einem beliebig dagegen bewegten anderen*, und man kann im Anschluß an diese neue Formulierung des Relativitätspostulats es geradezu als Aufgabe der Relativitätstheorie bezeichnen, solche beim Uebergang zu anderen Systemen invariante Naturgesetze aufzustellen.

Allerdings ist die Invarianzforderung nach der obigen Begründung wieder beschränkt auf Gesetze, nach denen „reine Laboratoriumsversuche" ablaufen, wieder sind also auch hier Gravitationswirkungen auszuschließen.

Mit diesem Umstande hängt, wie wir jetzt wissen und wie wir im zweiten Teile des Buches näher auseinandersetzen werden, auf das engste die große Vereinfachung zusammen, die es mit sich bringt, wenn man die Invarianz der Naturgesetze nicht sogleich für Uebergänge zwischen beliebig gegeneinander bewegten Systemen fordert, sondern sich zunächst überhaupt auf Betrachtung von Systemen be-

*) Man kann hierbei etwa an die Newtonschen Gleichungen der Mechanik denken oder an die Maxwellschen Gleichungen der Elektrodynamik oder dgl. — wohlgemerkt also auch an Differentialbeziehungen.

schränkt, die sich geradlinig gleichförmig ohne Drehung gegeneinander bewegen. Diese Beschränkung nahm EINSTEIN in seiner ursprünglichen Theorie an, die er selber später als die „spezielle Relativitätstheorie" bezeichnet hat, und deren Auseinandersetzung dieser erste Teil des Buches gewidmet sein soll. — Als Aufgabe der speziellen Relativitätstheorie möchte ich hiernach diese bezeichnen: *Naturgesetze zu ermitteln, welche sich invariant verhalten beim Uebergange von einem Bezugssystem zu beliebigen, gegen dieses geradlinig gleichförmig bewegten Systemen.*

Doch ehe ich daran gehe, die Theorie näher auseinanderzusetzen, welche EINSTEIN zur Lösung dieser Aufgabe ersonnen hat, mögen noch die Auffassungen näher erörtert werden, die vordem unseren physikalischen Theorien zugrunde lagen, und daher den Ausgangspunkt für unsere Betrachtungen bilden müssen, und da liegt es denn in der Natur der Sache, daß wir mit einem kurzen Rückblicke auf dasjenige Gebiet der theoretischen Physik beginnen, das am weitesten entwickelt ist, und in dem daher diese grundlegenden Auffassungen und Vorstellungen am deutlichsten zutage treten: — ich denke dabei natürlich an die Mechanik.

§ 2.

Rückblick auf die klassische Mechanik.

Dieser Paragraph soll, wie schon gesagt wurde, die bisher in der Physik üblichen Vorstellungen klarlegen; ich stelle mich in ihm vollständig auf den Boden der älteren vorrelativistischen Physik, und die kurze Analyse der Grundlagen der Mechanik soll lediglich dem Zwecke dienen, die Aufmerksamkeit auf die für uns weiterhin wichtigsten Gesichtspunkte zu lenken. Auch sollen an Beispielen aus der Mechanik, wo die Dinge verhältnismäßig einfach zu übersehen sind, die Gedankengänge des vorigen Paragraphen näher erläutert werden.

An die Spitze der theoretischen Mechanik stellt man seit NEWTON das GALILEIsche Trägheitsgesetz (NEWTONS lex prima). Es ist dies eines jener Fundamentalgesetze, von denen in der Einleitung die Rede war, die wir nicht weiter beweisen können, und die wir daher ebensogut als „Hypothesen" bezeichnen dürfen. Wir verdanken sie glücklichen Inspirationen der großen Pfadfinder auf naturwissenschaftlichem Gebiete, und ihre Rechtfertigung finden sie, wie oben näher ausgeführt wurde, in der Uebereinstimmung der aus ihnen gezogenen Folgerungen mit der Erfahrung. — Wenn wir dieses Kriterium nun auf das Trägheitsgesetz anwenden, so müssen wir das Gesetz als ausgezeichnet bewährt bezeichnen, denn der stolze auf ihm (und noch einigen weiteren solchen Grundgesetzen) errichtete Bau der klassischen Mechanik weist tatsächlich mit der Natur die weitestgehende Uebereinstimmung auf. Und doch hat es mit dem Gesetze eine eigene Bewandtnis, und es verlohnt schon der Mühe, etwas länger bei ihm zu verweilen.

Man spricht das Trägheitsgesetz in der Regel folgendermaßen aus: „Ein Massenpunkt, auf den keine Kräfte wirken, verharrt in Ruhe oder bewegt sich geradlinig gleichförmig fort." — Wir wollen uns nun die Frage vorlegen, ob der Satz in dieser Gestalt ein Naturgesetz von der üblichen Art darstellt. Ein solches setzt zwei an sich wohldefinierte

Tatsachen (Voraussetzung und Folgerung) in eine genau umschriebene Beziehung zueinander. Trifft das nun bei dem Trägheitsgesetz in obiger Fassung zu? Keineswegs! Denn, wenn wir es, wie wir doch tun wollen, an die Spitze der Mechanik stellen, ist zunächst die Voraussetzung: „wenn keine Kräfte auf den Massenpunkt wirken" völlig unverständlich, wissen wir doch noch gar nicht, was „Kräfte" sind, und ebensowenig ist auch die Aussage des Nachsatzes: „er verharrt in Ruhe oder bewegt sich geradlinig gleichförmig fort" ohne nähere Erklärung zu verstehen, denn ein Massenpunkt, der, z. B. von der Erde aus betrachtet, ruht, wird einem Beobachter auf der Sonne oder dem Mond bewegt erscheinen, und eine Bahn, die von der Erde aus geradlinig erscheint, wird einem solchen Beobachter auf einem anderen Himmelskörper gekrümmt erscheinen.

Knüpfen wir bei unserer Analyse des Trägheitsgesetzes sogleich an den letzten Punkt an, so können wir sagen: Von einer „geradlinigen Bahn" zu sprechen hat immer erst einen Sinn, wenn ein Bezugskörper oder ein Koordinatensystem angegeben wird, von dem aus die Bahn „geradlinig" erscheint. Wenn man daher, wie es im Trägheitsgesetz geschieht, von „geradlinig" schlechtweg spricht, so schwebt einem dabei notwendig ein bestimmtes ausgezeichnetes Koordinatensystem oder ein ausgezeichneter Bezugskörper vor. Um diese Tatsache recht deutlich zum Ausdruck zu bringen, fingierte C. Neumann die Existenz eines gewissen Grundkörpers, seines „Körpers Alpha", der gleichsam der ruhende Pol in der Welt wäre, in bezug auf den alle Bewegungen zu verstehen wären. — Ohne die Annahme eines solchen bestimmten Bezugskörpers oder Bezugssystems ist das Trägheitsgesetz und mit ihm die ganze auf ihm sich aufbauende Mechanik unverständlich. So lehrt uns denn schon das Trägheitsgesetz das erste Postulat der klassischen Mechanik kennen:

Erstes Postulat. — *Die klassische Mechanik fordert die Annahme eines ausgezeichneten Bezugssystems. — Wenn in ihm die Sätze der Mechanik richtig sind, können sie es nicht gleichzeitig auch in beliebigen anderen Systemen sein.*

Gleichgültig ob man dieses „*Galileische Grundsystem*", wie wir es meist nennen werden, bestimmen, d. h. etwa durch astronomische Messungen im Weltenraume festlegen kann — der logische Aufbau der Mechanik zwingt uns, ein solches ausgezeichnetes Bezugssystem anzunehmen*). Auf dieses System bezieht man alle Bewegungen in der Mechanik, und weil dieses Grundsystem eben etwas ganz bestimmtes, ausgezeichnetes, oder, wie man dafür sagt, „absolutes" ist, so ist in der klassischen Mechanik auch „Ruhe", d. h. Ruhe in bezug auf dieses System und „Bewegung", d. i. Bewegung in bezug auf dieses System, in diesem Sinne etwas „Absolutes", etwas ganz Bestimmtes, und *die klassische Mechanik widerspricht daher dem oben aufgestellten allgemeinen Relativitätsprinzip.*

Dieses ausgezeichnete Galileische Koordinatensystem, auf dessen Annahme sich die ganze klassische Mechanik aufbaut, ist begrifflich identisch mit Newtons „absolutem Raume", den Newton selbst als

*) Offen bleibt allerdings einstweilen noch die Frage, ob es nicht mehrere Systeme gibt, die uns die gleichen Dienste leisten. Das soll uns aber nicht hindern, vorläufig immer nur von einem solchen Systeme zu sprechen [vgl. unten die Anmerkung S. 19].

eine seiner Mechanik zugrundeliegende Vorstellung hervorhebt*), und auch NEWTON weist bereits darauf hin, daß man zu diesem Begriffe erst durch eine gewisse Abstraktion kommt, indem es keinen physischen Körper zu geben braucht, der in diesem „absoluten Raume" ruht, und der daher, wie wir sagen werden, als Träger des absoluten GALILEIschen Koordinatensystems in Betracht käme.

Wie wir zu der Vorstellung vom „absoluten Raume" oder der Annahme des „absoluten GALILEIschen Bezugssystems" lediglich durch unser Bemühen gedrängt wurden, den Sinn des Wörtchens „geradlinig" im Trägheitsgesetz klarzustellen, so führt auf eine weitere Grundannahme der klassischen Mechanik und damit auch unserer anderen älteren physikalischen Theorien die entsprechende Analyse des Wörtchens „gleichförmig". Wir bezeichnen, dem allgemeinen Sprachgebrauche folgend, als gleichförmig eine solche Bewegung, bei der der betreffende Massenpunkt „in gleichen Zeiten gleiche Wege" zurücklegt. Was hier unter „gleichen Wegen" zu verstehen ist, darüber kann ja ein Zweifel wohl nicht bestehen, da wir Längen mit Hilfe von Maßstäben in bekannter Weise durch Aneinanderlegen gemessen denken. Hingegen ist nicht von vornherein klar, was unter „gleichen Zeiten" zu verstehen ist, und wir müssen daher, um das Wort „gleichförmig" mit einem bestimmten Sinne zu erfüllen, uns eine ganz bestimmte Uhr gegeben denken, auf deren Angaben sich die Aussage von „gleichen Zeiten" bezieht. Die Annahme einer solchen ausgezeichneten Uhr, oder, etwas abstrakter ausgedrückt, einer ausgezeichneten, absoluten Zeitmessung**) ist zum Verständnis des Trägheitsgesetzes ebenso erforderlich wie die Vorstellung des GALILEIschen absoluten räumlichen Bezugssystems; denn gilt das Trägheitsgesetz bei Messung der Zeiten nach einer Uhr, so gilt es sicher nicht, wenn wir mittels irgendwelcher anderer Uhren messen, deren Angaben denen der ersteren bald vorauseilen, bald hinter ihnen zurückbleiben.

Mit dieser ausgezeichneten der Mechanik zugrundezulegenden Zeitmessung verbinden wir nun seit jeher die Vorstellung, daß sie überall gültig, daß sie von universellem Charakter sei, d. h. daß gleichsam eine Normaluhr die Zeit für das ganze Weltall angäbe***), und so sprechen wir das zweite Postulat der klassischen Mechanik, das uns das Trägheitsgesetz kennen gelehrt hat, folgendermaßen aus:

Zweites Postulat. — *Die klassische Mechanik fordert die Annahme einer absoluten, universellen Zeitmessung, gleichsam einer überall gültigen Normaluhr. — Wir werden in diesem Sinne von der „NEWTONschen Normaluhr" sprechen.*

---

*) An die Stelle der „Bewegung im absoluten Raume" bei NEWTON tritt eben in unserer Bezeichnungsweise die Bewegung gegen das (im absoluten Raume ruhend gedachte) GALILEIsche Grundsystem. — Unsere Ausdrucksweise ist also nur etwas konkreter, indem sie den absoluten Raum repräsentiert annimmt durch ein etwa körperlich als Drahtmodell zu denkendes Axenkreuz (C. NEUMANNS „Körper Alpha"); — freilich hat das, rein äußerlich betrachtet, den Nachteil, daß zur Definition der absoluten Bewegung eine Relativbewegung (eben „gegen" dieses Axenkreuz) benutzt wird, was aber natürlich am Sachverhalte nichts ändert.

**) Bei „Uhren" brauchen wir im folgenden nicht an irgendwelche kunstvolle mechanische Werke zu denken, sondern jeder Vorgang, der Zeitunterschiede festzustellen gestattet, kann eine „Uhr" ersetzen. Daher werden wir die Ausdrücke „Uhr" und „Art der Zeitmessung" im folgenden häufig als gleichbedeutend nebeneinander gebrauchen.

***) Von dieser Auffassung haben wir schon oben S. 6 Gebrauch gemacht, als wir in unseren beiden Laboratorien $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$ dieselbe Zeit t benutzten.

In der Praxis, des täglichen Lebens sowohl, wie in der wissenschaftlichen, benutzen wir eine Zeitrechnung, die sich auf die Sekunde als Zeiteinheit gründet, wir benutzen also gleichsam als die die „Zeit" definierende Normaluhr die Erde in ihrer Umdrehung um ihre Achse; denn die Sekunde ist definiert als die Zeit für den 86164sten Teil einer Vollumdrehung der Erde gegen den Fixsternhimmel. Es sei aber darauf hingewiesen, daß wir uns trotz dieser Jahrhunderte langen Praxis noch durchaus nicht daran gewöhnt haben, das so definierte Zeitmaß nun auch als letzte Grundlage für jedes Urteil über Zeiten zu wählen, und daß sich diese Zeit also keineswegs mit der in unserem Gefühle fest verankerten Vorstellung von der absoluten Zeit deckt. Denn wir alle glauben mit Sätzen wie: „Die Umdrehungszeit der Erde wird allmählich größer" einen bestimmten Sinn zu verbinden, und geben damit zu, daß uns ein von jener Zeitdefinition durch die Sekunde unabhängiger Zeitbegriff vorschwebt, denn solange wir an der obigen Definition von Zeiten durch die Umdrehung der Erde festhalten, müssen wir deren Umdrehungsdauer stets als gleich groß bezeichnen, nämlich eben gleich 86164 Zeiteinheiten; also wird dann tatsächlich ein solcher Satz völlig sinnlos.

Newton selbst gibt in den „Prinzipien" seiner Auffassung über die absolute Zeit folgendermaßen Ausdruck: „Die absolute, wahre und mathematische Zeit verfließt an sich und vermöge ihrer Natur gleichförmig und ohne Beziehung auf irgendeinen äußeren Gegenstand." Mit diesen Worten deutet Newton wohl auch schon auf die Annahme hin, auf die sich unsere Vorstellung von der absoluten Zeit wesentlich gründet, daß nämlich die Zeit homogen sei. Darunter wollen wir die Annahme verstehen, daß kein Zeitpunkt vor einem anderen physikalisch bevorzugt ist, oder daß gleiche, am selben Orte angestellte Versuche zu verschiedenen Zeiten stets gleich ablaufen.

Auf Grund dieser Annahme sind wir imstande, „gleiche Zeiten" immer wieder zu reproduzieren und damit gleichsam die Newtonsche Normaluhr herzustellen. Wir brauchen nur ein und denselben Versuch immer zu wiederholen, z. B. einen Körper (materiellen Punkt) durch eine gespannte Feder in Bewegung zu setzen. Geschieht das, wenn eine zunächst beliebige Uhr z. B. die Zeit t_0 zeigt, und gibt sie die Zeit $t_1 = t_0 + \tau$ an, wenn jenes Mobil eine bestimmte Stelle (eine Marke) erreicht, so wird bei Wiederholung dieses Versuches mit gleich weit gespannter Feder und unter auch sonst genau gleichen Bedingungen immer wieder dieselbe Zeit τ verflossen sein, bis jene Marke erreicht wird, und wenn wir daher den Versuch in ununterbrochener Aufeinanderfolge wiederholt denken, so muß nach der obigen Vorstellung von der Homogenität der Zeit, die Uhr, wenn sie richtig geht, beim Erreichen der Marke die Zeiten

$$t_0 + \tau, \qquad t_0 + 2\tau, \qquad t_0 + 3\tau, \ldots$$

anzeigen, und, wenn sie das nicht tut, so können wir sie in diesen Augenblicken auf diese Zeiten stellen, also die Uhr regulieren. Da nun τ beliebig klein angenommen werden darf, so wäre die Uhr schließlich fortlaufend reguliert, und so gleichsam die Newtonsche Normaluhr *hergestellt.* — Willkürlich bleibt außer der „Anfangsstellung" (t_0), die ja infolge der Homogenität der Zeit ohne Einfluß auf den Verlauf der Versuche ist, und daher auch aus Versuchen niemals ermittelt werden kann, auch noch die „Ganggeschwindigkeit"

der Uhr, oder, was auf dasselbe hinausläuft, die Wahl der Zeiteinheit. Sie hängt noch von dem Zahlenwerte von τ in obiger Versuchsreihe ab, also von einer Angabe unserer ursprünglich unregulierten Uhr.

Doch es handelt sich hier für uns zunächst weniger darum, anzugeben, wie man die Newtonsche absolute Zeit feststellen und messen kann, sondern es kommt hier in diesem Zusammenhange vor allem darauf an, daß wir uns klar darüber werden, daß eben die klassische Mechanik überhaupt eine ausgezeichnete Zeitrechnung voraussetzt, und daß die Angaben der Mechanik nur richtig sein können, wenn man sie auf eine solche ausgezeichnete Uhr bezieht, die wir eben die „Newtonsche Normaluhr" nennen. —

Nunmehr nehmen wir die Analyse des Trägheitsgesetzes wieder auf: Wenn wir uns also diese Begriffe vom absoluten Raume und der absoluten Zeit, oder, konkreter gesprochen, von dem ausgezeichneten Galileischen Koordinatensystem und der Newtonschen Normaluhr zu eigen machen, so enthält jetzt allerdings der Nachsatz: „Der Massenpunkt ruht oder er bewegt sich geradlinig gleichförmig" eine wohldefinierte Aussage, denn „geradlinig" heißt jetzt geradlinig von jenem Systeme aus, und „gleichförmig" heißt: gleichförmig bei Messung der Zeiten mittels der Normaluhr. — Gleichwohl ist damit das Trägheitsgesetz als Ganzes durchaus noch nicht klar, denn der Vordersatz: „wenn keine Kräfte auf den Massenpunkt wirken" ist nach wie vor unverständlich, das Gesetz verknüpft also nicht zwei zuvor wohldefinierte Tatsachen miteinander wie andere Naturgesetze, sondern wir können es, wenn es uns überhaupt etwas Brauchbares liefern soll, nur dazu benutzen, umgekehrt gerade die eine dieser Tatsachen zu definieren, also den letzten noch nicht festgelegten Begriff der Kraft aus ihm zu bestimmen*). Wir sehen uns demgemäß veranlaßt, die übliche Formulierung des Gesetzes etwa durch folgende zu ersetzen: *Wenn ein Massenpunkt ruht oder sich geradlinig gleichförmig bewegt, sagt man, es wirkten keine Kräfte auf ihn.*

Erst so wird das Trägheitsgesetz zu einem brauchbaren Grundgesetz der Mechanik, zu einem Eckstein in dem Fundamente, auf dem sich das Gebäude der theoretischen Mechanik erhebt, es gibt uns die erste Definition von „Kräften", indem es aussagt, daß Kräfte nur vorhanden sind, wenn eine Abweichung einer Bewegung von der geradlinig gleichförmigen vorliegt. Also durch Beobachtung von Bewegungen lehrt das Trägheitsgesetz auf „Kräfte" zu schließen.

Das Wesen des Gesetzes, seine Natur als etwas Hypothetisches, letzten Endes Willkürliches, sich nur durch Zweckmäßigkeit Empfehlendes, tritt vielleicht noch deutlicher hervor, wenn wir seinen Inhalt folgendermaßen charakterisieren: es sagt aus, daß es zweckmäßig ist, die *Ursache der Abweichung von einer gewissen Normalbewegung*, eben

*) C. Neumann geht unter Beibehaltung des Grundgedankens im einzelnen anders (man könnte fast sagen: umgekehrt) vor: er setzt zunächst, wie das auch oben geschehen ist, das absolute räumliche Bezugssystem (seinen Körper Alpha) voraus, daneben aber dann den Begriff des „sich selbst überlassenen materiellen Punktes" oder des „materiellen Punktes, auf welchem keinerlei Einwirkung stattfindet", und benutzt dann das Trägheitsgesetz dazu, „gleiche Zeiten" zu definieren als die Zeiten, in denen ein solcher Punkt gleiche Wegabschnitte zurücklegt. Vgl. die auf S. 3 zitierte Schrift von 1870, daselbst S. 18, aber auch spätere Arbeiten in den Berichten der Kgl. Sächs. Gesellsch. d. Wiss. zu Leipzig, z. B. Bd. 39 (1887) S. 157—158 und Bd. 62 (1910) S. 69—70.

der geradlinig gleichförmigen, als selbständigen Begriff (Kraft) einzuführen, und gerade in der Erkenntnis, daß eben dieses Vorgehen zweckmäßiger ist, als etwa die Ursache der Bewegung selber (als Kraft) einzuführen, möchte ich die Großtat Galileis erblicken, die in der Aufstellung dieses Gesetzes liegt.

So definieren wir also die Kraft zunächst rein qualitativ als Ursache einer Abweichung von der geradlinig gleichförmigen Bewegung. Eine solche Abweichung konstatieren wir aber durch Beobachtung von Null verschiedener Werte der Beschleunigungen $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$. — Wenn wir daher die Definition der Kraft nach der quantitativen Seite ausgestalten und also festsetzen wollen, wie Kräfte zu messen sind, so liegt es am nächsten, sie auch direkt durch eben diese Beschleunigungen $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$ zu messen, deren Auftreten die Abweichung von der geradlinig gleichförmigen Bewegung verriet. Doch weil man dann z. B. einer gleich weit gespannten Spiralfeder verschiedene Kräfte zuschreiben müßte, je nach dem Körper (Massenpunkt), den sie in Bewegung setzt, hat man es als zweckmäßig erkannt, den Beschleunigungen noch einen dem Körper (Massenpunkte) eigentümlichen Faktor m (seine „Masse") hinzuzufügen*), und so definiert man denn als die bei einer beobachteten Bewegung vorhandenen Kräfte X, Y, Z die Produkte der Masse mit den Beschleunigungen (Newtons lex secunda):

$$1) \qquad X = m\frac{d^2x}{dt^2}, \qquad Y = m\frac{d^2y}{dt^2}, \qquad Z = m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Man trennt in dieser Weise die zweierlei Abhängigkeit der bei einem Bewegungsversuche resultierenden Beschleunigungen, einmal von den äußeren Versuchsbedingungen, sodann vom Versuchskörper selber, voneinander, denn man bildet sich die Vorstellung, daß die „Masse" eben etwas dem Körper allein Charakteristisches, hingegen die „Kräfte" etwas den äußeren Versuchsbedingungen Inhärentes seien; denn, wenn wir auch, wie oben ausgeführt wurde, erst durch Beobachtung von Bewegungen Kräfte feststellen, so schreiben wir ihnen doch eine selbständige, objektive, von der Bewegung, aus der wir sie erschlossen, unabhängige Existenz zu. Anderenfalls hätte ja die Hauptaufgabe der analytischen Mechanik, wie sie meist ausgesprochen wird: eine Bewegung bei gegebenen Kräften zu bestimmen, gar keinen Sinn. Wir nehmen eben, wie gesagt, an, daß *in den „Kräften" die äußeren Versuchsbedingungen ihren Ausdruck finden***), daß also allemale, wenn diese

*) Man erhebt dabei den durch die Erfahrung in weitgehender Weise bestätigten Satz, daß die Beschleunigungen, welche verschiedene Körper unter gleichen äußeren Versuchsbedingungen (z. B. eben durch gleich weit gespannte Federn) erhalten, in einem nur von den Körpern abhängigen Verhältnis zueinander stehen, zu einem absoluten Prinzip. — Näher auf die Einführung des Massenbegriffs einzugehen, habe ich an dieser Stelle keine Veranlassung.

**) Wenn wir ausdrücklich immer von den „äußeren" Versuchsbedingungen sprechen, so wollen wir durch diesen Zusatz noch besonders hervorheben, daß darunter nichts begriffen ist, was sich auf den Massenpunkt selbst bezieht, so daß also die Kräfte auch von seinem Bewegungszustande (seinen Geschwindigkeiten) unabhängig sind. — Wir sehen daher X, Y, Z lediglich als Funktionen der Koordinaten x, y, z (und evtl. der Zeit t) an, wie ja auch z. B. die Spannung einer Feder durch die Elongation ihres Endpunktes, also als reine Ortsfunktion, bestimmt ist.

die gleichen sind, auch die Kräfte dieselben sind. Denken wir uns also einmal durch Beobachtung einer Bewegung eines Körpers nach den Gleichungen (1) Kräfte X, Y, Z ermittelt, dann werden nach dieser Auffassung unter den gleichen äußeren Umständen auch auf einen anderen in beliebiger Bewegung begriffenen Körper dieselben Kräfte wirken, und dann können wir natürlich diese selben Gleichungen jetzt im zweiten Falle dazu benutzen, umgekehrt bei gegebenen Kräften X, Y, Z die eintretende Bewegung (d. h. x, y, z als Funktionen der Zeit) zu bestimmen. — So erklärt sich die Doppelnatur der Gleichungen (1) einmal als Definitionsgleichungen für die Kräfte und gleichzeitig als Grundgleichungen der Mechanik zur Bestimmung von Bewegungen bei gegebenen Kräften.

Satz I (Definition der Kräfte im Galileischen Grundsystem; Newtonsche Grundgleichungen). — *Erfolgt die Bewegung eines Massenpunktes nicht geradlinig gleichförmig in bezug auf das Galileische Grundsystem* (x, y, z) *und die Newtonsche Normaluhr* (t), *d. h. sind nicht alle 3 Beschleunigungen* $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$ *gleichzeitig gleich* 0, *so sagt man dem Galileischen Trägheitsgesetz entsprechend, es wirkten „Kräfte" auf den Massenpunkt, und zwar spezieller, es wirkten 3 „den Axen des Grundsystems entsprechende Kräfte* X, Y, Z", *deren Größe man mißt durch die Produkte jener 3 Beschleunigungen im Grundsystem mit einem nur vom Massenpunkte abhängigen Faktor (der „Masse" desselben), so daß also:*

$$(1) \qquad X = m\frac{d^2x}{dt^2}, \qquad Y = m\frac{d^2y}{dt^2}, \qquad Z = m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Diese „Newtonschen Grundgleichungen der Mechanik" definieren also die Kräfte mit Hilfe von Bewegungsgrößen und dienen anderseits, wenn die Kräfte etwa durch Vorversuche festgestellt sind, dazu, bei gegebenen Kräften die Bewegung zu bestimmen.

Damit haben wir für die Kräfte, diese Repräsentanten der äußeren Versuchsbedingungen, bestimmte Ausdrücke ermittelt, aber doch immer erst unter Zugrundelegung des Galileischen Grundsystems — wir nannten daher X, Y, Z auch ausdrücklich „die den Axen des Grundsystems entsprechenden Kräfte". — Es entsteht nun die weitere Frage, wie wir dieselben Versuchsbedingungen (Kräfte) von einem anderen Systeme aus zweckmäßig charakterisieren werden. So werden wir zur Definition von „den Kräften X, Y, Z *äquivalenten Kräften* in anderen Systemen" gelangen, und zwar wollen wir diese neuen Definitionen so einzurichten suchen, daß die Newtonschen Grundgleichungen möglichst auch in den neuen Systemen in derselben Form gültig bleiben (Forderung der Invarianz für die Newtonschen Grundgleichungen).

Wir beginnen mit der Betrachtung eines mit dem Galileischen Systeme (x, y, z) starr verbundenen („ruhenden") Systems (ξ, η, ζ), das diesem gegenüber nur eine Parallelverschiebung erfahren hat, so daß zwischen den Koordinaten desselben Punktes in beiden Systemen stets die Beziehungen bestehen:

$$2\,a) \qquad \xi = x + a, \qquad \eta = y + b, \qquad \zeta = z + c,$$

wo a, b, c Konstanten sind. — Betrachten wir dann dieselbe Bewegung eines Massenpunktes, die uns bei der Definition der Kräfte X, Y, Z

durch die Gleichungen (1) vorschwebte (also dieselben Versuchsbedingungen), vom ξ, η, ζ-Systeme aus, so daß also die endlichen Bewegungsgleichungen jetzt lauten:

$$\xi(t) = x(t) + a, \qquad \eta(t) = y(t) + b, \qquad \zeta(t) = z(t) + c$$

und daher $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2\xi}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2\eta}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2\zeta}{dt^2}$ ist, so können wir für (1) auch schreiben:

$$X = m\frac{d^2\xi}{dt^2}, \qquad Y = m\frac{d^2\eta}{dt^2}, \qquad Z = m\frac{d^2\zeta}{dt^2}.$$

Führen wir also jetzt, um die vorliegenden Versuchsbedingungen auch vom System (ξ, η, ζ) aus zu charakterisieren, wieder „Kräfte" ein (Ξ, H, Z), also die zu X, Y, Z äquivalenten Kräfte im System (ξ, η, ζ), so können wir diese jetzt leicht so bestimmen, daß in dem neuen Systeme den Gleichungen (1) völlig analoge Gleichungen gelten, wir brauchen augenscheinlich nur

3a) $$\Xi = X, \qquad H = Y, \qquad Z = Z$$

zu setzen und können daher sagen: *Die* Newtonschen *Grundgleichungen* (1) *bleiben invariant beim Uebergange zu einem parallel gegen das* Galileische *Grundsystem verschobenen Koordinatensystem, falls wir die äquivalenten Kräfte in bezug auf das neue System immer denen im Grundsysteme gleich setzen.*

Aehnlich fassen wir jetzt ein neues rechtwinkliges Koordinatensystem ξ, η, ζ ins Auge, das immer noch ruhe, d. h. mit dem Grundsystem starr verbunden sei, gegen dasselbe aber außer einer evtl. Verschiebung auch noch eine Drehung erfahren hat, sodaß zwischen den Koordinaten gleicher Punkte in beiden Systemen die Beziehungen bestehen:

2b) $$\begin{aligned} \xi &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + a \\ \eta &= \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z + b \\ \zeta &= \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z + c, \end{aligned}$$

mit konstanten Koeffizienten, zwischen denen nur die 6 bekannten Relationen (Orthogonalitätsbedingungen) bestehen:

2b′) $$\alpha_i\alpha_k + \beta_i\beta_k + \gamma_i\gamma_k = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq k \\ 1 & \text{„ } i = k \end{cases} \qquad (i, k = 1, 2, 3).$$

Dann folgt also

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \alpha_1\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha_2\frac{d^2y}{dt^2} + \alpha_3\frac{d^2z}{dt^2}, \qquad \frac{d^2\eta}{dt^2} \text{ und } \frac{d^2\zeta}{dt^2} \text{ entsprechend}$$

und daher

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2} = \alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z, \qquad m\frac{d^2\eta}{dt^2} \text{ und } m\frac{d^2\zeta}{dt^2} \text{ entsprechend}$$

und wir brauchen also jetzt die bei der betrachteten Bewegung wirkenden Kräfte in bezug auf das ξ, η, ζ-System, also die zu X, Y, Z „äquivalenten" Kräfte, wie wir sie oben nannten, nur folgendermaßen anzusetzen:

$$\begin{aligned} \Xi &= \alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z \\ H &= \beta_1 X + \beta_2 Y + \beta_3 Z \\ Z &= \gamma_1 X + \gamma_2 Y + \gamma_3 Z, \end{aligned} \tag{3b}$$

um wieder im neuen Systeme den Gleichungen (1) im Grundsystem völlig analoge Gleichungen zu erhalten:

$$\Xi = m\frac{d^2\xi}{dt^2}, \qquad H = m\frac{d^2\eta}{dt^2}, \qquad Z = m\frac{d^2\zeta}{dt^2}.$$

Wenn wir also die Koordinaten gemäß den Gleichungen (2b) transformieren, müssen wir gleichzeitig, um Invarianz der NEWTONschen Gleichungen (1) gegenüber der entsprechenden Aenderung des Koordinatensystems zu erhalten, die äquivalenten Kräfte durch Transformation in Gemäßheit der Gleichungen (3b) definiert denken. — Wenn wir uns, wie üblich, jede Aenderung des Koordinatensystems in eine Drehung und eine Verschiebung, und entsprechend die allgemeine Koordinatentransformation (2b) in eine homogene und eine inhomogene Transformation aufgelöst denken, so kann man dieses Resultat auch so ausdrücken: *Damit die NEWTONschen Grundgleichungen invariant bleiben beim Uebergang zu neuen ruhenden Systemen, muß man die Kräfte nur der homogenen Koordinatentransformation unterwerfen* — oder noch anders ausgedrückt: Aequivalente Kräfte transformieren sich nicht etwa ebenso wie die Koordinaten selber, sondern wie Koordinatendifferenzen, denn die Differenzen der Koordinaten zweier Punkte P_0 und P_1 erfahren beim Uebergang zu einem neuen Systeme nur die entsprechende homogene Transformation, ist doch nach (2b) tatsächlich:

$$\xi_1 - \xi_0 = \alpha_1 (x_1 - x_0) + \alpha_2 (y_1 - y_0) + \alpha_3 (z_1 - z_0),$$
$$\eta_1 - \eta_0 \text{ und } \zeta_1 - \zeta_0 \text{ entsprechend.}$$

Zur Vereinfachung der Ausdrucksweise wollen wir jetzt noch die folgende allgemeine Definition aufstellen:

Definition. — *Von 3 mit Bezug auf 3 Koordinatenachsen definierten Größen (wie hier X, Y, Z), die sich beim Uebergang zu einem anderen Achsensystem wie Relativkoordinaten (Koordinatendifferenzen) zweier Punkte (also linear und homogen) transformieren, sagen wir, sie besäßen Vektorcharakter.*

Für solche Größen mit Vektorcharakter gilt stets eine sehr einfache geometrische Veranschaulichung: Wir betrachten 2 im übrigen beliebige Punkte, deren Koordinatendifferenzen in einem beliebigen Systeme gerade gleich den diesem Systeme entsprechenden Werten der 3 Größen sind, — dann stellen die Koordinatendifferenzen derselben Punkte in einem beliebigen anderen Systeme die diesem neuen Systeme entsprechenden Werte dar. Da wir aber die Koordinatendifferenzen zweier Punkte in jedem rechtwinkligen System ansehen können als die Projektionen der Verbindungslinie dieser Punkte auf die Achsen, können wir dafür auch sagen:

Zusatz I. — *Größen mit Vektorcharakter kann man stets darstellen als Projektionen einer Strecke von bestimmter Länge und Richtung auf die jeweilig betrachteten Achsen.*

Es sei noch ausdrücklich bemerkt, daß die Lage dieser Strecke im Raume im übrigen beliebig ist, denn von jenen beiden Punkten, die sie verband, konnten wir den einen ja völlig willkürlich annehmen.

Beachten wir noch, daß sich das Quadrat der Entfernung dieser beiden Punkte durch die Projektionen auf die Achsen beliebiger Systeme immer formal gleich ausdrückt (nämlich als ihre Quadratsumme), so ergibt sich sogleich folgender weiterer

Zusatz 2. — *Besitzen 3 Größen Vektorcharakter, so bleibt ihre Quadratsumme beim Uebergang zu anderen Systemen ungeändert.*

Danach folgt in unserem Falle:

$$4) \qquad \Xi^2 + H^2 + Z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2. \; —$$

Bedienen wir uns jetzt der hier eingeführten Bezeichnungsweise, so können wir unser obiges Resultat bezüglich der Kräfte schließlich folgendermaßen aussprechen:

Satz 2 (Definition äquivalenter Kräfte für beliebige ruhende Systeme). — *Damit die* Newtonschen *Grundgleichungen der Mechanik*

$$(1) \qquad X = m\frac{d^2x}{dt^2}, \qquad Y = m\frac{d^2y}{dt^2}, \qquad Z = m\frac{d^2z}{dt^2}$$

*invariant bleiben**) *beim Uebergange zu allen ruhenden, d. h. mit dem* Galileischen *Grundsysteme starr verbundenen Systemen, und alle solche festen Systeme daher als gleichberechtigt anzusehen sind, legt man den Kräften X, Y, Z im Grundsystem Vektorcharakter bei und dehnt in dieser Weise die urspünglich nur für das Grundsystem gegebene Definition von Kräften auf beliebige solche Systeme aus***).

Wie alle Größen mit Vektorcharakter kann man dann auch äquivalente Kräfte in beliebigen ruhenden Systemen deuten als die Projektionen einer Strecke von bestimmter Länge und Richtung (Zusatz 1) und somit äquivalente Kräfte in allen solchen Systemen gleichzeitig durch das Bild einer bestimmten solchen Linie darstellen. Faßt man nun speziell ein solches Bezugssystem ins Auge, dessen eine Achse dieser Linie parallel läuft, so sind von den äquivalenten 3 diesem Achsensystem entsprechenden Kräften zwei gleich 0, während die Größe K der dritten durch die Länge jener Linie dargestellt wird. So kommen wir denn durch Spezialisierung des Koordinatensystems zu dem Resultate, daß man die Ursache der Abweichung einer Bewegung von der geradlinig-gleichförmigen, die wir bisher immer in 3 Kräften erblickten, stets auch sehen kann in einer einzigen Kraft, aus deren geometrischem Bilde wir jene 3 Kräfte in einem beliebigen ruhenden System durch

---

*) Unsere frühere Forderung nach der „Invarianz der Naturgesetze" bezog sich immer auf die Gesetze, nach denen „reine Laboratoriumsversuche" ablaufen [vgl. S. 5]. Es könnten nun Zweifel entstehen, ob dieser Invarianzforderung in unserem Falle wirklich Genüge geschieht, da bei unseren letzten Betrachtungen immer ein „interlaboratorieller Versuch" im Vordergrunde stand; es wurden ja immer nur die Bedingungen, unter denen ein und derselbe Versuch abläuft, von verschiedenen Systemen aus durch „Kräfte" charakterisiert („äquivalente" Kräfte). — Doch da wir über den Sitz der Kräfte, darüber, ob sie mit den Instrumenten (z. B. Federn) in dem einen oder dem anderen von zwei betrachteten Laboratorien (Systemen) erzeugt werden, gar nichts vorausgesetzt haben, vielmehr die Newtonschen Grundgleichungen allgemein gelten sollen, so können wir auch jedesmal die Kräfte erzeugt denken in dem System, das wir gerade zugrunde legen, und damit in den Newtonschen Grundgleichungen auch den Ausdruck der Naturgesetze erblicken, nach denen „reine Laboratoriumsversuche" ablaufen.

**) Wenn man weiß, daß bei dieser Definition äquivalenter Kräfte die Newtonschen Gleichungen (1) in beliebigen ruhenden Systemen gültig sind, so kann man natürlich jetzt auch diese Gleichungen selber zur Definition der Kräfte X, Y, Z in solchen allgemeineren Systemen benutzen. So liefert die Beobachtung einer Bewegung von jedem solchen Systeme aus immer 3 Kräfte.

Projektion auf die betreffenden Achsen erhält. — Wir sprechen das so aus:

Zusatz 1. — *Der Vektorcharakter der Kräfte X, Y, Z führt dazu, sie als „Komponenten" einer einzigen Kraft K anzusehen.*

Man sagt dann wohl auch „die Kraft K sei ein Vektor, und X, Y, Z seien die Komponenten dieses Vektors", oder auch kürzer, „die Größen X, Y, Z stellten einen Vektor dar", oder sie „bildeten einen Vektor" — aber welcher dieser Ausdrucksweisen man sich auch bedienen mag, stets ist im Auge zu behalten, daß das Wesen des „Vektors" in dem Transformationsgesetz für seine Komponenten besteht, wie das oben ausgeführt wurde. —

Wir vermerken noch den folgenden ohne weitere Erläuterung verständlichen

Zusatz 2. — *Da die* Newtonschen *Grundgleichungen* (1) *der Mechanik nach der obigen Kräftedefinition in jedem beliebigen ruhenden Koordinatensysteme gelten, so schreibt man sie oft auch in einer vom Bezugssystem unabhängigen Form:*

$$1') \qquad m \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{K}.$$

Eine solche „Vektorgleichung" vertritt stets 3 Gleichungen zwischen den 3 Komponenten der auftretenden Vektoren, in unserem Falle zwischen den Komponenten

$$\mathfrak{b}_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad \mathfrak{b}_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \qquad \mathfrak{b}_z = \frac{d^2z}{dt^2}$$

des „Beschleunigungsvektors"

und

$$\mathfrak{K}_x = X, \qquad \mathfrak{K}_y = Y, \qquad \mathfrak{K}_z = Z$$

des „Kraftvektors".

Weiter mag noch darauf hingewiesen werden, daß die Newtonschen Grundgleichungen in bestem Einklang stehen mit der oben besprochenen Homogenität der Zeit, derzufolge gleiche Versuche, zu verschiedenen Zeiten angestellt, gleich verlaufen. Daraus folgt nämlich, daß die physikalischen Gesetze (außer evtl. in den Versuchsbedingungen) nie die Zeit selber enthalten dürfen, die man ja eben stets um einen beliebigen Betrag soll vermehren oder vermindern dürfen, ohne dadurch am Ablauf des Versuchs etwas zu ändern — die Gesetze dürfen vielmehr immer nur die Zeitdifferenzen enthalten, und dieser Forderung genügen augenscheinlich die Newtonschen Grundgleichungen, da sie ja die Zeit nur in den Differentialquotienten enthalten.

Aber auch den Vorstellungen, die wir mit dem absoluten Raume verbinden, nämlich von der Homogenität (und Isotropie) des Raumes, tragen die Newtonschen Gleichungen nach dem, was wir in Satz 2 feststellten, Rechnung. Wir verstehen darunter die Vorstellung, daß kein Punkt des Raumes vor einem anderen physikalisch bevorzugt und keine Richtung vor einer anderen bevorzugt ist*); oder daß gleiche Versuche an verschiedenen Orten (und bei verschiedenen Orientierungen der benutzten Apparatur) stets gleich ablaufen. Denn Satz 2 besagt ja eben, daß wir durch Verschiebung des Koordinatensystems**) jeden

*) Wenn ich im folgenden schlechtweg von der „Homogenität des Raumes" spreche, werde ich unter dieser Bezeichnung im allgemeinen die Isotropie (Gleichwertigkeit der Richtungen) mit einschließen; nur wo der Nachdruck gerade auf der Isotropie liegt, werde ich sie besonders hervorheben.

**) Entsprechend der Möglichkeit solcher Verschiebungen enthalten die Newtonschen Grundgleichungen (außer evtl. in den Versuchsbedingungen, d. h. den Kräften) wieder nicht die Koordinaten selber, sondern nur Koordinatendifferenzen.

Punkt in jeden anderen und durch Drehung jede Richtung in jede andere überführen können, ohne daß dadurch am Ablauf des Versuches etwas geändert würde. —

Wir kehren nunmehr zur Hauptuntersuchung zurück: Es war uns gelungen, zu den zunächst nur für das GALILEIsche Grundsystem definierten Kräften äquivalente Kräfte auch in bezug auf andere Systeme so einzuführen, daß auch in diesen die NEWTONschen Grundgleichungen bestehen bleiben. Bisher war aber in diesem Zusammenhange nur von ruhenden Systemen die Rede, d. h. von solchen, die mit dem Grundsystem starr verbunden waren, und wir wollen jetzt zusehen, ob wir unsere Betrachtungen nicht auch auf bewegte Systeme, d. h. natürlich gegen das Grundsystem bewegte Systeme ausdehnen können. — Da bedarf es selbstverständlich zunächst wieder einer Festsetzung darüber, was wir bei gegebenen Versuchsbedingungen jetzt von einem bewegten Systeme aus als die wirkenden Kräfte anzusehen haben, und diese Festsetzung treffen wir, wie das augenscheinlich das Nächstliegende ist, folgendermaßen:

Definition von Kräften in bewegten Bezugssystemen. — *Als die bei einem Bewegungsvorgange wirksamen Kräfte in bezug auf ein Koordinatensystem, das gegenüber dem GALILEIschen Grundsysteme in Bewegung begriffen ist, bezeichnet man immer die Kräfte in einem mit dem bewegten Systeme augenblicklich koinzidierenden ruhenden Systeme.*

So übertragen wir also in einfachster Weise die obige Kräftedefinition von ruhenden auf bewegte Systeme, und damit ist ein gewisser Abschluß erreicht: wir wissen jetzt, was wir unter gegebenen Versuchsbedingungen als die vorhandenen Kräfte in bezug auf „ruhende" wie auch auf „bewegte" Systeme zu verstehen haben. —

Nunmehr fassen wir also ein bewegtes System (ξ, η, ζ) ins Auge, und zwar zunächst eines, das eine besonders einfache Bewegung ausführt, dessen Anfangspunkt nämlich gegenüber dem Grundsystem in geradlinig gleichförmiger Bewegung begriffen ist, und dessen Achsen dauernd sich selber parallel bleiben — und daneben betrachten wir ein festes System (x, y, z) (in dem also die NEWTONschen Grundgleichungen sicher gelten), dessen Achsen den Richtungen der bewegten Achsen parallel sind. Dann bestehen augenscheinlich zwischen den Koordinaten in beiden Systemen die Gleichungen

$$2\,c) \qquad \xi = x + a + \mathfrak{a}t, \qquad \eta = y + b + \mathfrak{b}t, \qquad \zeta = z + c + \mathfrak{c}t,$$

wo a, b, c und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ Konstanten sind, und, was die bei einem Bewegungsvorgange wirkenden Kräfte Ξ, H, Z in bezug auf das ξ, η, ζ-System anlangt, so sind sie definitionsgemäß gleich denen in bezug auf ein augenblicklich koinzidierendes ruhendes System, und da dessen Achsen gleichgerichtet mit denen des x, y, z-Systems sind, sind diese Kräfte nach S. 14 gleich denen in bezug auf das x, y, z-System, also folgt unter gleichzeitiger Benutzung der NEWTONschen Grundgleichungen im letzteren System:

$$3\,c) \qquad \Xi = X = m\frac{d^2x}{dt^2}, \qquad H = Y = m\frac{d^2y}{dt^2}, \qquad Z = Z = m\frac{d^2z}{dt^2}$$

Da aber nach den Gleichungen (2 c) $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2\xi}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2\eta}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2\zeta}{dt^2}$ ist, so können wir dafür auch schreiben:

$$\Xi = m\frac{d^2\xi}{dt^2}, \qquad H = m\frac{d^2\eta}{dt^2}, \qquad Z = m\frac{d^2\zeta}{dt^2},$$

und dieses sind wieder Gleichungen genau von der Form der NEWTONschen Grundgleichungen, die sich also, wenn wir in der angegebenen Weise die Kräfte allmählich in bezug auf immer neue Systeme definieren, auch noch in jedem gegen das GALILEIsche Grundsystem geradlinig gleichförmig ohne Drehung bewegten System als gültig herausstellen.

Wir haben also hier in der Mechanik ein Beispiel vor uns, wie man durch passende Wahl der Definitionen zu Gesetzen gelangt, die invariant sind bei Uebergängen zu gewissen anderen Bezugssystemen, was wir ja oben als das Ziel der Relativitätstheorie hinstellten. Deshalb pflegt man das gewonnene Resultat auch als „Relativitätsprinzip der klassischen Mechanik" oder als „GALILEIsches Relativitätsprinzip" zu bezeichnen. Allerdings müssen wir uns immer vergegenwärtigen, daß es noch sehr speziellen Charakter trägt, es handelt eben nur von den Gesetzen für mechanische Vorgänge und behauptet deren Invarianz auch nur bei Uebergängen zwischen Bezugssystemen ganz bestimmter Art.

Satz 3 (GALILEIsches Relativitätsprinzip der klassischen Mechanik). — *Die NEWTONschen Grundgleichungen der Mechanik*

$$(1) \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z$$

bleiben invariant beim Uebergange vom GALILEIschen Grundsysteme zu beliebigen anderen starr mit ihm verbundenen oder aber geradlinig gleichförmig dagegen bewegten Systemen. — Alle Systeme der bezeichneten Art — wir wollen sie hinfort „GALILEIsche Systeme" nennen — sind daher in der Mechanik als gleichberechtigt anzusehen.

Welches unter allen diesen GALILEIschen Systemen man zum „Grundsystem" wählt, ist danach also gänzlich gleichgültig*); tatsächlich ist ja auch die Aussage des Trägheitsgesetzes: „der Massenpunkt ruht oder bewegt sich geradlinig gleichförmig", welche uns zur Annahme eines Grundsystems führte, wenn in einem dieser Systeme, so auch in allen übrigen zutreffend. Immer aber bilden diese GALILEIschen Systeme noch etwas ausgezeichnetes, sie bilden eine ausgezeichnete Klasse von Systemen und damit eben immer noch etwas *Absolutes*, es ist nicht eine beliebige Reihe von Systemen, die gegeneinander geradlinig gleichförmig bewegt sind, sondern Systeme, die sich geradlinig gleichförmig gegen ein ganz bestimmtes System bewegen. —

Die Koordinatentransformationen, welche die Uebergänge von einem solchen GALILEIschen System zu einem anderen analytisch darstellen, d. s. Transformationen von der Form

$$5) \qquad \begin{aligned} x' &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + a + \mathfrak{a}t \\ y' &= \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z + b + \mathfrak{b}t \\ z' &= \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z + c + \mathfrak{c}t, \end{aligned}$$

*) Damit findet die in der Anmerkung S. 8 aufgeworfene Frage ihre Beantwortung. — Trotz dieser Freiheit in der Auswahl unter sehr vielen Systemen dürfte es sich aber zur Vereinfachung der Darstellung auch im folgenden empfehlen, ein ganz bestimmtes unter ihnen herauszugreifen und nach wie vor von einem bestimmten „Grundsysteme" zu sprechen.

wo a, b, c und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ beliebige Konstanten, die 9 ebenfalls konstanten Koeffizienten α, β, γ aber den bekannten 6 Orthogonalitätsbedingungen

$$5') \qquad \alpha_i\alpha_k + \beta_i\beta_k + \gamma_i\gamma_k = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq k \\ 1 & \text{„ } i = k \end{cases} \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

genügen, nennt man „GALILEI-Transformationen". Von ihnen gilt, wie wohl nicht näher begründet zu werden braucht, der folgende Satz: *Alle GALILEI-Transformationen bilden eine Gruppe, d. h. zwei solche Transformationen nacheinander ausgeführt, bilden immer wieder eine Transformation derselben Art. — Man spricht so von der „GALILEI-Gruppe".*

Unter Benutzung dieser Bezeichnungen kann man dann unseren obigen Satz 3 auch folgendermaßen aussprechen:

Zweite Form des GALILEIschen Relativitätsprinzips. — *Die NEWTONschen Grundgleichungen der Mechanik sind invariant gegenüber allen GALILEI-Transformationen oder innnerhalb der GALILEI-Gruppe.*

Doch ist das wieder nicht etwa so zu verstehen, daß Invarianz der Gleichungen (1) besteht beim Uebergange von irgendeinem beliebigen rechtwinkligen System zu irgendeinem geradlinig gleichförmig gegen dasselbe bewegten Systeme*), sondern die betrachteten Systeme müssen eben alle zu jener ausgezeichneten Systemklasse gehören, es müssen GALILEIsche Systeme sein.

Daß die GALILEIschen Systeme tatsächlich die einzigen sind, in denen die Grundgleichungen der Mechanik diese einfache Form (1) besitzen, läßt sich leicht nachweisen, doch dürfte es lehrreicher für unsere Zwecke sein, die Verhältnisse näher zu untersuchen, die eintreten, wenn wir einmal ein spezielles anderes, nicht GALILEIsches System betrachten, dessen Bewegung gegen das Grundsystem also nicht geradlinig gleichförmig ist, sondern Beschleunigungen aufweist, und da wollen wir einmal ein System (ξ, η, ζ) wählen, das um die z-Achse des Grundsystems (d. i. also irgendeines der GALILEIschen Systeme) mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω rotiert. Dann sind also die Koordinaten eines Punktes im „ruhenden" und im „bewegten" Systeme durch die Gleichungen verbunden:

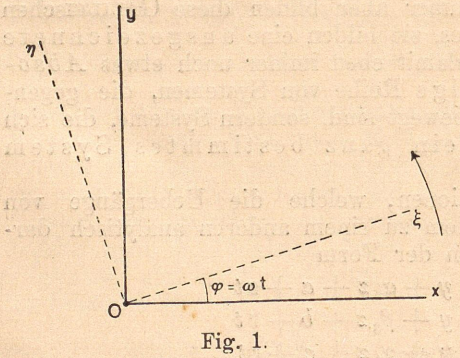


Fig. 1.

$$6) \qquad \begin{aligned} \xi &= x\cos\omega t + y\sin\omega t \\ \eta &= -x\sin\omega t + y\cos\omega t \\ \zeta &= z, \end{aligned}$$

und zwischen den Beschleunigungen desselben bewegten Massenpunktes in beiden Systemen bestehen dann, wie eine leichte Rechnung lehrt, die Beziehungen:

*) Das zeigen so besonders deutlich unsere späteren Formeln (7), wenn wir darin etwa die Substitutionen (5) ausführen wollten.

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\cos\omega t + \frac{d^2y}{dt^2}\sin\omega t + 2\omega\frac{d\eta}{dt} + \omega^2\xi$$
$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = -\frac{d^2x}{dt^2}\sin\omega t + \frac{d^2y}{dt^2}\cos\omega t - 2\omega\frac{d\xi}{dt} + \omega^2\eta$$
$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Diese Gleichungen multiplizieren wir mit der Masse des betrachteten Massenpunktes. Dann sind, da das x, y, z-System ein Galileisches System bedeutet, $m\frac{d^2x}{dt^2}$, $m\frac{d^2y}{dt^2}$, $m\frac{d^2z}{dt^2}$ gleich den bei dem betrachteten Bewegungsvorgange wirksamen Kräften X, Y, Z in diesem Systeme, und weiter sind

$$X\cos\omega t + Y\sin\omega t, \qquad -X\sin\omega t + Y\cos\omega t, \qquad Z$$

nach unseren früheren Regeln [vgl. (3b) S. 15] die zur Zeit t bei demselben Bewegungsvorgange wirksamen Kräfte in einem System, das gegen das x, y, z-System um den Winkel ωt um die z-Achse gedreht ist, also augenblicklich mit dem ξ, η, ζ-System koinzidiert, und wir haben daher diese Größen nach der Definition von S. 18 zu bezeichnen als die bei diesem Bewegungsvorgange zur Zeit t wirksamen Kräfte Ξ, H, Z vom rotierenden Systeme (ξ, η, ζ) aus, so daß wir also schließlich schreiben können:

$$7)\qquad \begin{aligned} m\frac{d^2\xi}{dt^2} &= \Xi + 2m\omega\frac{d\eta}{dt} + m\omega^2\xi \\ m\frac{d^2\eta}{dt^2} &= H - 2m\omega\frac{d\xi}{dt} + m\omega^2\eta \\ m\frac{d^2\zeta}{dt^2} &= Z, \end{aligned}$$

und wir sehen also, in Uebereinstimmung mit unseren obigen Bemerkungen, daß in diesem rotierenden Systeme nicht mehr die Newtonschen Grundgleichungen gelten, d. h. es sind nicht mehr die Produkte aus der Masse mit den Beschleunigungen in diesem Systeme gleich den Kräften Ξ, H, Z bezüglich dieses Systems: *die Newtonschen Grundgleichungen sind also nicht mehr invariant beim Uebergang zu rotierenden Systemen.*

Daher gelten mit Bezug auf ein solches System auch nicht mehr die bekannten Gesetze der Mechanik, z. B. auch schon nicht mehr das Trägheitsgesetz. Denn nehmen wir z. B. an, ein Massenpunkt ruhe in dem ξ, η, ζ-System, d. h. es seien

$$\xi = \text{const}, \qquad \eta = \text{const}, \qquad \zeta = \text{const},$$

so folgt nach den Gleichungen (7) zur Bestimmung der in diesem System anzunehmenden Kräfte Ξ, H, Z:

$$\Xi + m\omega^2\xi = 0, \qquad H + m\omega^2\eta = 0, \qquad Z = 0,$$

also

$$\Xi = -m\omega^2\xi, \qquad H = -m\omega^2\eta, \qquad Z = 0,$$

d. h. es bedarf, um einen nicht gerade auf der ζ-Achse gelegenen Massenpunkt (ξ und η nicht beide gleich 0) in einem solchen Systeme

in Ruhe zu erhalten, einer bestimmten zur ζ-Achse hingerichteten Kraft, während nach dem Trägheitsgesetz [vgl. dessen zweite Formulierung S. 11] keine Kräfte nötig wären. — Wir fassen zusammen:

Satz 4. — *In einem gegen das Galileische Grundsystem rotierenden Koordinatensystem gelten die Newtonschen Grundgleichungen nicht mehr, und es gelten daher auch, bezogen auf ein solches System, nicht mehr die gewöhnlichen Gesetze der Mechanik, wie z. B. der Satz, daß auf einen ruhenden Massenpunkt keine Kräfte wirken: es bedarf vielmehr, um ihn gegen ein solches System in Ruhe zu erhalten, der Ausübung einer Zentripetalkraft.* —

Wir sind also zu dem Ergebnis gekommen, daß beim Uebergange von dem Galileischen Grundsystem zu beliebigen geradlinig gleichförmig gegen dasselbe bewegten Bezugssystemen die Newtonschen Grundgleichungen der Mechanik und damit überhaupt alle Sätze der Mechanik*) unverändert gültig bleiben, daß dies aber nicht mehr der Fall ist, sobald wir zu rotierenden Systemen übergehen. Nach unseren allgemeinen Ausführungen von § 1 soll das nun, vorausgesetzt, daß jene Gleichungen und Gesetze ein absolut naturgetreues Bild aller mechanischen Vorgänge liefern, zur Folge haben, daß wenigstens gleiche mechanische Versuche, in zwei (geradlinig gleichförmig gegeneinander bewegten) Galileischen Systemen angestellt, genau gleichen Verlauf nehmen, hingegen Parallelversuche in einem Galileischen System und einem dagegen rotierenden Systeme nicht. — Um dies an der Hand unserer Formeln nachzuprüfen, stellen wir folgende Ueberlegung an: Bei „gleichen Laboratoriumsversuchen“ in den Systemen (x, y, z) und (x', y', z') sind die Versuchsbedingungen, d. s. die Kräfte [vgl. S. 12] beidemale gleich, wenn man sie immer von dem betreffenden System aus betrachtet, d. h. es sind X', Y', Z' dieselben Funktionen von x', y', z' wie X, Y, Z von x, y, z und demgemäß werden die Lösungen der Bewegungsgleichungen in zwei Galileischen Systemen

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = X, \text{ usw.} \qquad \text{bzw.} \qquad m\,\frac{d^2x'}{dt^2} = X', \text{ usw.}$$

(Gleichungen für x, y, z bzw. x', y', z') bei gleichen Anfangsbedingungen dieselben 3 Funktionen von t sein; das heißt dann aber, daß die Versuche tatsächlich gleich ablaufen. — Das Alles wird aber augenscheinlich sofort anders, sobald an die Stelle des zweiten Galileischen Systems (x', y', z') ein rotierendes System (ξ, η, ζ) tritt, und demgemäß an die Stelle des zweiten Gleichungssystems die Formeln (7) treten.

Aber auch ohne Rechnung kann man sich eine anschauliche Vorstellung von diesem Sachverhalt machen: Wir nehmen z. B. an, daß ein Experimentator in einem mit einem Galileischen Systeme (x, y, z) fest verbundenen Laboratorium einen Stein (Massenpunkt) mit einer gewissen Geschwindigkeit v etwa in der Richtung der z-Achse losschleudere und ihn dann sich selber überlasse. Dann wird der Experimentator (da ja Schwerewirkungen ausgeschlossen sind) beobachten, daß sich der Stein geradlinig mit der sich stets gleichbleibenden Geschwindigkeit v parallel der z-Achse weiterbewegt — und nun denken wir uns einen Parallelversuch in einem zweiten Galilei-

*) Es ändern hieran nämlich auch die übrigen Grundgesetze nichts, die man noch zum Aufbau der klassischen Mechanik braucht. Doch habe ich keinen Grund, darauf hier näher einzugehen.

schen Systeme (x', y', z') angestellt: Ein Experimentator schleudere einen Stein in Richtung der z'-Achse wieder mit der Geschwindigkeit v los. Auch dieser Experimentator wird dann eine Weiterbewegung des Steines parallel der z'-Achse mit der gleichen Geschwindigkeit v wahrnehmen, beiden Beobachtern wird sich also bei diesen Parallelversuchen *genau das gleiche Bild* darbieten. — Nehmen wir aber an, der Parallelversuch fände in einem rotierenden Systeme (ξ, η, ζ) statt, dort schleudere ein Experimentator einen Stein in der Richtung der ζ-Achse (nicht in ihr selber) mit der Geschwindigkeit v ab. Dann wird er *etwas ganz anderes beobachten* wie sein Partner im Galileischen Systeme. Vom Standpunkte des rotierenden Systems aus wird der Stein nämlich augenscheinlich eine Bahn beschreiben, die sich, im wesentlichen spiralförmig, um die ζ-Achse herumwindet, denn die Bewegung wird von einem Galileischen Systeme aus geradlinig erfolgen, wenn auch — wegen der seitlichen Komponente der Anfangsgeschwindigkeit — nicht mehr parallel der festen ζ-Achse.

Der gleiche Ablauf mechanischer Parallelversuche in den beiden Galileischen Systemen (Laboratorien) macht es uns unmöglich, durch mechanische Versuche einen Unterschied zwischen beiden Systemen festzustellen [vgl. § 1], und wir können daher mit dem gleichen Rechte von dem einen Systeme sagen, es bewege sich gegen das andere, wie auch umgekehrt, das andere bewege sich gegen das erste. *Translatorische Bewegungen Galileischer Systeme im Raume sind also mit mechanischen Hilfsmitteln nicht feststellbar.* Das ist nach dem vorigen Paragraphen nur eine andere Formulierung für das Galileische Relativitätsprinzip. — Hingegen gestattet der verschiedene Ablauf von Parallelversuchen in einem Galileischen und einem dagegen sich drehenden Systeme tatsächlich durch mechanische Laboratoriumsversuche *einen Unterschied im Bewegungszustande beider Systeme festzustellen,* so daß wir hier nicht berechtigt sind, ebensogut das eine wie das andere als „ruhend" anzusehen. — Der weit einfachere Verlauf des gleichen Versuchs in dem einen Systeme wird dazu führen, diesem eine bevorzugte Rolle zuzuschreiben, also eines der beiden Systeme vor dem anderen auszuzeichnen. So führen auch diese Ueberlegungen wieder auf die ausgezeichneten, absoluten Galileischen Systeme. —

Zusammenfassend können wir sagen: Wenn also auch nicht sämtliche Bewegungen, so haben doch *sicher die Drehungen in der klassischen Mechanik eine absolute Bedeutung,* und diese Mechanik beugt sich daher, wie schon früher erwähnt wurde, nicht dem allgemeinen Relativitätsprinzip, in ihr gilt vielmehr nur ein beschränktes, eben das oben besprochene Galileische Relativitätsprinzip.

Zum Schlusse dieses Paragraphen möchte ich noch an die obigen Formeln (7) einige Bemerkungen knüpfen, die uns später auch von Nutzen sein werden. Wir haben bisher aus diesen Gleichungen nur geschlossen, daß in dem rotierenden Systeme (ξ, η, ζ) nicht die Newtonschen Grundgleichungen gelten, weil rechterhand nicht die Kräfte Ξ, H, Z selber stehen. Wir wollen uns jetzt noch mit den dort auftretenden Zusatzgliedern

$$8) \qquad 2m\omega\frac{d\eta}{dt} + m\omega^2\xi, \qquad -2m\omega\frac{d\xi}{dt} + m\omega^2\eta, \qquad 0$$

beschäftigen, die man meist als „Zentrifugalkräfte“ (im weiteren Sinne) zu bezeichnen pflegt.*) Wie rechtfertigt sich nun diese Bezeichnung, da es doch nicht „bei dem betrachteten Bewegungsvorgange wirksame Kräfte“ im bisherigen Sinne sind? — Zu der Auffassung dieser Glieder als „Kräfte“ gelangt man — kurz gesagt — durch einen Fehlschluß, indem man eben die Newtonschen Grundgleichungen fälschlich auf das rotierende System (in dem sie nach Satz 4 nicht gelten) anwendet. Man denke sich etwa mit dem rotierenden System (Karussell) einen Beobachter mitgehen, der sich dieser Bewegung, die er vollführt, gar nicht bewußt ist, und der mit der Kenntnis der Newtonschen Mechanik ausgerüstet ist. Er wird dann, wie in einem Galileischen Systeme, als „Kräfte“ die Produkte der Masse mit den Beschleunigungen, d. h. $m\frac{d^2\xi}{dt^2}$, $m\frac{d^2\eta}{dt^2}$, $m\frac{d^2\zeta}{dt^2}$ ansprechen, also die ganzen rechten Seiten der Gleichungen (7). So ergibt sich denn:

Satz 5. — *Würde man in einem nicht-Galileischen Bezugssysteme Kräfte wieder definieren durch die Produkte aus der Masse und den Beschleunigungen des bewegten Massenpunktes, so würde man im allgemeinen andere Kräfte erhalten. So kommt ein Beobachter, der sich mit einem gegen das Galileische Grundsystem rotierenden Bezugssystem mitbewegt, durch Anwendung der Newtonschen Grundgleichungen auf ein falsches System zu der Vorstellung, daß außer den wirksamen Kräften (im früheren Sinne) noch weitere Kräfte, die sogenannten Zentrifugalkräfte wirkten.*

So stellen die Zentrifugalkräfte immer nur eine *Fiktion* dar, zu der man durch Anwendung der Gesetze der Mechanik auf ein falsches (eben nicht Galileisches) Bezugssystem gelangt. — Hierfür noch ein anschauliches Beispiel: Man nehme an, in einer (etwa horizontal zu denkenden Ebene) rotiere eine Glasröhre um eine senkrecht durch sie hindurchgehende Achse, und in der Röhre befinde sich eine Erbse. Diese Erbse wird sich, wie wir alle wissen, in der Röhre von dem Drehpunkt immer weiter entfernen, also vom Standpunkte eines außenstehenden Beobachters eine spiralförmige Bahn beschreiben. Ein sich mit der Röhre mitdrehender Beobachter aber sieht nichts weiter, als daß die Erbse im Augenblick, wo sie losgelassen wird, vom Mittelpunkt radial davoneilt, und er kommt demgemäß zu der Vorstellung, daß da zentrifugal eine Kraft auf die Erbse wirke — aber eben nur dadurch, daß er den ihm aus der Newtonschen Mechanik her bekannten Satz, daß, wenn ein Körper aus der Ruhe in Bewegung übergeht, eine Kraft vorhanden sein muß, fälschlich auf sein sich drehendes System anwendet. — Der außenstehende Beobachter (im Galileischen System) bedarf nicht

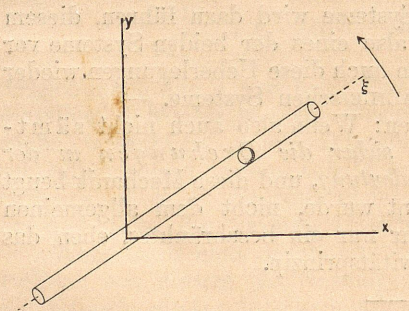


Fig. 2.

*) Im einzelnen heißen: $2m\omega\frac{d\eta}{dt}$ und $-2m\omega\frac{d\xi}{dt}$ „Coriolis-Kräfte“ und $m\omega^2\xi$ und $m\omega^2\eta$ „Zentrifugalkräfte im engeren Sinne“.

erst der Annahme solcher zentrifugaler Kräfte, um sich die Erscheinung zu erklären: Da die Erbse in jedem Augenblick von der Röhrenwandung einen Stoß senkrecht zu dieser erhält, ist ihm die Spiralform der Bahn ohne weiteres verständlich.

So lehren diese Ueberlegungen aufs neue, wie wichtig es ist, daß man sich darüber klar ist, daß die Newtonschen Grundgleichungen (1) der Mechanik nicht in beliebigen Bezugssystemen gültig sind, und sie lehren weiter die interessante Tatsache, daß es vorkommen kann, daß bei demselben Bewegungsvorgange je nach dem Standpunkte des Beobachters verschiedene Kräfte im Spiele zu sein scheinen.

§ 3.

Zur Frage, ob der Weltäther ruht oder mit der Materie mitgeführt wird.

Wie ich im vorigen Paragraphen auseinandergesetzt habe, zwingt uns die klassische Mechanik, ein ausgezeichnetes, absolutes Bezugssystem, das wir das Galileische Grundsystem nannten, anzunehmen, auf das sich alle Bewegungsgesetze der Mechanik bezogen. Doch dieses System wirklich zu bestimmen, ist nie in befriedigender Weise gelungen. Zur Untersuchung der Vorgänge im Planetensystem erwies es sich zwar als praktisch genügend, es an den Fixsternhimmel anzuschließen, also alle Bewegungen relativ zum Fixsternhimmel zu verstehen, aber damit konnte man sich vom theoretischen Standpunkte aus doch nicht zufrieden geben, denn wir wissen, daß auch die Fixsterne sich gegeneinander bewegen, es also ein geometrisch exaktes Koordinatensystem, in dem „der" Fixsternhimmel ruht, nicht geben kann. Aber auch andere Versuche, das System in der sichtbaren Körperwelt genauer festzulegen, scheiterten.

Nun hatten aber Untersuchungen anderer physikalischer Erscheinungen, nämlich des Lichts und der Elektrizität, zu der Vorstellung von einem das ganze Weltall durchdringenden Körper, zur Annahme des Weltäthers geführt, und es sind die Triumphe bekannt, welche diese „Aetherhypothese" gefeiert hat. Da lag denn die Vermutung nahe, daß vielleicht dieser Weltäther, in dem sich das Licht mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortpflanzt, das absolut Ruhende in der Welt sei, daß er der Träger des „absoluten" Bezugssystems der Mechanik wäre, daß also die Bewegungen der Mechanik Bewegungen gegen den Aether seien.

Diese Hypothese ist noch bis vor kaum 20 Jahren von dem holländischen Physiker Hendrik Antoon Lorentz verfochten. Wir wollen sie nun im folgenden näher prüfen, und zwar werde ich im wesentlichen 3 Erscheinungen besprechen, welche diese Annahme teils stützen, teils ihr widersprechen, und zwar sind dies: die Aberration des Lichtes, der Michelsonsche Interferenzversuch und der Fizeausche Mitführungsversuch.

I. Die Aberration des Lichtes.

Die Erscheinung besteht in folgendem: Beobachtet man einen Fixstern F von zwei Stellen der Erdbahn aus, und zwar angenähert

von der ihm nächstgelegenen und der am weitesten von ihm entfernten, also von Stellen E und E′, die sich in bezug auf die Sonne gegenüberliegen und in denen also die Erde ungefähr gleiche aber entgegengesetzte Fortschreitungsrichtungen (gegenüber der Sonne) besitzt, so fallen die zu ihnen angenähert senkrechten Richtungen, in denen man visieren muß, um den Fixstern im Fadenkreuz des Fernrohres zu halten, nicht zusammen: die Fernrohrrichtung weicht vielmehr von der mittleren Richtung stets um einen ganz bestimmten kleinen Betrag, nämlich um 20,5 Bogensekunden derart ab, daß das Objektivende in der jeweiligen Fortschreitungsrichtung der Erde um diesen kleinen Winkel vorgerückt werden muß [Figur 3a].

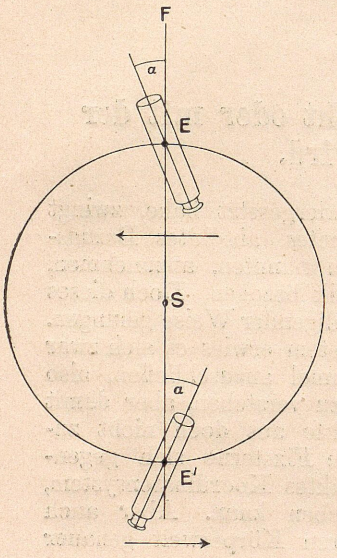


Fig. 3a.

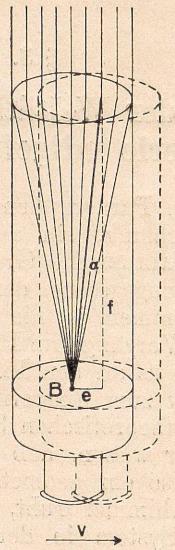


Fig. 3b.

Diese Erscheinung wollen wir nun zu erklären versuchen unter der Annahme vom ruhenden Aether, d. h. unter der Annahme, daß die Bewegungen der materiellen Körper auf den Aether und damit auf die Lichtfortpflanzung ohne Einfluß seien.

Wir nehmen zunächst an, das Fernrohr ruhe, was jetzt natürlich heißt, es ruhe gegen den Aether. Dann wird, wenn wir es auf den Fixstern richten, ein von diesem ausgehendes Bündel paralleler Strahlen durch das Objektiv im Brennpunkte, d. i. dem Achsenpunkt der Brennebene, vereinigt. Nehmen wir nun aber an, das Fernrohr werde senkrecht zur Achsenrichtung mit einer Geschwindigkeit v (gegen den Aether) bewegt, so wird der Lichtimpuls, der etwa zur Zeit t_0 das Objektiv erreichte, da ja die Bewegung des Fernrohrs nach der Hypothese vom ruhenden Aether ohne jeden Einfluß auf den Strahlengang ist, in dem Punkte B konzentriert, den das Objektiv in seiner Lage zur Zeit t_0 als Brennpunkt besaß. Inzwischen aber, d. h. bis das Licht diesen Punkt erreicht, hat sich das Fernrohr selbst verschoben und jener Punkt B erscheint also nicht mehr in der Mitte des Gesichtsfeldes, sondern ist in der Brennebene verschoben und zwar, falls die Zeit τ verstrichen ist, um die Strecke $e = v \cdot \tau$ in der Bewegung zurückgeblieben, und wir müssen also, um ihn wieder in die Mitte des Gesichtsfeldes zu bringen, das Fernrohr am Okularende gegen die Bewegungsrichtung zurückrücken oder, was auf dasselbe herauskommt, das Objektivende nach vorwärts neigen, und das ist ja gerade die beobachtete Erscheinung.

Aber auch die Größe des Neigungswinkels kann man leicht auf Grund dieser Vorstellungen bestimmen. Bezeichnen wir die Lichtgeschwindigkeit mit c, so ist die Zeit τ, welche das Licht braucht, um

vom Objektiv zur Brennebene zu gelangen oder die Brennweite f zu durchlaufen: $\tau = \frac{f}{c}$. Nun folgt aber aus der Figur 3b ohne weiteres für den Neigungswinkel α die Gleichung

$$tg\,\alpha = \frac{e}{f}, \qquad \text{also ist} \qquad tg\,\alpha = \frac{v \cdot \tau}{c \cdot \tau} = \frac{v}{c}.$$

Nehmen wir die Lichtgeschwindigkeit $c = 300\,000\ \frac{\text{km}}{\text{sec}}$ an und setzen die Geschwindigkeit v der Erdbewegung gegen den Aether gleich der (mittleren) Geschwindigkeit gegen den Fixsternhimmel*), die sich aus astronomischen Beobachtungen zu $30\ \frac{km}{sec}$ ergeben hat, so erhalten wir den Wert:

1) $$tg\,\alpha = \frac{v}{c} = \frac{1}{10\,000} \qquad \text{und daraus:} \quad \alpha = 20''{,}5,$$

also gerade den beobachteten Wert. So gelangen wir zu folgendem

Satz I. — *Die bekannte Erscheinung der Aberration des Lichtes spricht für die H. A. Lorentzsche Hypothese vom ruhenden Aether, da sie sich denkbar einfach aus ihr erklären läßt.*

Vor allem stützt die Tatsache, daß sich der Aberrationswinkel bei Beobachtung beliebiger Fixsterne immer gleich groß ergab, die hier zur Erklärung benutzte Annahme, denn sie beseitigt die Einwände, daß etwa eine Eigenbewegung der Fixsterne (oder des Planetensystems gegen den Fixsternhimmel) von zufällig derselben Periode, wie sie die Umdrehung der Erde um die Sonne besitzt, im Spiele ist.

Es ist bekannt, daß Bradley umgekehrt die oben angestellten Ueberlegungen in Verbindung mit dem beobachteten Werte des Aberrationswinkels dazu benutzt hat, um die Lichtgeschwindigkeit zu bestimmen, und daß er gute Uebereinstimmung mit den Resultaten anderer Methoden fand.

So scheint denn durch die Erscheinung der Aberration die Hypothese vom ruhenden Aether bestens gestützt, und wir wollen daher versuchen, auch weitere Erscheinungen vermittels dieser Hypothese zu erklären.

II. Der Michelsonsche Interferenzversuch.

Um die durch die Erscheinung der Aberration wahrscheinlich gemachte Bewegung der physischen Körper gegen den Aether nachzuweisen, stellte Michelson im Jahre 1881 einen berühmt gewordenen Versuch an, und zwar lief dieser wieder darauf hinaus, speziell die Be-

*) Natürlich ist das eine zwar naheliegende, doch, strenge genommen, ziemlich willkürliche Annahme. — Ueberhaupt ließen sich gegen diese elementare Behandlung der Aberration mancherlei Einwände erheben, doch mag sie hier genügen, da dieser Paragraph ja nur ein Bild geben soll von den tastenden Versuchen, die man früher zur Erklärung der Erscheinungen gemacht hat. — Insbesondere sei noch darauf hingewiesen, daß man mit den obigen Vorstellungen nicht die beobachtete Tatsache erklären kann, daß der Aberrationswinkel auch ungeändert bleibt, wenn man das Fernrohr z. B. mit Wasser füllt. Dadurch wird ja doch die Lichtgeschwindigkeit im Innern des Fernrohres — und nach jenen Vorstellungen spielt ja nur diese eine Rolle — beträchtlich herabgesetzt, und so sollte man erwarten, daß der Aberrationswinkel größer würde, was, wie gesagt, nicht beobachtet ist.

wegung der Erde gegen den Weltäther zu bestimmen, da hier noch am ehesten ein Ergebnis zu erwarten war, denn alle anderen, etwa in Laboratorien herzustellenden Geschwindigkeiten sind gegenüber der Erdgeschwindigkeit (30 $\frac{\text{km}}{\text{sec}}$ gegen den Fixsternhimmel) äußerst klein.

Benutzt wurde ein Apparat, der auf einer großen horizontalen Platte montiert war, die um eine vertikale Achse A drehbar war. Der Apparat selber bestand aus einer Lichtquelle L, einer planparallelen Glasplatte G, die vertikal so aufgestellt war, daß sie die Drehungsachse A in sich enthielt und daß die von der Lichtquelle ausgehenden Strahlen unter einer Neigung von 45° auf sie auffielen, und ferner aus zwei Spiegeln S_1 und S_2 und einem Interferenzschirm, deren Aufstellung aus der Figur 4 ersichtlich ist. — Wir setzen, da es sich ja hier nur um die Auseinandersetzung des Prinzipes des ganzen Versuches handelt, voraus, daß es gelungen sei, die Entfernungen der Spiegel S_1 und S_2 von der Achse absolut gleich groß zu machen (gleich l) und überhaupt eine mathematisch exakte Justierung des Apparates zu erreichen.

Nunmehr verfolgen wir den Gang der von der Lichtquelle L ausgehenden und auf die Glasplatte G fallenden Strahlen. Bei G werden sich alle diese Strahlen teilen: ein Teil wird durch die Platte hindurchgehen, am Spiegel S_1 in sich selbst zurückgeworfen und nach Reflexion an der Glasplatte — nur der jetzt reflektierte Teil interessiert uns — auf den Schirm geworfen, der andere Teil wird gleich anfänglich an G reflektiert und nach Spiegelung an S_2 teilweise durch die Glasplatte hindurchgehen und gelangt so ebenfalls auf den Schirm. Hier interferieren dann beide Strahlen miteinander, da sie ja von derselben Lichtquelle herstammen, also kohärent sind. Die Interferenzfrangen auf dem Schirme beobachtet man nun bei verschiedenen Stellungen des Apparates.

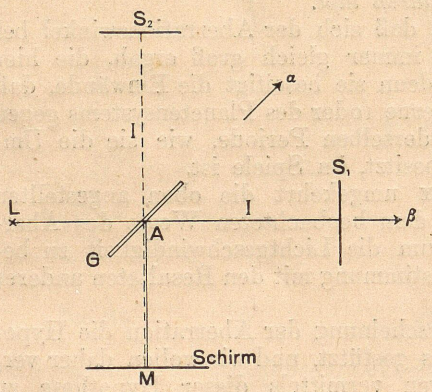


Fig. 4.

Zunächst nehmen wir an, der Apparat sei so gedreht, daß die Fortschreitungsrichtung der Erde in die Richtung des Pfeiles α unserer Figur 4 fällt. Was werden wir dann in der Mitte des Schirmes beobachten? Gangunterschiede der beiden hier interferierenden, durch Teilung des Zentralstrahles entstandenen Strahlen können nur auf den Wegstrecken entstehen, die sie beide getrennt durchlaufen, also auf dem Hin- und Rückwege zwischen A und S_1 bzw. zwischen A und S_2. Da aber die Fortschreitungsrichtung der Erde im angenommenen Falle (α) symmetrisch zu diesen beiden Wegen verläuft, müssen, wenn überhaupt eine Beeinflussung der Lichtfortpflanzung durch die Bewegung der Erde stattfindet, beide Strahlen davon in gleicher Weise betroffen werden, und die beiden Teile des (in der Figur allein gezeichneten) Zentralstrahles werden also ohne gegenseitige Gangunter-

schiede den Schirm erreichen, die Mitte M des Schirmes wird also in unserem Falle α hell erscheinen.

Nunmehr denken wir uns den ganzen Apparat um 45^0 gedreht, so daß die Fortschreitungsrichtung der Erde in die Richtung von AS_1 oder in die Richtung des Pfeiles β unserer Figur fällt. Wird dann die Schirmmitte M noch immer hell erscheinen? Diese Frage ist identisch mit der anderen, ob beide Teile des Zentralstrahles Gangunterschiede erfahren oder nicht. Der Untersuchung dieser Gangunterschiede wenden wir uns daher zu, und zwar wollen wir bei ihrer Behandlung eben wieder die Hypothese vom ruhenden Aether zugrunde legen.

Wir berechnen zunächst die Zeit t_1, die z. B. ein Wellenberg braucht, um von A über S_1 nach A zurückzukehren und vergleichen sie mit der Zeit t_2, die ein Wellenberg im zweiten Strahle braucht, um von A über S_2 nach A zurückzugelangen. In der Differenz $t_1 - t_2$ dieser Zeiten haben wir dann augenscheinlich ein Maß des gesuchten Gangunterschiedes vor uns. — Nun zerfällt t_1 in die beiden Zeiten τ_h und τ_r für Hin- und Rückweg,

$$t_1 = \tau_h + \tau_r.$$

Zur Bestimmung von τ_h gilt nun nicht etwa die Gleichung $c\tau_h = l$, sondern, da eben nach der Hypothese vom ruhenden Aether die Lichtfortpflanzung gänzlich unabhängig von der Bewegung der materiellen Körper, also hier des ganzen mit der Erdgeschwindigkeit v bewegten Apparates ist, so weicht der Spiegel S_1 gleichsam vor dem Wellenberge zurück, und dieser hat daher, bis er S_1 erreicht, nicht die Strecke l, sondern die größere Strecke $l + v \cdot \tau_h$ zu durchlaufen, so daß

$$c \cdot \tau_h = l + v \cdot \tau_h \qquad \text{ist, und sich daher} \qquad \tau_h = \frac{l}{c - v}$$

ergibt. Auf dem Rückwege eilt umgekehrt das Ziel A dem Wellenberge entgegen, dessen Weg ist also verkürzt, und es folgt daher entsprechend:

$$c \cdot \tau_r = l - v\tau_r \qquad \text{oder} \qquad \tau_r = \frac{l}{c + v}$$

und demnach:

$$2) \qquad t_1 = \tau_h + \tau_r = \frac{l}{c - v} + \frac{l}{c + v} = \frac{2cl}{c^2 - v^2}.$$

Wenden wir uns nun zur Berechnung von t_2, so handelt es sich hier im wesentlichen um die Aufgabe, die Geschwindigkeit zu bestimmen, mit der das Licht nach der Hypothese vom ruhenden Aether auf einer senkrecht zu ihrer eigenen Richtung bewegten Geraden fortschreitet. Wir können nach dieser Hypothese etwa die Ausbreitung eines Lichtimpulses vergleichen mit dem bekannten Bilde von der Ausbreitung jenes Wellensystems, das ein ins Wasser geworfener Stein auf dessen ruhender Oberfläche erzeugt, und die oben aufgeworfene Frage ist dann die, wie rasch die Wellenbewegung die Punkte einer Geraden erfaßt, die senkrecht zu ihrer eigenen Richtung mit der Geschwindigkeit v fortbewegt wird. Nehmen wir an, diese Gerade ginge im Augenblicke der Erregung des Wellensystems durch das Erregungszentrum, und fassen die Sachlage nach einer Sekunde ins Auge: Dann hat sich

das Wellensystem bis zum Kreise mit dem Radius c ausgebreitet, inzwischen ist aber jene Gerade um die Strecke v verschoben, die Wellenerregung hat sich also in einer Sekunde beiderseits auf der Geraden um die Strecke $u = \sqrt{c^2 - v^2}$ ausgebreitet. Dies ist demnach die Geschwindigkeit des Fortschreitens in der verschobenen Geraden.

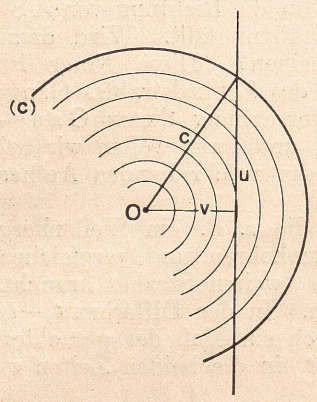


Fig. 5.

Machen wir von dieser Feststellung die Anwendung auf den Michelsonschen Versuch, so ergibt sich für die Zeit, die in unserem zweiten Falle β ein Wellenberg des zweiten Teilstrahles braucht, um von A nach S_2 zu gelangen, der Wert

$$\tau = \frac{l}{\sqrt{c^2 - v^2}},$$

und dieselbe Zeit braucht er augenscheinlich (aus Symmetriegründen) auch, um von S_2 nach A zurückzugelangen, so ergibt sich denn

$$3) \qquad l_2 = 2\tau = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - v^2}}.$$

Es ist also $t_2 \neq t_1$, d. h. nach der Wiedervereinigung der beiden Strahlen wird nicht Wellenberg auf Wellenberg und Wellental auf Wellental fallen, die Strahlen weisen vielmehr einen Gangunterschied auf, der helle Streifen, der vorhin im Falle α in der Mitte M des Schirmes lag, hat sich verschoben — so müssen wir nach der Hypothese vom ruhenden Aether erwarten. — Doch das Experiment hat dieses Ergebnis nicht bestätigt, eine Verschiebung des Interferenzbildes war nicht festzustellen.

Wir wollen noch den Unterschied zwischen t_1 und t_2 genauer berechnen. Dabei tun wir gut daran, für die kleine Größe $\frac{v}{c}$ eine eigene Bezeichnung einzuführen, und etwa, wie das auch im folgenden immer geschehen soll,

$$\frac{v}{c} = q$$

zu setzen. Dann können wir wegen der Kleinheit von q (in unserem Falle etwa $\frac{1}{10\,000}$ [vgl. (1) S. 27]) schreiben:

$$4) \qquad \begin{aligned} t_1 &= 2\,\frac{l}{c} \cdot \frac{1}{1-q^2} \sim 2\,\frac{l}{c}\,(1+q^2) \\ t_2 &= 2\,\frac{l}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-q^2}} \sim 2\,\frac{l}{c}\,(1+\tfrac{1}{2}q^2) \end{aligned}$$

und so erhalten wir denn:

$$t_1 - t_2 \sim 2\,\frac{l}{c} \cdot \tfrac{1}{2}q^2 = \frac{l}{c}\,q^2$$

Dem so errechneten Gangunterschiede hätte bei der Anordnung, welche MICHELSON und MORLEY dem Versuche gaben*), als sie ihn 1887 mit verfeinerten Mitteln wiederholten, eine Verschiebnng der Interferenzstreifen um 0,4 der Frangenbreite entsprechen müssen, während die beobachteten über die im Maximum 0,02 der Streifenbreite betragenden Versuchsfehler nicht hinausgingen.

Wir sehen also, daß beim MICHELSONschen Versuch zwischen den auf Grund der Hypothese vom ruhenden Aether errechneten Resultaten und den Beobachtungen völlige Diskrepanz besteht, diese Hypothese, die zur Erklärung der Aberration des Lichtes so gute Dienste leistete, versagt bei Anwendung auf die Erklärung des MICHELSONschen Versuches. Das Ergebnis dieses Versuches spricht vielmehr für die andere Annahme, daß der Aether mit der bewegten Materie, in diesem Falle also mit der Erdatmosphäre, mitgeführt wird. Denn, wenn dies der Fall ist, also die Lage des Aethers und damit die ganze von ihm getragene Lichtbewegung relativ zu den einzelnen Teilen des Apparates ungeändert bleibt, ob wir den Apparat bewegen (Fall β) oder nicht, (Fall α)**) ist die beobachtete Tatsache, daß keine Frangenverschiebung stattfindet, fast selbstverständlich. — Diese Hypothese vom mitgeführten Aether ist vor allem von HEINRICH HERTZ verfolgt und liegt seinen elektrodynamischen Theorien zugrunde. Wir sagen daher:

Satz 2. — *Der MICHELSONsche Versuch widerspricht der Hypothese vom ruhenden Aether, er spricht vielmehr für die H. HERTZsche Hypothese, daß der Aether von der Materie (Erde) mitgeführt wird.*

Erwähnt sei hier noch die geistvolle Hypothese von H. A. LORENTZ und G. F. FITZGERALD, durch die sie versuchten, den Widerspruch zwischen der Hypothese vom ruhenden Aether und dem Ergebnis des MICHELSONschen Versuches zu beheben. Die aus dieser Hypothese errechnete Frangenverschiebung verschwindet, d. h. die Gangunterschiede zwischen den beiden Teilen des betrachteten Zentralstrahles werden auch im Falle β gleich 0, wenn man annimmt, daß der Arm des Apparates, der den Spiegel S_1 trägt, gegenüber seiner Länge l im Falle α in bestimmtem Verhältnis verkürzt ist; denn ersetzen wir in der ersten Formel (4) l durch $l \cdot \sqrt{1-q^2}$ so wird tatsächlich $t_1 = t_2$. — H. A. LORENTZ und G. F. FITZGERALD nehmen nun an, daß ein jeder bewegter Körper in der Bewegungsrichtung eine Verkürzung in jenem Verhältnisse erfährt, und zwar als bloße Folge eben der Bewegung, unabhängig von seinen elastischen Eigenschaften, denn wenn diese hereinspielten, müßte ja die Verkürzung je nach dem Material verschieden, und daher der Erfolg des MICHELSONschen Versuches von dem Material abhängig sein, aus dem der Apparat gebaut ist.

Zusatz. — *H. A. LORENTZ und G. F. FITZGERALD suchten das Ergebnis des MICHELSONschen Versuches mit der Hypothese vom ruhenden*

---

*) Auf experimentelle Einzelheiten gehe ich natürlich nicht ein, möchte aber bemerken, daß bei der wirklichen Ausführung der Versuche stets eine Drehung des Apparates um 90° vorgenommen wurde (so daß einmal AS_1, das andere Mal AS_2 in die Fortschreitungsrichtung der Erde fiel), nicht, wie im Text geschildert, um 45°. Doch dürfte diese letztere Darstellung leichter zu übersehen sein und doch das Prinzipielle bereits völlig erkennen lassen, weshalb ihr der Vorzug gegeben ist. Vor allem hat die bei ihr benutzte Mittelstellung des Apparates (im Falle α) den Vorteil, daß bei ihr jeder Einfluß der Erdbewegung ausgeschaltet ist, wir also berechtigt sind, die Fälle α und β als die Fälle des ruhenden und des bewegten Apparates zu bezeichnen.

**) Vgl. hierzu den Schluß der letzten Anmerkung.

Aether dadurch in Einklang zu bringen, daß sie annahmen, daß alle Körper bei einer Bewegung (Geschwindigkeit v gegen den Aether) in der Bewegungsrichtung eine Verkürzung im Verhältnis $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} : 1$ *erfahren, wenn c die Lichtgeschwindigkeit bedeutet.*

Auf diese LORENTZ-FITZGERALDsche Kontraktionshypothese, die für die Entwicklung der Relativitätstheorie von größter Bedeutung geworden ist, werden wir noch später zurückkommen. — Den älteren Auffassungen von der Natur starrer Körper widersprach sie aber zu sehr, als daß sie allgemein hätte Eingang finden können, und so blieb der Widerspruch zwischen der Erscheinung der Aberration des Lichtes und dem Ergebnis des MICHELSONschen Versuches bestehen: Die Hypothese über den Aether, die die eine Erscheinung erklärte, widersprach der anderen.

Bevor wir hieraus weitere Schlußfolgerungen ziehen, wollen wir noch eine dritte Erscheinung besprechen.

III. Der FIZEAUsche Mitführungsversuch.

FIZEAU stellte im Jahre 1851 einen Versuch an, um direkt zu entscheiden, ob der Aether, der Träger der Lichtfortpflanzung, sich mit der körperlichen Materie fortbewegt oder nicht. Er ließ zwei von derselben Lichtquelle L ausgehende, nahezu parallel gemachte Strahlenbüschel durch zwei nebeneinander liegende, mit planparallelen Glasplatten verschlossene Röhren ihrer Länge nach hindurchgehen. Beide Röhren waren mit Wasser gefüllt, während aber das Wasser in der einen sich in Ruhe befand, konnte man das in der anderen mit verschiedenen Geschwindigkeiten v durch sie hindurchströmen lassen. Nach Durchgang durch die Röhren vereinigte er die Strahlen wieder auf einem Schirm, wo sie miteinander interferierten *).

Wenn das Wasser zunächst auch in der zweiten Röhre in Ruhe war, mußte natürlich bei vollständiger Symmetrie in der Mitte des Schirmes ein Maximum der Helligkeit herrschen. — Was aber ist zu

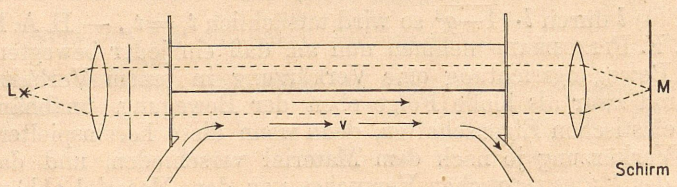


Fig. 6.

erwarten, wenn jetzt das Wasser in der zweiten Röhre mit einer gewissen Geschwindigkeit v strömt? Die Beantwortung dieser Frage wird wesentlich davon abhängen, ob man nach H. A. LORENTZ annimmt, daß der Aether ruht, oder aber, nach H. HERTZ, daß er mit der Materie, hier dem Wasser, mitgeführt wird. — Die LORENTZsche Hypothese vom ruhenden Aether besagt ja, daß die Lichtausbreitung gänzlich unabhängig von der Materie erfolgt, die Strömung des Wassers kann daher an der Erscheinung nichts ändern, die Schirmmitte müßte

*) Auch hier gehe ich auf Einzelheiten der Versuchsanordnung nicht ein, sondern beschränke mich auf die Auseinandersetzung des Prinzips.

also hell bleiben, es könnte keine Verschiebung der Interferenzfrangen eintreten. — Anders nach der Hertzschen Hypothese vom mitgeführten Aether: Nehmen wir an, daß Strömungsrichtung und Strahlenrichtung zusammenfallen, so wird nach dieser Hypothese der Aether mitsamt der von ihm getragenen Lichterregung noch seinerseits mit der Geschwindigkeit v in derselben Richtung verschoben, infolgedessen würde die Lichterregung durch die Röhre mit strömendem Wasser rascher hindurchgehen als durch die andere, es entstände ein Gangunterschied zwischen den interferierenden Strahlen, und daher auch eine Verschiebung der Interferenzfrangen von einer leicht auch zu berechnenden Größe. — Die Beobachtung zeigt nun, daß tatsächlich eine Verschiebung eintritt, aber nicht von der auf Grund dieser Ueberlegungen berechneten Größe. Die beobachtete Verschiebung entsprach vielmehr der Annahme, daß die Geschwindigkeit der Lichterregung nur um einen Bruchteil der Geschwindigkeit v des strömenden Wassers gesteigert würde, und dieser Bruchteil ϑ änderte sich, wenn man das Wasser durch andere Flüssigkeiten ersetzte. Man wird also den beobachteten Tatsachen gerecht, wenn man sich vorstellt, daß der Aether von verschiedenen Flüssigkeiten in verschiedenem Maße mitgerissen, niemals aber ganz mitgenommen wird. Des Näheren ergab sich folgender

Satz 3. — *Der Fizeausche Versuch über die Fortpflanzung des Lichtes in strömenden Flüssigkeiten widersprach sowohl der Annahme, daß der Aether ruhe, als auch der, daß er mit der Strömungsgeschwindigkeit mitgeführt würde, er spricht höchstens für die neue Annahme, daß die Aethergeschwindigkeit nur um einen noch vom Brechungsexponenten n der Flüssigkeit abhängigen Bruchteil ϑ der Strömungsgeschwindigkeit geändert würde, und zwar ergab sich*

$$5) \qquad \vartheta = 1 - \frac{1}{n^2}. \quad (\textit{Fresnelscher Mitführungskoeffizient}).$$

Da für das Vakuum $n = 1$, und für Luft sowie für die meisten Gase n sehr nahe bei 1 liegt, führt diese Fresnelsche Hypothese bei Anwendung auf Gase, also z. B. auch auf die Atmosphäre, zu der Lorentzschen Annahme eines ruhenden Aethers zurück. Die Aberration des Lichtes würde ihr also nicht widersprechen, hingegen wäre sie nicht imstande, das Resultat des Michelsonschen Versuches zu erklären.

So lehren denn die bisherigen Betrachtungen dieses Paragraphen, daß keine der drei von Lorentz, Hertz und Fresnel gemachten Annahmen über die relative Bewegung von Aether und Materie imstande ist, die Gesamtheit der beobachteten Erscheinungen zu erklären, und damit erfährt denn die „Aetherhypothese“ überhaupt einen schweren Stoß, es ist hiernach für einen körperlich zu denkenden Aether kein Platz mehr in der Physik — ich sage „körperlich zu denkenden“ Aether, denn es mag unbenommen bleiben und dürfte sogar einem gewissen Bedürfnis des menschlichen Geistes entsprechen, auch im Vakuum ein gewisses Etwas als Träger der optischen und elektromagnetischen Erscheinungen anzunehmen, und niemand natürlich kann uns hindern, dieses gewisse Etwas als „Aether“ zu bezeichnen, aber körperlich dürfen wir uns diesen Aether jedenfalls nicht mehr vorstellen; die Körpernatur des Aethers muß man fallen lassen, denn wohl mit das

erste, was wir vom „Körper“ verlangen, ist, daß wir entscheiden können, ob er ruht oder sich bewegt (relativ zu anderen Körpern), und beim Aether können wir dies nicht — verschiedene Erscheinungen geben auf die Frage hiernach, wie wir sahen, ganz verschiedene Auskunft.

Diese Erkenntnis, daß wir die Vorstellung von einem körperlichen Aether als Träger der optischen Erscheinungen aufgeben müssen, zwingt uns zunächst überhaupt auf jede greifbare mechanische Veranschaulichung des Vorganges der Lichtausbreitung zu verzichten. Ein Verzicht auf die genaue Kenntnis der Gesetze der Lichtausbreitung hat aber weit tiefer greifende Folgen, die in ihrer vollen Tragweite zuerst wohl Einstein erkannte; ein solcher Verzicht bringt es nämlich mit sich, daß der Begriff der Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse an verschiedenen Orten jede physikalisch greifbare Bedeutung verliert. Damit aber würde die der Mechanik zugrunde liegende Vorstellung von dem universellen Charakter der Zeit, wie wir sie oben besprochen haben, schwer erschüttert.

Nach dieser älteren Auffassung gibt es ein „gleichzeitig“ unabhängig vom Orte; man nennt 2 Ereignisse auch an verschiedenen Orten gleichzeitig, wenn bei ihrem Eintritt die „Newtonsche Normaluhr“ gleich zeigt, denn diese gibt ja, wie bereits ausgeführt wurde, ebenso an dem einen wie an dem anderen Orte die absolute Zeit an. Wir wollen nun aber einmal versuchen, diese Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse an verschiedenen Orten wirklich festzustellen, oder wenigstens ein dem gleichwertiges Problem zu lösen: Wir denken uns an den beiden verschiedenen Orten der Ereignisse Uhren aufgestellt. Dann sagt man, die Ereignisse wären gleichzeitig, wenn diese Uhren bei ihrem Eintritt gleiche Zeit angeben — vorausgesetzt, daß die Uhren „gleich gehen“, d. h. natürlich, daß sie zu gleicher Newtonscher Zeit wenigstens untereinander gleich zeigen.*) Die Feststellung der Gleichzeitigkeit von 2 Ereignissen an verschiedenen Orten ist also gleichwertig mit dem anderen Probleme, 2 Uhren an diesen Orten „gleich zu richten“ oder „gleichlaufend zu machen“, und nur mit diesem Problem wollen wir uns daher weiterhin beschäftigen.

Wie kann nun ein solches „Gleichrichten“ zweier Uhren an verschiedenen Orten geschehen? Wenn wir die der älteren Mechanik ganz geläufige mathematische Abstraktion des absolut starren Körpers, z. B. einer absolut starren die Orte verbindenden Stange, zu Hilfe nehmen, so bildet dieses Problem des Uhrenrichtens gar keine Schwierigkeit; in der physikalischen Praxis ist man aber, wenigstens bei etwas größerer Entfernung der Orte gezwungen, zur Lösung dieses Problems optische (bzw. elektrische) Hilfsmittel heranzuziehen, und tatsächlich werden sämtliche Uhrenvergleichungen auf größere Entfernungen durch Lichtsignale ausgeführt (worunter wir natürlich drahtlose elektrische Signale mitverstehen), oder mittels astronomischer Messungen, also wieder unter Zuhilfenahme optischer Strahlengänge. Alle diese optischen Methoden werden aber von eben jener Unsicherheit betroffen, die unserer Vorstellung über die Lichtausbreitung in bewegten Körpern anhaften. Denn die verschiedenen Annahmen, die man über die Lichtausbreitung macht, führen auch immer zu

*) Auf die Geschwindigkeit ihres Ganges oder darauf, wie ihre Angaben sich zu denen der Newtonschen Normaluhr verhalten, kommt es augenscheinlich hier, wo es sich um keine Zeitmessungen handelt, gar nicht an.

verschiedenen Arten, die Uhren zu richten: Denken wir uns etwa 3 Orte, die in westöstlicher Richtung in gleichen Entfernungen voneinander liegen, sagen wir Paris, Stuttgart und Wien, auf die diese Voraussetzungen angenähert zutreffen, und nehmen wir an, es sollen 2 in Paris und Wien befindliche Uhren gleichgerichtet werden. Dann liegt es nahe, von Stuttgart ein Lichtsignal auszusenden und die Uhren in Paris und Wien bei dessen Eintreffen auf gleiche Zeit zu stellen (die etwa vorher verabredet sein mag). Wenn man diesen Versuch immer wieder und wieder anstellt, also die Uhren in dieser Weise fortdauernd reguliert, wird man geneigt sein, zu sagen, die Uhren zeigten immer gleiche Zeit an, sie „gingen gleich", und gegen diese Schlußweise ließe sich auch nichts einwenden, wenn die Erde nicht eine Bewegung besäße, über deren Beziehung zur Lichtausbreitung wir nichts Genaues wissen. Das obige Verfahren entspricht der Annahme, daß das Licht relativ zur Erde mit einer konstanten Geschwindigkeit fortschritte, also unserer früheren Annahme vom mitgeführten Aether nach H. Hertz, nach der das Licht sich eben gleichförmig in einem mit der Atmosphäre (oder der Erde) mitgehenden Körper fortpflanzt. Machen wir aber die andere Annahme, daß die Lichtausbreitung ganz unabhängig von der Bewegung der materiellen Körper vor sich ginge (daß der Aether ruhe, wie wir früher sagten), so wird infolge der Erdumdrehung*) die Uhr in Wien vor dem heraneilenden Lichtsignale gleichsam ausweichen, die Uhr in Paris ihm aber entgegeneilen, also würde bei Eintreffen des Signales in Wien die Newtonsche Normaluhr schon weiter vorgerückt sein als beim Eintreffen in Paris, und wir werden daher, wenn die Uhren an diesen beiden Orten (nach der Normaluhr) gleichgehen sollen, jetzt die Uhr in Wien beim Eingang des Signales auf etwas spätere Zeit stellen müssen als die Uhr in Paris, wenn dort das Signal eingeht. — Das Ergebnis dieser Ueberlegungen können wir nach unseren obigen Ausführungen auch folgendermaßen aussprechen: *Ohne Entscheidung der Frage, ob und wie die Lichtausbreitung von der Bewegung der Materie beeinflußt wird, ist man nicht imstande, experimentell festzustellen, ob Ereignisse an verschiedenen Orten gleichzeitig sind oder nicht.*

Diese Unmöglichkeit beruht danach nicht etwa auf der Unvollkommenheit unserer Meßmethoden, sie ist vielmehr prinzipieller Natur. Für den Physiker haben aber nur Dinge einen Wert, die er durch fortgesetzte Verfeinerung seiner Meßmethoden wenigstens mit immer größerer Annäherung bestimmen kann. Das traf aber auf die Gleichzeitigkeit an verschiedenen Orten nicht zu, denn zu einer alle Erscheinungen gleichmäßig erklärenden Vorstellung über die Lichtausbreitung in bewegten Körpern, wie sie die Voraussetzung hierfür gewesen wäre, war man eben nicht gekommen, und so kam Einstein auf den Gedanken, daß es eine Gleichzeitigkeit an verschiedenen Orten, eine Gleichzeitigkeit schlechtweg, unabhängig vom Orte, *überhaupt nicht gäbe.*

Von Gleichzeitigkeit darf man nach Einstein nur bei Ereignissen am selben Orte sprechen**), denn tatsächlich nehmen die Unterschiede,

*) Von der Bewegung der Erde im Raume (gegen den Fixsternhimmel) sehen wir hier im Augenblick ganz ab.

**) Hiervon haben wir schon oben Gebrauch gemacht, als wir die Zeiten der beiden Ereignisse auf zwei an ihren Orten befindliche Uhren übertrugen.

auf welche die verschiedenen Annahmen über die Lichtausbreitung beim Richten von Uhren führen, mit abnehmender Entfernung immer mehr ab, so daß man also in der Grenze wirklich zu einer von den speziellen Annahmen unabhängigen Art der Uhrenvergleichung kommt, und so darf man denn nach Einstein Ereignisse zeitlich immer nur beziehen auf Uhren, die am Orte des Ereignisses selber aufgestellt sind, jede Stelle x, y, z in einem räumlichen Bezugssystem ist mit ihrer eigenen Zeitmessung (Uhr) ausgestattet zu denken, den Begriff einer universellen Zeit, gleichsam einer für alle Stellen und alle Bezugssysteme in gleicher Weise gültigen Normaluhr leugnet Einstein, so fest diese Vorstellung auch eingewurzelt ist, und in dieser Befreiung von der Vorstellung der universellen Zeit möchte ich mit die größte Tat Einsteins erblicken.

Einsteinsches Zeit-Prinzip. — *Der Newtonsche Begriff einer universellen Zeit, die Vorstellung von einer an allen Orten und in allen Bezugssystemen maßgebenden Normaluhr ist unhaltbar, man muß vielmehr jeder Stelle in einem Bezugssysteme ihre individuelle Zeitmessung (Uhr) zugeordnet denken.*

So wird nach dieser Einsteinschen Auffassung die Zeitmessung abhängig vom Orte. Wie es auch schon nach den älteren Anschauungen klar ist, daß, wenigstens sobald bewegte Koordinatensysteme in Frage kommen, eine Ortsangabe ohne Zeitangabe keinen Sinn hat, die Bestimmung eines Ortes durch Angabe seiner Koordinaten x, y, z vielmehr erst eine reale Bedeutung erhält durch die weitere Angabe, auf welche Zeit und damit auf welche Lage des Koordinatensystems sich die Ortsangaben beziehen — genau so hat es nach dieser neuen Einsteinschen Auffassung auch keinen Sinn, schlechtweg zu sagen, ein Ereignis finde zu der und der Zeit statt, man muß zugleich auch den Ort angeben an dem es stattfindet, denn erst dadurch wird die Uhr bestimmt, auf die sich diese Zeitangabe bezieht.

So sind also Ortsangaben für ein Ereignis ohne Zeitangaben, ebenso aber auch Zeitangaben ohne Ortsangaben unvollständig. Ortsangaben und Zeitangaben müssen sich stets ergänzen, Raumkoordinaten x, y, z und Zeitparameter t sind nicht voneinander zu trennen. Man nennt sie zusammen die „Raumzeitkoordinaten“ des betrachteten Ereignisses und spricht demgemäß auch von einem „Raumzeitkoordinatensystem“ oder kürzer „Raumzeitsystem“. Ein solches besteht zunächst aus einem gewöhnlichen räumlichen Koordinatensystem (Achsenkreuz), auf das sich die Angaben von x, y, z beziehen, und sodann aus irgendwelchen Uhren zur Messung von t — aber wohlgemerkt ist jetzt jede Stelle x, y, z mit ihrer besonderen Uhr versehen zu denken. Wenn wir dann z. B. einem Massenpunkt m seine Raumzeitkoordinaten beifügen und schreiben:

$$m\ (x,\ y,\ z,\ t),$$

so sagen wir damit, daß dieser Massenpunkt in dem zugrundegelegten Raumzeitkoordinatensysteme die Raumkoordinaten x, y, z besitzt, wenn die an dieser Stelle befindliche Uhr dieses Systems die Zeit t anzeigt.

Zur Begründung dieser engen Verbindung von Raumangaben und Zeitangaben sagte Minkowski in seinem berühmten Vortrage*) über

*) Abgedruckt z. B. im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Jahrgang 18 (1909) S. 75, auch als Sonderdruck ausgegeben. — Von neuem abgedruckt in der von Blumenthal herausgegebenen Sammlung: Fortschritte der mathematischen Wissenschaften in Monographien, Heft 2 (Leipzig und Berlin 1913, bei Teubner) S. 56–68.

„Raum und Zeit“ auf der Kölner Naturforscherversammlung im Jahre 1908, der letzten, die er erleben sollte: „Es hat niemand einen Ort anders bemerkt als zu einer Zeit und eine Zeit anders als an einem Orte“ und wir verstehen die Worte, in die er zu Eingang dieses Vortrages das Wesen der neueren Anschauungen zusammenfaßte: „Von Stund an sollen Raum für sich und Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken und nur noch eine Art Union der beiden soll Selbständigkeit bewahren.“

Zurückblickend auf unsere bisherigen Betrachtungen müssen wir feststellen, daß sie wesentlich destruktiven Charakter tragen: Die uns fast in Fleisch und Blut übergegangene Vorstellung von einer universellen Zeit, die unabhängig vom Orte und vom räumlichen Bezugssysteme überall gilt, ist zerstört, und zunächst ist alles andere eher als eine Vereinfachung unserer Grundvorstellungen erreicht: an die Stelle dieser einen universellen, absoluten Zeit, die den Physikern, Astronomen und Philosophen schon soviel Kopfzerbrechen bereitet hat, tritt jetzt für jede Stelle eine neue Zeitrechnung, an Stelle einer für das ganze Weltall maßgebenden (Newtonschen) Normaluhr haben wir uns jetzt jede Stelle in jedem Bezugssystem mit einer besonderen Uhr ausgestattet zu denken, und über die Zusammenhänge, die zwischen allen diesen Uhren bestehen, wissen wir einstweilen noch nichts. — Erst im nächsten Paragraphen beginnt wieder aufbauende Arbeit, dort werden wir damit beginnen, in dieses Chaos wieder neue Ordnung zu bringen und zwar wird uns dabei als Leitstern die Forderung des Relativitätsprinzips dienen, den Naturgesetzen invariante Form gegenüber Koordinatentransformationen zu geben. — Von vornherein ist aber das eine klar, daß unsere Grundvorstellungen, namentlich über die Zeitrechnung, jetzt weit anpassungsfähiger geworden sind, wie sie ehedem waren, und das ist die Vorbedingung, die uns gestatten wird, jenes Ziel zu erreichen — erst auf den Trümmern der universellen Zeit konnte die Relativitätstheorie erstehen. —

Bevor wir aber diese Theorie entwickeln, wollen wir die 3 Erscheinungen, die zu Beginn dieses Paragraphen eingehend besprochen wurden, noch einmal vom Standpunkte des Relativitätsprinzips aus betrachten. Unter den verschiedenen Formulierungen, die wir diesem Prinzipe oben gaben, lautete die eine dahin, daß gleiche Laboratoriumsversuche parallel in zwei gegeneinander bewegten Laboratorien angestellt, gleich ablaufen müssen. Das bestätigt voll und ganz der Michelsonsche Versuch: bei ihm wurden 2 gleiche Parallelversuche angestellt (oben Fall α und Fall β), von denen der eine (α), da ja durch die Anordnung ein Einfluß der Bewegung eliminiert war, als in einem (gegen den Fixsternhimmel) ruhenden Laboratorium angestellt angesehen werden kann, der andere (β) in einem bewegten*) — und tatsächlich laufen beide Versuche genau gleich ab.

Bei der Erscheinung der Aberration des Lichtes und beim Fizeauschen Mitführungsversuch läßt sich das Relativitätsprinzip nicht in dieser einfachen Weise prüfen, denn es handelt sich in diesen beiden Fällen nicht um „reine Laboratoriumsversuche“. Wenn wir auch bei der Beobachtung der Aberration von 2 gegeneinander be-

*) Vgl. die erste Anmerkung S. 31.

wegten Laboratorien sprechen können, die dargestellt werden durch die Sternwarte, auf der beobachtet wird, in den beiden verschiedenen Lagen bei E und E' in Figur 3a S. 26, so handelt es sich doch um die Beobachtung einer außerhalb der Laboratorien befindlichen Erscheinung (des Lichtes von einem Fixstern) von diesen Laboratorien aus, also in unserer früheren Bezeichnungsweise um eine „interlaboratorielle Beobachtung" — und ebensowenig kann man die beiden Parallelversuche, die FIZEAU anstellte, nämlich einmal mit stehendem, das andere Mal mit strömendem Wasser in der zweiten Röhre als parallele Laboratoriumsversuche in gegeneinander bewegten Laboratorien deuten, denn das würde voraussetzen, daß bei dem einen Versuche alles, was zu dem Versuche gehört, mit bewegt würde, und das ist auch hier nicht der Fall. — So können wir denn aus diesen beiden Erscheinungen zunächst nichts über die Richtigkeit oder Ungültigkeit des Relativitätsprinzipes folgern. Wir fassen zusammen:

Satz 4. — *Das Ergebnis des MICHELSONschen Versuches steht in bestem Einklang mit dem Relativitätsprinzip, denn nach ihm fällt ein Laboratoriumsversuch, gleich angestellt in zwei gegeneinander bewegten Laboratorien, völlig gleich aus. — Die Erscheinungen der Aberration des Lichtes und der FIZEAUsche Mitführungsversuch sprechen ebenfalls zum mindesten nicht gegen dieses Prinzip.*

§ 4.

Die Problemstellung von EINSTEIN. Voruntersuchung.

Als Aufgabe der speziellen Relativitätstheorie haben wir oben S. 7 die Aufstellung von Naturgesetzen bezeichnet, die invariant bleiben beim Uebergang von einem Bezugssystem (Laboratorium $\mathfrak{L}$) zu geradlinig gleichförmig dagegen bewegten Systemen ($\mathfrak{L}'$).*) — Diese Eigenschaft besaßen bereits die Gesetze der klassischen Mechanik, in ihr galt ja das GALILEIsche Relativitätsprinzip, welches eine solche Invarianz aussagte. Wir können das in der auf S. 6 eingeführten Symbolik so ausdrücken: Sind die Gesetze der klassischen Mechanik (wie z. B. die NEWTONschen Grundgleichungen) in beiden Laboratorien dargestellt durch die Gleichungen

$$\mathfrak{M}\{x,\ y,\ z,\ t\} = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \mathfrak{M}'\{x',\ x',\ z',\ t'\} = 0,$$

so ist

$$\mathfrak{M}' \equiv \mathfrak{M},$$

wenn beide Systeme GALILEI-Systeme sind, also die Koordinaten durch GALILEI-Transformationen

$$\text{(G)} \qquad \begin{aligned} x' &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + a + \mathfrak{a} t \\ y' &= \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z + b + \mathfrak{b} t \\ z' &= \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z + c + \mathfrak{c} t \end{aligned} \qquad \text{[vgl. (5) S. 19]}$$

*) Es sei hier nochmals daran erinnert, daß es sich hier im ersten Teile des Buches ein für allemal nur um Gesetze handelt, nach denen „reine Laboratoriumsversuche" ablaufen, daß also vor allem alle äußeren Gravitationswirkungen ausgeschlossen zu denken sind [vgl. S. 5], ebenso wie auch stets nur Laboratorien $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$ betrachtet werden, die in geradlinig gleichförmiger Bewegung gegeneinander begriffen sind.

auseinander hervorgehen, und, entsprechend der die klassische Mechanik beherrschenden Auffassung von der universellen Zeit,

$$(G') \qquad t' = t$$

gesetzt ist, also angenommen wird, daß einem Ereignis eine vom Bezugssystem unabhängige Zeit entspricht.

In den anderen Gebieten der Physik war es nicht gelungen, zu derartig invarianten Naturgesetzen zu gelangen. Wenn man die Gesetze, die man da aufgestellt hatte, für zwei Systeme in der symbolischen Form*) schrieb:

$$\mathfrak{N}\{x, y, z, t\} = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \mathfrak{N}'\{x', y', z', t'\} = 0,$$

so war nicht $\mathfrak{N}'$ mit $\mathfrak{N}$ identisch, falls zwischen x, y, z, t und x', y', z', t' die Beziehungen (G) und (G') bestanden; beim Festhalten an der universellen Zeit, wie sie in (G') zum Ausdruck kommt, war nicht Invarianz beim Uebergang zwischen geradlinig gleichförmig bewegten Systemen zu erreichen. — Da man nun aber nach der neuen Einsteinschen Auffassung jedem Punkte x, y, z seine eigene Zeit entsprechen lassen, seine eigene Zeitrechnung (Uhr) zuordnen kann, so schloß Einstein weiter, wäre es vielleicht möglich, durch passende Wahl dieser Zuordnung die Invarianz zu erreichen.

Etwas konkreter kann man diesen Einsteinschen Grundgedanken auch so darstellen: Man denke sich die beiden Laboratorien $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$ in geradlinig gleichförmiger Bewegung gegeneinander**), etwa das erste fest auf der Erde in einem Gebäude, das andere bewegt in einem auf geradliniger Strecke gleichmäßig dahinfahrenden Eisenbahnwagen***). Nun handele es sich darum, diese beiden Laboratorien mit Meßinstrumenten für Längen- und Zeitmessungen auszustatten. Da bekommt zunächst also jedes Laboratorium einen Längenmaßstab (Einheitsstab) und dann Uhren, aber nicht etwa jedes Laboratorium eine Uhr, sondern der neueren Einsteinschen Auffassung entsprechend ein ganzes System von Uhren, man hat eben an jeder Stelle in jedem Laboratorium eine Uhr aufgestellt zu denken†) — und nun fragt Einstein, ob es nicht möglich ist, diese beiden Maßstäbe und diese beiden Uhrensysteme in den Laboratorien so zu regulieren, so aufeinander abzustimmen, daß jetzt parallele Versuche, ausgeführt ganz im Innern der beiden Laboratorien und gemessen mit den Maßstäben und Uhren des betreffenden Laboratoriums, genau gleich ablaufen, oder anders ausgedrückt, daß bei Zugrundelegung dieser Maßstäbe und Uhren die Naturgesetze invariant sind beim Uebergange von einem Laboratorium (Raumzeitsystem) zu dem anderen. *Also durch passende Wahl der Maßstäbe und Uhren in beiden Systemen sucht Einstein der Forderung des Relativitätsprinzips Genüge zu leisten.*

---

*) Auf ihre explizite Darstellung brauche ich gar nicht einzugehen.

**) Die genauere Definition dieses Begriffs im Rahmen der neuen Auffassung folgt erst unten auf S. 44.

***) In Anlehnung an diese Vorstellungen werden wir im folgenden häufig kurz von dem „festen System $\mathfrak{L}$“ und von dem „bewegten System $\mathfrak{L}'$“ sprechen, ohne damit natürlich einen tatsächlichen Unterschied zwischen beiden Systemen behaupten zu wollen.

†) Früher, als es nur eine Zeitrechnung gab, sprachen wir von verschiedenen „Laboratorien“ als Repräsentanten verschiedener räumlicher Bezugssysteme. — Jetzt gestalten wir die Laboratorien durch Aufstellung der Uhren zu Raumzeitsystemen im oben S. 36 definierten Sinne aus.

Dieses Problem, die Instrumentarien der beiden Laboratorien dieser Forderung entsprechend aufeinander abzustimmen, wollen wir nun auch analytisch zu formulieren suchen. Wir fragen zunächst: wie geben wir überhaupt den Zusammenhang zwischen zwei Raumzeitsystemen (Laboratorien) an? Die Beantwortung der entsprechenden Frage für zwei reine Raumsysteme ist bekannt: man betrachtet einen Raumpunkt von beiden Systemen aus, d. h. seine Raumkoordinaten x, y, z und x', y', z', und gibt dann den Zusammenhang zwischen den Systemen an, indem man die Beziehungsgleichungen zwischen diesen Koordinaten aufstellt [vgl. z. B. oben (2a) und (2b) S. 13—14]. — Ganz entsprechend geht man auch bei Raumzeitsystemen vor: man betrachtet einen „Raumzeitpunkt", d. h. einen Raumpunkt zu einem Zeitpunkte, oder ein „Ereignis", das in diesem Raumpunkte zu diesem Zeitpunkte eintritt, wie z. B. eine Explosion. Dann kann man dieses Ereignis seiner Lage nach bestimmen durch die Abmessungen x, y, z seines Ortes zu dem Achsenkreuz des ersten Raumzeitsystems $\mathfrak{L}$ und seiner Zeit nach durch die Angabe t der dort befindlichen Uhr desselben Systems. Genau ebenso können wir es aber auch durch Angabe seiner Raumzeitkoordinaten x', y', z', t' in einem zweiten Systeme $\mathfrak{L}'$ bestimmen. In den Gleichungen, welche den Zusammenhang zwischen diesen Raumzeitkoordinaten x, y, z, t und x', y', z', t' desselben Ereignisses in zwei verschiedenen Raumzeitsystemen angeben, und die etwa nach x', y', z', t' aufgelöst, so lauten mögen:

$$1) \quad x' = x'(x, y, z, t), \quad y' = y'(x, y, z, t), \quad z' = z'(x, y, z, t), \quad t' = t'(x, y, z, t),$$

hat man dann wieder den analytischen Ausdruck auch für den Zusammenhang der Raumzeitsysteme zu erblicken. Wenn wir also eine bestimmte Art des Zusammenhanges zwischen den beiden Raumzeitsystemen $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$ ermitteln wollen, so heißt das: wir müssen die Beziehungsgleichungen (1) der betreffenden Forderung gemäß zu bestimmen suchen, und wir können daher sagen: *Das* Einsteinsche *Problem, die Instrumentarien der beiden Laboratorien $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$ dem Relativitätspostulate gemäß aufeinander abzustimmen, lautet analytisch formuliert folgendermaßen: Es sollen die Beziehungsgleichungen* (1) *zwischen den Raumzeitkoordinaten ein und desselben Ereignisses (Raumzeitpunktes) in den beiden Systemen:*

$$x' = x'(x, y, z, t), \quad y' = y'(x, y, z, t), \quad z' = z'(x, y, z, t), \quad t' = t'(x, y, z, t),$$

so ermittelt werden, daß sämtliche Naturgesetze ungeändert bleiben, wenn man sie mittels jener Gleichungen von dem einen in das andere System umrechnet, so daß also in unserer obigen Symbolik ganz allgemein $\mathfrak{N}' \equiv \mathfrak{N}$ wird.

Danach sind also die Substitutionsgleichungen zu ermitteln, die für beliebige Naturgesetze dasselbe leisten, was die Gleichungen (G) und (G') für die Gesetze der Mechanik leisteten, denn diese ließen ja deren Gesetze invariant, machten $\mathfrak{M}' \equiv \mathfrak{M}$.

Wie nun Einstein dieses Problem löst, das wir jetzt sowohl mehr physikalisch anschaulich als auch rein analytisch formuliert haben, soll in den beiden folgenden Paragraphen auseinandergesetzt werden; dort wird angegeben werden, wie er sich die Laboratorien mit Instrumenten versehen denkt, und dort werden auch die Beziehungsgleichungen (1) explizit, wenigstens unter nicht wesentlich einschränkenden Voraussetzungen, entwickelt werden. Doch zuvor wollen wir uns noch Rechen-

schaft abzulegen suchen, inwieweit das Problem überhaupt bestimmt ist, inwieweit die Forderung des Relativitätsprinzips (das „Relativitätspostulat") genügt, die Beziehungen zwischen den beiden Instrumentarien festzulegen, denn erst bei völliger Klarheit darüber kann man das Wesen speziell der Einsteinschen Lösung recht beurteilen.

Bei dieser Voruntersuchung wollen wir uns der Einfachheit halber auf das Problem des Uhrenrichtens*) beschränken, also die Längenmaßstäbe in beiden Laboratorien von vornherein gegeben denken, und wir wollen auch über Raum und Zeit von vornherein die Annahme ihrer Homogenität machen [vgl. S. 17 u. 10]. Diese Vorstellungen, die wir mit Newtons absolutem Raume und der absoluten Zeit der Mechanik verbanden, wollen wir also übernehmen und zu leitenden Prinzipien bei unserer Untersuchung erheben. Wir sprechen in diesem Sinne von den „*Postulaten*" der Homogenität von Raum und Zeit, und formulieren daher unsere Frage jetzt genauer folgendermaßen: *Inwieweit ist das Problem, die Uhren in den beiden Laboratorien aufeinander abzustimmen, durch die Postulate der Homogenität von Raum und Zeit und durch das Relativitätspostulat bestimmt?*

Das Postulat der Homogenität der Zeit gestattet bereits die Uhren jedes Systems bis zu einem gewissen Grade zu richten. Das wurde schon oben S. 10 für die Uhr, welche die der Mechanik zugrunde liegende universelle Zeit angibt, ausgeführt. Hier liegen nun allerdings die Verhältnisse etwas anders: Wenn wir jetzt wieder einen Massenpunkt etwa durch eine gespannte Feder in Bewegung setzen, und die Zeit, welche er braucht, um eine bestimmte Strecke zu durchlaufen, gleichsam als Grundzeit benutzen wollten, die wir durch Wiederholung desselben Versuches (eben dem Prinzipe von der Homogenität der Zeit zufolge) immer von neuem reproduzieren und zur Regulierung einer Uhr verwenden könnten, so ist jetzt zu beachten, daß wir diese Zeitdauer erst durch Bildung der Differenz zwischen den Angaben zweier verschiedener Uhren feststellen könnten, der Uhr im Ausgangspunkte und der Uhr bei der Marke im Endpunkte der Strecke, denn jedes Ereignis (Abgang und Ankunft) kann man ja jetzt nach der Einsteinschen Auffassung nur zeitlich festlegen mittels einer Uhr am Orte des Ereignisses selbst. Um also zunächst jede zweite Uhr auszuschalten, werden wir eine Versuchsanordnung benutzen, bei der das betrachtete Mobil wieder zum Ausgangspunkt zurückkehrt, wie z. B. ein Punkt eines durch eine Feder in Drehung um seine Achse versetzten Rades. Dann kann ich die Zeit τ bis zur Rückkehr des Punktes aus Ablesungen an ein und derselben Uhr bestimmen und diese dann genau nach den oben auf S. 10 auseinandergesetzten Prinzipien durch fortgesetzte Wiederholung des Versuches dauernd reguliert denken. Unbestimmt bleibt wieder nur eine erstmalige Stellung der Uhr (also die Anfangszeit) und die Ganggeschwindigkeit (also die Zeiteinheit) [vgl. S. 10]. — Bis auf diese beiden Unbestimmtheiten nehmen wir also jetzt eine Grunduhr $\mathfrak{U}_0$ — wir werden sie uns immer im An-

*) Wir werden im folgenden bei diesem Probleme scharf zu unterscheiden haben zwischen dem „Stellen" der Uhren, d. h. der einmaligen Festlegung einer Zeitangabe, und dem „Regulieren" der Uhren, d. h. der Festlegung der „Ganggeschwindigkeit". Zusammenfassend werden wir „Stellen" und „Regulieren", wie auch schon früher [vgl. S. 34], als „Richten" der Uhren bezeichnen.

fangspunkte O des zu dem betrachteten Raumzeitsystem gehörigen Achsenkreuzes aufgestellt denken — reguliert an.

Doch das bisher allein benutzte Postulat von der Homogenität der Zeit enthält noch weitere Vorschriften, auch zur Regulierung der übrigen Uhren. Um das einzusehen, denken wir uns jetzt den auf S. 10 beschriebenen Versuch am Orte O der Grunduhr $\mathfrak{U}_0$, wenn diese die Zeit t_0 zeigt, angestellt. Das Mobil erreiche die Marke, wenn die dort stehende Uhr die Zeit t_1 anzeigt, und es sei

$$t_1 - t_0 = \tau,$$

und nun wiederhole man den Versuch, wenn die Grunduhr die Zeit $\bar{t}_0$ angibt. Die Marke werde jetzt erreicht zur Zeit $\bar{t}_1$, d. h. natürlich, wenn die bei ihr befindliche Uhr $\bar{t}_1$ zeigt. Dann ist nach dem Prinzipe von der Homogenität, da ja gleich angestellte Versuche auch stets zahlenmäßig gleich ablaufen sollen, wieder

$$\bar{t}_1 - \bar{t}_0 = \tau,$$

oder, wenn die Differenz zwischen den Ausgangszeiten, in der Grunduhr gemessen, gleich δ, also

$$\bar{t}_0 = t_0 + \delta$$

ist, so muß auch zwischen den Ankunftszeiten, gemessen am Orte der Ankunft, die Beziehung

$$\bar{t}_1 = t_1 + \delta$$

bestehen, denn aus $\bar{t}_1 - \bar{t}_0 = t_1 - t_0$ $(= \tau)$ folgt auch $\bar{t}_1 - t_1 = \bar{t}_0 - t_0$ $(= \delta)$, und wenn man sich also den Versuch zu den Zeiten

$$t_0, \quad t_0 + \delta, \quad t_0 + 2\delta, \quad t_0 + 3\delta, \ldots$$

wiederholt denkt, so müssen die Ankunftszeiten

$$t_1, \quad t_1 + \delta, \quad t_1 + 2\delta, \quad t_1 + 3\delta, \ldots$$

sein, und ich kann die Uhr $\mathfrak{U}_1$ am Ankunftsorte, wenn sie diese Zeiten nicht anzeigen sollte, nach den früheren Prinzipien gleichsam nach dieser Normalskala reguliert denken, und dann sagen wir, die Uhr $\mathfrak{U}_1$ besäße *„gleiche Ganggeschwindigkeit“* wie die Grunduhr $\mathfrak{U}_0$. — In dieser Weise kann man sich alle Uhren des betrachteten Raumzeitsystems auf gleiche Ganggeschwindigkeit mit $\mathfrak{U}_0$ gebracht denken. Hingegen sind die absoluten Zeitangaben der Uhren noch ganz ohne inneren Zusammenhang, denn jede einzelne Uhr kann ich ja zunächst einmalig ganz ohne Rücksicht auf die anderen Uhren beliebig stellen (z. B. bei $\mathfrak{U}_1$ das obige t_1 ganz unabhängig von t_0 wählen).

Wir werden in diesem Stadium des Uhrenrichtens sagen, die Uhren seien „alle gleich reguliert“ (d. h. alle besäßen gleiche Ganggeschwindigkeit), aber es fehle noch jede „Stellung der Uhren gegeneinander“. Diese kann das Postulat der Homogenität der Zeit auch seiner Natur nach nicht liefern, denn es fordert ja gerade, daß man an jedem Orte eine Anfangszeit willkürlich soll festsetzen dürfen. — Noch viel weniger gestattet es natürlich den Zusammenhang zwischen den Uhren der *verschiedenen* Laboratorien zu ermitteln.

Deshalb wollen wir jetzt das Relativitätspostulat heranziehen und zusehen, was uns dieses für das Problem des Uhrenrichtens in den beiden Laboratorien leistet. — Zu diesem Zwecke denken wir

also unsere beiden Laboratorien außer mit den beiden von vornherein gegebenen Längenmaßstäben ausgestattet mit je einem System gleichregulierter Uhren (Uhren gleicher Ganggeschwindigkeit). Während wir aber in dem einen, z. B. in dem festen Laboratorium $\mathfrak{L}$ diese Uhren, wenn auch willkürlich, so doch zunächst bestimmt gegeben denken, also eine Festsetzung über ihre Ganggeschwindigkeit und ebenso über die Anfangszeiten der Uhren getroffen denken, wollen wir dem auf S. 39 entwickelten Programme entsprechend die Uhren im zweiten Laboratorium $\mathfrak{L}'$ (im Eisenbahnwagen) nach Ganggeschwindigkeit und Stellung gegeneinander so zu bestimmen suchen, daß gleiche Parallelversuche in $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$ gleich ablaufen.

Da stoßen wir nun sofort auf eine große Schwierigkeit, die ich schon früher, auf S. 6, kurz streifte: Wann sind nämlich zwei Parallelversuche in beiden Laboratorien gleich? — Als gleich werde ich natürlich zwei Versuche bezeichnen, wenn die Versuchsanordnungen und Versuchsbedingungen (etwa die Anfangsbedingungen im Sinne der Mechanik) beide Male bei Messung mit den Maßstäben und Uhren des betreffenden Laboratoriums einander gleich sind. „Gleiche Versuche“ kann man daher immer erst genau definieren, wenn Längenmaßstäbe und Uhren in beiden Systemen bereits bekannt sind, nicht aber, wenn man diese in einem Laboratorium erst bestimmen will.

Und doch kann man in einem gewissen weiteren Sinne auch ohne Kenntnis der Maßstäbe und Uhren von „gleichen Versuchen“ sprechen: Wenn ich z. B. im festen Laboratorium $\mathfrak{L}$ einen Stein (Massenpunkt) in der Richtung der x-Achse fortschleudere und ihn dann sich selbst überlasse, und wenn ich dann analog im Eisenbahnwagen $\mathfrak{L}'$ einem Stein einen Stoß in der Richtung der x'-Achse gebe und ihn sich wieder selbst überlasse — so kann ich diese beiden Versuche doch in gewissem Sinne als „gleich“ bezeichnen, und doch bedarf ich zur Ausführung keines dieser beiden Versuche der Kenntnis von Maßstäben und Uhren. Dieser bedürfte ich erst, wenn gefordert würde, daß die Anfangsgeschwindigkeit in beiden Versuchen dieselbe sei, daß die Versuche also auch „quantitativ gleich“ seien. Im Gegensatz zu solchen auch quantitativ gleichen Versuchen will ich Parallelversuche der oben beschriebenen Art als nur „qualitativ gleich“ bezeichnen, und unsere obigen Ueberlegungen lehren dann also, daß man *qualitativ gleiche (nicht aber auch quantitativ gleiche) Versuche in zwei Laboratorien auch anstellen kann, ohne vorher Maßstäbe und Uhren in beiden Laboratorien zu kennen.* Wenn man also gleiche Parallelversuche benutzen will, um die Uhren des einen Laboratoriums endgültig zu richten, ist man genötigt, sich auf *qualitativ* gleiche Versuche zu beschränken.

Wenn nun bei richtiger Bestimmung der Maßstäbe und Uhren in beiden Laboratorien *quantitativ* gleiche Versuche zahlenmäßig, also wieder quantitativ gleich verlaufen sollen, so müssen unter denselben Voraussetzungen natürlich auch *qualitativ* gleiche Versuche wenigstens *qualitativ* gleich ablaufen, d. h. wenn z. B. bei einem Versuche in $\mathfrak{L}$ eine Größe linear mit der Zeit t veränderlich ist, muß auch die entsprechende Größe beim Versuche in $\mathfrak{L}'$ eine lineare Funktion der Zeit t' sein, wenn vielleicht auch mit anderen Zahlenkoeffizienten, und analog wird einer Größe, die in $\mathfrak{L}$ proportional t^2 ist, in $\mathfrak{L}'$ eine andere entsprechen, die jetzt proportional t'^2 ist, jedoch vielleicht mit anderem Proportionalitätsfaktor usw.

Dies zuvor ganz allgemein festgestellt, denken wir uns also in den

beiden Laboratorien $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$, deren Längenmaßstäbe als gegeben angesehen werden, zwei *qualitativ* gleiche Versuche angestellt, und zwar nehmen wir, um die Vorstellung zu fixieren, an, bei dem Versuche in $\mathfrak{L}$ trete eine geradlinig gleichförmige Bewegung in der x-Achse auf*). — Wir erläutern dies vorerst näher: Wir denken uns auf der x-Achse eine Anzahl äquidistanter Punkte

$$A_0, A_1, A_2, \ldots,$$

deren erster A_0 etwa mit dem Anfangspunkte O des Achsenkreuzes zusammenfalle, das mit dem Laboratorium $\mathfrak{L}$ verbunden ist. Die Abszissen dieser Punkte seien

$$x_0 = 0, \; x_1, \; x_2, \ldots,$$

d. h. dies seien die Zahlenwerte ihrer Abstände vom Nullpunkte, wenn wir die Messungen mit dem in $\mathfrak{L}$ nun einmal festgelegten Maßstabe ausführen. Die Annahme, daß die Punkte „äquidistant" sind, lautet dann natürlich

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \ldots,$$

und nun nehmen wir also an, diese gleichen Strecken würden von dem betrachteten Mobil auch in gleichen Zeiten durchlaufen (Annahme der „Gleichförmigkeit" der Bewegung); dabei sind die Zeiten aber immer am Orte des Mobils abzulesen. Die Zeit, welche dieses braucht, um z. B. von A_0 nach A_1 zu gelangen, erhält man nach dieser neuen Einsteinschen Auffassung (wie schon oben S. 41 einmal ähnlich ausgeführt wurde) als Differenz der Zeiten, die die Uhr in A_0 anzeigt, wenn das Mobil dort ausgeht, und der Zeit, welche die Uhr in A_1 zeigt, wenn es diesen Punkt A_1 erreicht. Daher bezeichnen wir denn die Angaben der Uhren in $A_0, A_1, A_2, \ldots$ immer im Augenblicke, wo das Mobil diese Stellen passiert, mit

$$t_0, \; t_1, \; t_2, \ldots$$

Dann ist also nach der Voraussetzung, daß die Bewegung gleichförmig sein sollte:

$$t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \ldots,$$

und es folgt daher:

$$\frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{x_3 - x_2}{t_3 - t_2} = \ldots, \text{ etwa} = \alpha,$$

und da wir annehmen, daß nicht nur diese individuellen Strecken in gleichen Zeiten durchlaufen werden, sondern auch alle beliebig kleinen, so folgt schließlich durch den bekannten Grenzübergang als charakteristisch für die gleichförmige Bewegung in der x-Achse die Gleichung:

$$2) \qquad \frac{dx}{dt} = \alpha,$$

und wieder werden wir, wie in der gewöhnlichen Mechanik, diese Größe α die konstante „Geschwindigkeit" des Mobils nennen, und doch ist,

*) Nach den Auffassungen der alten Mechanik würde jener in der x-Richtung fortgeschleuderte und dann sich selbst überlassene Stein (S. 43) eine solche Bewegung ausführen, wenn die Uhren im System $\mathfrak{L}$ gerade die Newtonsche absolute Zeit angäben. — Doch mag dahingestellt bleiben, ob das auch noch bei den hier von uns angenommenen Uhren mit willkürlicher Stellung gegeneinander der Fall ist oder nicht, und ob wir daher hier an diesen einfachen Versuch denken dürfen.

wie aus der obigen Analyse hervorgeht, bezüglich der Bedeutung ein großer Unterschied gegenüber der äußerlich ganz gleichen Formel der Newtonschen Kinematik. Dort ist $\frac{dx}{dt}$ der Quotient zwischen dem Wegelement und der entsprechenden Aenderung eines universellen Parameters (t) oder der Angabe einer Uhr, hier hingegen ist es der Quotient zwischen einander entsprechenden Aenderungen einer Längenskala und den Angaben verschiedener längs derselben aufgestellter Uhren, und zwar ist das Prinzip, nach dem dieses „Einander-Entsprechen" stattfindet, gegeben durch das Passieren des Mobils. —

Aus (2) folgt nun also für den im Laboratorium $\mathfrak{L}$ angestellten Versuch:

$$3) \qquad t = t_0 + \frac{x}{\alpha},$$

als eine während der ganzen Bewegung zwischen der Abszisse x und der Angabe t der dort befindlichen Uhr bestehende Beziehung. Dabei bedeutet t_0 die Angabe der Grunduhr $\mathfrak{U}_0$ von $\mathfrak{L}$, wenn das Mobil deren Ort O verläßt. Diese Angabe t_0 dürfen wir gänzlich willkürlich wählen, da wir ja dem Prinzipe von der Homogenität der Zeit zufolge jeden Versuch mit gleichem Erfolge zu beliebiger Zeit anstellen können.

Nunmehr betrachten wir den qualitativ gleichen Versuch, den wir uns im zweiten Laboratorium $\mathfrak{L}'$ (im Eisenbahnwagen) ausgeführt dachten. Dann sollen wir jetzt also die Uhren in diesem zweiten Laboratorium $\mathfrak{L}'$ so richten, daß dieser zweite Versuch qualitativ gleich dem ersten abläuft, daß das zweite Mobil also ebenfalls eine gleichförmige Bewegung in der x'-Achse vollführt, oder, was dasselbe ist, daß zwischen augenblicklicher Abszisse x' und Angabe der daselbst befindlichen Uhr wieder eine Beziehung genau derselben Art besteht, wie oben zwischen x und t, also

$$3') \qquad t' = t'_{0'} + \frac{x'}{\alpha'},$$

wo $t'_{0'}$ die (wieder willkürliche) Angabe der Uhr im Nullpunkt O' des Laboratoriums $\mathfrak{L}'$ ist, wenn das Mobil diesen Punkt passiert. — Diese Gleichung (3′) haben wir nun also anzusehen als eine Vorschrift zum Richten der Uhren im zweiten System $\mathfrak{L}'$, und sie gestattet tatsächlich die Zeit t' festzustellen, welche die Uhr mit der beliebigen Abszisse x' beim Passieren des Mobils anzeigen soll, und demgemäß auch diese Uhr zu stellen — allerdings nur unter der Voraussetzung, daß α' bekannt ist. So sind denn die Angaben, die uns das Relativitätspostulat in Gleichung (3′) zur Stellung der Uhren im zweiten System liefert, immer noch sehr unvollständig, denn die genannte Voraussetzung ist nicht erfüllt, wir können, wie wir aus früheren Betrachtungen wissen, α' nicht bestimmen (etwa gleich α machen) bevor wir nicht Maßstäbe und Uhren auch im zweiten Laboratorium kennen, also auch quantitativ gleiche Versuche anstellen können.

So liefert uns denn also Gleichung (3′) auch nur ein qualitatives Gesetz, die übrigen Uhren des zweiten Systems an dessen Grunduhr $\mathfrak{U}'_{0'}$ anzuschließen und damit gegeneinander zu stellen. Wir können wohl viele Arten, das Uhrensystem zu stellen, als falsch ausscheiden, es bleibt aber infolge der Willkürlichkeit von α' noch eine große Menge von Möglichkeiten der Stellung. Ueber die Gangge-

schwindigkeit der Uhren in $\mathfrak{L}'$ (etwa der Grunduhr $\mathfrak{U}'_{0'}$) erfahren wir durch diese Parallelversuche nichts.

Uebrigens ist auch für den Ablauf des Versuches im ersten Laboratorium $\mathfrak{L}$ nur die Stellung der dortigen Uhren gegeneinander (oder gegen die Grunduhr $\mathfrak{U}_0$ von $\mathfrak{L}$) wesentlich, nicht aber die Ganggeschwindigkeit, denn durch passende Stellung der Uhren gegeneinander kann ich ja jede Bewegung gleichförmig erscheinen lassen, ich brauche ja nur die Gleichung (3) als Vorschrift zur Stellung der Uhren in $\mathfrak{L}$ zu benutzen, gerade so wie wir vorhin (3′) zur Stellung der Uhren in $\mathfrak{L}'$ benutzt dachten. — Berücksichtigen wir ferner noch, daß das Prinzip von der Homogenität (Isotropie) des Raumes gestattet, was wir für die Uhren längs der x- bzw. x'-Achse feststellten, auch auf die Uhren in jeder beliebigen anderen Richtung zu übertragen, so können wir jetzt das Resultat unserer bisherigen Ueberlegungen folgendermaßen zusammenfassen:

Resultat. — *Es seien zwei gegeneinander bewegte Laboratorien $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$ gegeben. Dann gestattet zunächst das Prinzip von der Homogenität der Zeit, die Uhren in jedem einzelnen dieser Laboratorien untereinander auf gleiche Ganggeschwindigkeit zu regulieren, und ferner gestattet der vom Relativitätsprinzip geforderte analoge Verlauf qualitativ gleicher Versuche in $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$ bei gegebenen Längenmaßstäben in beiden Laboratorien, aus der Stellung der Uhren von $\mathfrak{L}$ gegeneinander (oder deren Anschluß an eine Grunduhr $\mathfrak{U}_0$ von $\mathfrak{L}$) unter Zuhilfenahme des Prinzips von der Homogenität des Raumes ein qualitatives Gesetz für die Stellung der Uhren von $\mathfrak{L}'$ gegeneinander (oder ihren Anschluß an eine Grunduhr $\mathfrak{U}'_{0'}$ von $\mathfrak{L}'$) herzuleiten.*

Gegen diese Ausführungen könnte man vielleicht einwenden, wir hätten uns garzusehr an diese speziellen Parallelversuche gehalten, bei denen geradlinig gleichförmige Bewegungen auftreten. Wir hätten aber ebensogut auch andere Versuche benutzen können: denken wir uns z. B. im Laboratorium $\mathfrak{L}$ einen Versuch angestellt, bei dem eine gleichförmig *beschleunigte* Bewegung eines Mobils in der x-Richtung stattfindet, so daß also

$$2\,\text{a)} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \text{const} = \beta$$

ist, wobei bezüglich der neuen Bedeutung dieses zweiten Differentialquotienten Aehnliches zu bemerken wäre wie oben S. 44—45 bei der Bedeutung von $\frac{dx}{dt}$. — Aus (2 a) folgt dann:

$$2\,\text{a*)} \qquad x = \frac{\beta}{2}(t - t_0)^2 + \alpha\,(t - t_0),$$

oder nach t aufgelöst:

$$3\,\text{a)} \qquad t = t_0 + \frac{\sqrt{\alpha^2 + 2\beta x} - \alpha}{\beta},$$

und für einen qualitativ gleichen Parallelversuch im zweiten Laboratorium $\mathfrak{L}'$ muß daher die entsprechende Gleichung gelten:

$$3\,\text{a}') \qquad t' = t'_{0'} + \frac{\sqrt{\alpha'^2 + 2\beta' x'} - \alpha'}{\beta'}$$

mit allerdings unbekannten Konstanten α' und β', und diese Gleichung können wir daher wieder, wie früher (3′), nur ansehen als ein qualitatives Gesetz zur Stellung der Uhren von $\mathfrak{L}'$ gegeneinander*) oder zum Anschluß an eine Grunduhr $\mathfrak{U}'_{0'}$ von $\mathfrak{L}'$ mit der Zeitangabe $t'_{0'}$. — Daß, wenigstens bei passender Bestimmung alles dessen, was bisher noch unbestimmt geblieben ist — als da sind: die beiden Längenmaßstäbe in $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$, die Stellung der Uhren von $\mathfrak{L}$ gegeneinander und die Konstanten (α' im ersten, α' und β' im zweiten Falle) —, diese beiden Arten der Uhrenstellung in $\mathfrak{L}'$ nach Formel (3′) bzw. (3a′) übereinstimmen, ist natürlich eine Annahme, eben die Einsteinsche Grundannahme, daß man durch passende Wahl des Instrumentariums in beiden Systemen der Forderung des Relativitätsprinzips, daß alle Parallelversuche gleich ablaufen, genügen kann. —

Nachdem wir so festgestellt haben, was das Relativitätspostulat in Verbindung mit den Postulaten von der Homogenität des Raumes und der Zeit zur Stellung der Uhren zu leisten imstande ist — die Längenmaßstäbe in $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$ denken wir uns zunächst immer noch gegeben —, wollen wir jetzt auch noch kurz zusammenfassen, was das Relativitätspostulat *nicht* leisten kann.

Zunächst kann es uns, wie schon näher ausgeführt wurde, nicht liefern ein quantitatives Gesetz zur Stellung der Uhren von $\mathfrak{L}'$ gegeneinander, weil eben die Konstanten (α' bzw. α' und β') vor Kenntnis der Maßstäbe und Uhren im zweiten System nicht bekannt sind.

Sodann aber kann uns das Relativitätsprinzip auch nicht die Stellung der Uhren des ersten Systems $\mathfrak{L}$ gegeneinander liefern. Diese setzten wir oben immer als gegeben voraus, und in der Tat liegt es in der Natur des Relativitätsprinzips, daß es uns höchstens eine Uebertragung der Uhrenstellung von einem System auf das andere liefern kann. Wollen wir eine Stellung der Uhren gegeneinander innerhalb eines Systems vornehmen, so bedarf es dazu noch anderer Prinzipien. Wenn wir z. B. ein dem Galileischen Trägheitsgesetz analoges Prinzip aufstellen wollten, daß sich gerade ein sich selbst überlassener Massenpunkt geradlinig gleichförmig in dem oben S. 44 definierten Sinne, also gemäß Gleichung (3) mit konstantem α bewegt [vgl. die Anmerkung daselbst], so könnten wir dieses Prinzip dazu benutzen, die Uhren im ersten System gegeneinander zu stellen, indem wir jede Uhr beim Passieren des Massenpunktes auf die bei willkürlichem α durch jene Gleichung (3) geforderte Zeit stellten**) — aber auch, wenn wir festsetzten, ein sich selbst überlassener Massenpunkt solle sich gleichförmig beschleunigt bewegen, also gemäß Gleichung (3a), so könnten wir einen solchen Massenpunkt wieder dazu benutzen, die gerade passierten Uhren auf die durch diese Gleichung (bei beliebigem α und β) geforderten Zeiten zu stellen und so anzuschließen an die Grunduhr $\mathfrak{U}_0$ oder gegeneinander zu stellen.

Der Gang der Grunduhr $\mathfrak{U}_0$ dieses ersten Systems $\mathfrak{L}$, d. h. ihre Anfangsstellung (t_0) und ihre Ganggeschwindigkeit, bleiben auch dann noch unbestimmt, und selbst, wenn wir sie als bekannt voraussetzen —

) Der Umstand, der hierbei eine wesentliche Rolle spielt und zunächst vielleicht zufällig erscheinen mag, daß Gleichung (2a) nur Zeitdifferenzen enthält, hat seinen tieferen Grund in der vorausgesetzten Homogenität der Zeit [vgl. oben S. 17].

**) Dieses Vorgehen hätte eine gewisse Aehnlichkeit mit dem in der Anmerkung S. 11 erwähnten C. Neumannschen Verfahren, das Trägheitsgesetz zur Bestimmung „gleicher Zeiten“ zu benutzen.

so lehren unsere obigen Ueberlegungen — kann das Relativitätsprinzip keinen Aufschluß geben über den Gang der Grunduhr $U'_{0'}$ im zweiten Systeme $\mathfrak{L}'$, und auch das ist ja a priori einzusehen: das Relativitätsprinzip handelt von zwei ganz getrennten Versuchen, von denen der eine in dem festen Laboratorium $\mathfrak{L}$ und der andere im Eisenbahnwagen $\mathfrak{L}'$ angestellt werden, und es behauptet, daß diese Versuche einen analogen Verlauf nehmen sollen. Da ist es denn klar, daß damit zwar eine Verbindung hergestellt ist zwischen den Beziehungen, die zwischen den Uhren des einen Laboratoriums untereinander bestehen, und den Beziehungen, die zwischen den Uhren des anderen Laboratoriums untereinander bestehen, daß man aber niemals aus zwei solchen gänzlich getrennten Versuchen eine Beziehung zwischen den Uhren in dem einen und denen im anderen System herleiten kann. Wenn wir auf eine solche Beziehung — sagen wir kurz zwischen den Grunduhren beider Systeme — hinauswollen, so bedarf es dazu eines gleichsam zwischen beiden Laboratorien vermittelnden Versuches, nämlich der Beobachtung ein und desselben Versuches von den beiden Laboratorien aus, also eines „interlaboratoriellen Versuches" in unserer früher festgesetzten Bezeichnungsweise [vgl. S. 5].

So können wir denn die Resultate unserer letzten Ueberlegungen zusammenfassen in folgenden

Zusatz. — *Das Relativitätsprinzip kann uns auch in Verbindung mit den Prinzipien von der Homogenität des Raumes und der Zeit nicht liefern:*

1. *Die Stellung der Uhren im ersten Systeme $\mathfrak{L}$ gegeneinander (oder gegen U_0). — Dazu bedürfte es der Kenntnis (oder besser Festsetzung) über einen Naturvorgang, z. B. des Satzes, daß ein sich selbst überlassener Massenpunkt sich geradlinig gleichförmig bewegt, oder aber auch, daß er sich gleichförmig beschleunigt bewegt, oder dgl.;*

2. *ein quantitatives Gesetz zum Stellen der Uhren des zweiten Systems $\mathfrak{L}'$ gegeneinander (oder gegen $U'_{0'}$) — dazu bedürfte es quantitativ gleicher Laboratoriumsversuche und damit bereits der Kenntnis der Maßstäbe und Uhren in beiden Systemen;*

3. *die Beziehung zwischen den Grunduhren U_0 und $U'_{0'}$ der beiden Systeme — dazu bedürfte es der Kenntnis darüber, wie ein interlaboratorieller Versuch von beiden aus betrachtet abläuft.*

§ 5.

Das Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit.

Wir haben im vorigen Paragraphen festgestellt, daß uns das Relativitätsprinzip, selbst in Verbindung mit den Prinzipien von der Homogenität von Raum und Zeit, verhältnismäßig wenig an Vorschriften zum Richten der Uhren in den beiden Laboratorien $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$ liefert. Am meisten lieferte noch das Prinzip von der Homogenität der Zeit, aber alle 3 Prinzipien zusammen genügen noch keineswegs, den Gang der Uhren auch nur eines Systems festzulegen.

Um die Grundlage für eine eindeutige Zeitrechnung in beiden Systemen zu gewinnen, muß man demnach noch andere Prinzipe heranziehen, die ergänzend in die soeben noch am Schluß des Paragraphen zusammengestellten Lücken eingreifen. Das von EINSTEIN herangezogene Prinzip, das für seine Lösung des Problems des Uhrenrichtens charakteristisch ist, ist nun das folgende

Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit. — *Von allen gegen ein Grundsystem geradlinig gleichförmig bewegten Systemen aus betrachtet, pflanzt sich das Licht im Vakuum geradlinig und mit derselben konstanten Geschwindigkeit c fort, unabhängig davon, ob die Lichtquelle mitgeführt wird oder nicht.*

Dieses Prinzip spielt in der EINSTEINschen speziellen Relativitätstheorie eine ganz ähnliche Rolle wie nach unseren früheren Ausführungen das Trägheitsgesetz in der klassischen Mechanik. Dort bildeten wir uns im wesentlichen unsere Vorstellungen von Raum und Zeit so, daß dieses Gesetz galt, um sie dann weiter der ganzen Mechanik zugrunde zu legen. Ganz entsprechend legen wir hier Raum- und Zeitmessung in der speziellen Relativitätstheorie diesem Prinzipe gemäß fest. Das Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit ist eben, genau wie das Trägheitsgesetz, nicht anzusehen als ein Gesetz, das zwei zuvor wohldefinierte Dinge (Lichtfortpflanzung und geradlinig gleichförmige Bewegung) in Verbindung zueinander setzt, sondern es ist wieder ein Postulat, es enthält eine Forderung, nämlich die Längen- und Zeitmessungen in jenen Systemen so einzurichten, daß jener Satz richtig wird.*)

Daß dieses Prinzip tatsächlich eine Aenderung unserer Vorschriften für Längen- und Zeitmessungen gegenüber denen der klassischen Mechanik erfordert, liegt klar zutage, denn denken wir uns einmal in dem Augenblick, wo die Anfangspunkte zweier solcher gegeneinander bewegter Systeme aneinander vorübergehen, daselbst einen Lichtblitz ausgesandt, so wird jenem Prinzipe zufolge von zwei Beobachtern, die in diesen Anfangspunkten der beiden Systeme postiert sind, jeder den Eindruck haben, daß sich das Licht von ihm aus nach allen Richtungen gleich schnell fortpflanzt, daß die Lichtimpulse also nach dem Urteile jedes dieser Beobachter „zu gleicher Zeit“ auf einer Kugelfläche angelangt sind, in deren Mittelpunkt er sich gerade befindet. Diese Auffassung ist aber natürlich mit der Vorstellung von der universellen Zeit unvereinbar: wenn beide Beobachter dieselbe Zeitrechnung

*) LAUE sagt in seinem Buche „Die Relativitätstheorie“, Erster Band (Nr. 38 der bei Vieweg in Braunschweig erscheinenden Sammlung „Die Wissenschaft“): „Um so besser kennen wir das Gesetz der Lichtfortpflanzung im Vakuum, ist doch durch den MICHELSONschen Versuch mit einer bei sonstigen physikalischen Messungen kaum erreichten Genauigkeit festgestellt, daß sie, bezogen auf alle Systeme, nach allen Richtungen, gleichmäßig erfolgt“ [vgl. erste Aufl. (1911) S. 34 vierte Aufl. 1921 S. 49]. — Hierin kann ich ihm nicht beipflichten. Wir „kennen“ eben nicht das Gesetz der Lichtfortpflanzung, sondern wir treffen darüber eine Festsetzung — und was den MICHELSONschen Versuch anlangt, so kann uns dieser doch über den Vorgang der Lichtfortpflanzung an sich nicht das Mindeste lehren; er lehrt nur, daß die Gesetze der Lichtfortpflanzung unabhängig sind von der Orientierung der Apparate gegen ihre Fortbewegungsrichtung. — Nicht einmal die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit kann man aus dem MICHELSONschen Versuche erschließen, und selbst eine Annahme wie etwa die, daß die Geschwindigkeit eines Lichtimpulses durch Reflexion an einem Spiegel geändert, und gar in einer noch von dem Reflexionswinkel abhängigen Weise geändert würde, dürfte sich durch den MICHELSONschen Versuch nicht widerlegen lassen.

besitzen, also „gleichzeitig“ für den einen auch „gleichzeitig“ für den anderen ist, und damit auch die Fläche, auf der sich die Lichtimpulse gleichzeitig befinden, für beide dieselbe ist, so können sie sich nicht beide dauernd im Mittelpunkte dieser Fläche befinden.

Wir müssen danach also tatsächlich das Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit als ein neues Gesetz ansehen, die Längen- und Zeitmessungen in verschiedenen Systemen festzulegen. So, als Postulat, aufgefaßt, ersetzt es uns nun zunächst, wie jetzt gezeigt werden soll, für das Problem des Richtens der Uhren vollständig das Relativitätsprinzip und die Prinzipe von der Homogenität des Raumes und der Zeit. Alles was uns diese Prinzipien bisher zu leisten imstande waren, das leistet auch bereits das Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit allein: Die eine in ihm enthaltene Aussage (Festsetzung) bezieht sich ja auf den gleichen Ablauf paralleler Laboratoriumsversuche im früher besprochenen Sinne: fordert das Prinzip doch, daß die Geschwindigkeit des Lichtes, das von einer im festen Laboratorium $\mathfrak{L}$ aufgestellten Kerze ausgeht, mit den Instrumenten dieses Laboratoriums gemessen, denselben Wert besitzen soll wie die des Lichtes einer im Eisenbahnwagen aufgestellten Kerze bei Messung mit den Instrumenten dieses fahrenden Laboratoriums $\mathfrak{L}'$, es verlangt also die Erfüllung der Forderung des Relativitätsprinzips in einem speziellen Falle*) — wir sahen aber oben, daß die Anstellung zweier Parallelversuche in einem einzelnen Spezialfalle bereits genügen kann, aus der Stellung der Uhren des ersten Systems gegeneinander Rückschlüsse zu ziehen auf die im zweiten Systeme. Oben diente uns im ersten Beispiele dazu irgendein Versuch, bei dem in $\mathfrak{L}$ eine geradlinig gleichförmige Bewegung auftrat — gerade ein solcher liegt nach dem Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit (bei passender Wahl der Uhren in $\mathfrak{L}$) bei Aussendung des Lichtes vor, die Bewegungen der von jenen Kerzen ausgehenden Lichtimpulse realisieren also die oben S. 45 durch die Gleichungen (3) und (3′) dargestellten Bewegungen, und so gestattet das Prinzip von der Lichtgeschwindigkeit alle Schlüsse, die wir früher mittels dieser Gleichungen aus dem Relativitätsprinzip zogen. — Aber auch das, was die Prinzipien von der Homogenität von Zeit und Raum für das Uhrenrichten leisteten, ist ebensogut das Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit zu leisten imstande, denn was jene Prinzipien für alle Versuche fordern, nämlich, daß sie zu allen Zeiten, an allen Orten (und auch in allen Orientierungen) gleich ablaufen, das behauptet ja unser neues Prinzip speziell von der Aussendung der Lichtimpulse, und da wir beim Richten der Uhren diese Tatsache des gleichen Ablaufs auch wieder immer nur bei einem einzelnen Versuche zu benutzen brauchten, so können wir hierzu eben wieder die Aussendung der Lichtimpulse wählen. Ein solcher Lichtimpuls tritt dann an die Stelle des fortgeschleuderten Mobils, von dem wir früher (S. 10 u. 42) sprachen, und wenn wir uns einen Lichtimpuls durch einen Spiegel zurückgeworfen denken, haben wir auch einen Ersatz für das zum Ausgangspunkt zurückkehrende Mobil, dessen wir früher (S. 41) bedurften. *So gestattet also zunächst tatsächlich das eine Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit alle Folgerungen, die wir früher*

*) Wegen der „Gleichheit“ der Parallelversuche vgl. unten die näheren Ausführungen unter: *ad 2.*

aus dem Relativitätsprinzip und den beiden Prinzipien von der Homogenität des Raumes und der Zeit für das Problem des Uhrenrichtens zogen.

Doch das Prinzip von der Lichtgeschwindigkeit leistet noch weit mehr als diese drei Prinzipe zusammen, es gestattet nämlich, wie ich jetzt weiter zeigen will, gerade die 3 oben noch gebliebenen und am Schluß des vorigen Paragraphen zusammengestellten Lücken auszufüllen:

ad 1. *Das Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit enthält eine Aussage (Festsetzung) über einen Naturvorgang,* über den Verlauf eines einzelnen Versuches — denn nach ihm soll sich jeder Lichtimpuls wenigstens in allen Systemen jener durch das Prinzip ausgezeichneten Klasse geradlinig und gleichförmig, d. h. mit sich stets gleichbleibender Geschwindigkeit fortbewegen. Es sind also, wenn wir, wie auch im folgenden stets, annehmen, daß $\mathfrak{L}$ eines dieser ausgezeichneten Systeme ist, die Uhren in $\mathfrak{L}$ längs der x-Achse so gegeneinander zu stellen, daß für die Bewegung eines Lichtimpulses die Gleichung (3) S. 45

$$t = t_0 + \frac{x}{\alpha}$$

im früher besprochenen Sinne gilt, wenn $\alpha = c$, gleich der in allen jenen Systemen gleichen Lichtgeschwindigkeit ist, deren numerischen Wert in den gewählten Längen- und Zeiteinheiten man bestimmt denken kann, indem man einen Lichtimpuls etwa durch Reflexion an einem Spiegel zum Ausgangspunkt zurückkehren läßt und den durchlaufenen Weg s und die verflossene Zeit τ (durch Ablesungen an derselben Uhr) ermittelt. Ist so

$$\alpha = c = \frac{s}{\tau}$$

bestimmt, so liefert uns das Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in der Gleichung (3) eine genaue (auch quantitative) Vorschrift, die Uhren des Laboratoriums $\mathfrak{L}$ an die Grunduhr $\mathfrak{U}_0$ anzuschließen und damit auch gegeneinander zu stellen.

ad 2. *Das Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit gestattet uns auch quantitativ gleiche Parallelversuche anzustellen* — denn es setzt fest, daß die Anfangsgeschwindigkeiten*) der von jenen Kerzen in den beiden Laboratorien ausgesandten Lichtimpulse als gleich anzusehen sind. Während also bei Versuchen, die sich auf die Bewegung materieller Körper beziehen, z. B. beim Fortschleudern eines Steines, immer noch eine Anfangsgeschwindigkeit eine Rolle spielt, von der man nie weiß, ob sie bei zwei Parallelversuchen als gleich groß zu betrachten ist oder nicht, fällt diese Schwierigkeit nach obigem Prinzip bei der Fortpflanzung der Lichtimpulse fort. Nach der diesem Prinzipe zugrundeliegenden Auffassung soll die Geschwindigkeit der von einer Lichtquelle ausgehenden Lichtimpulse durch menschliche Willkür nicht zu beeinflussen sein, also unabhängig von allen näheren Versuchsbedingungen, und daher auch z. B. von der Farbe des emittierten Lichtes, immer dieselbe sein — wenigstens sobald man die Messung in einem jener durch das Prinzip ausgezeichneten Systeme vornimmt. —

*) Während bei den Ausführungen *ad 1* der Nachdruck auf der Aussage über den weiteren Verlauf des einzelnen Versuchs lag, liegt er hier auf der Aussage über den Anfang der Versuche, auf der Behauptung stets gleicher Anfangsgeschwindigkeit („gleich angestellte Versuche").

So gilt denn also für die Lichtbewegung längs der x'-Achse des zweiten Laboratoriums $\mathfrak{L}'$ die Gleichung (3′) S. 45:

$$t' = t'_{0'} + \frac{x'}{\alpha'},$$

jetzt mit bekanntem α', nämlich mit dem Werte $\alpha' = \alpha = c$, und es stellt daher diese Gleichung jetzt auch ein *quantitatives* Gesetz zur Stellung der Uhren des zweiten Laboratoriums gegeneinander dar.

ad 3. *Das Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit enthält eine Aussage über den Verlauf eines interlaboratoriellen Versuchs* — und das dürfte an ihm mit das Wichtigste sein. Es sagt nämlich aus, daß sich die Lichtgeschwindigkeit, gemessen von einem jener ausgezeichneten Systeme, z. B. vom Eisenbahnwagen $\mathfrak{L}'$ aus, gleich c ergibt, auch wenn die Lichtquelle nicht mitgeführt wird, also auch wenn es sich um keinen „Laboratoriumsversuch" handelt. Erst darin liegt das wesentlich Neue gegenüber dem Relativitätsprinzip, denn, wenn wir, wie bisher, 2 Kerzen, eine in dem festen und eine in dem fahrenden Laboratorium aufstellen und das Licht jeder mit den Instrumenten des betreffenden Laboratoriums untersuchen, so besagt, wie schon erwähnt wurde, bereits das Relativitätsprinzip, daß die Lichtgeschwindigkeit sich, wenn überhaupt konstant, beide Male gleich groß ergeben müsse — sofern man eben die Aussendung von Licht durch eine Kerze allemal, wenigstens was die den Lichtimpulsen erteilte Geschwindigkeit anlangt, als gleiche Versuche oder besser als gleich angestellte Versuche, als Versuche mit gleichen Anfangsbedingungen ansieht [vgl. die obigen Bemerkungen unter: *ad 2*] — denn dann liegt ja genau der Fall zweier gleicher Parallelversuche in den beiden Laboratorien vor. — Das neue Prinzip besagt aber, daß das Resultat einer Messung der Lichtgeschwindigkeit *unabhängig ist vom Bewegungszustande der Lichtquelle**), daß es also gleichgültig ist, in welchem der beiden Laboratorien die Kerze, deren Licht ich untersuche, steht, oder auch ob sie keinem dieser Laboratorien angehört, also irgendwo außerhalb eine besondere Bewegung ausführt — die Messung der Geschwindigkeit ihres Lichtes von beiden Laboratorien

---

*) Obwohl Einstein diesen wichtigen Punkt ganz ausdrücklich hervorhebt [„Zur Elektrodynamik bewegter Körper" Ann. d. Physik Bd. 17 (1905) S. 895, neu abgedruckt in O. Blumenthals Sammlung „Fortschritte der mathematischen Wissenschaften" Bd. 2, bei Teubner 1913, daselbst S. 30], haben doch spätere Darsteller der Theorie geglaubt, ihn gar nicht erwähnen zu brauchen. Vgl. z. B. Laue an der in der Anmerkung S. 49 angeführten Stelle. — Mir scheint es bedenklich, diese Tatsache als „selbstverstnädlich" hinzustellen, etwa mit der Begründung, daß die Fortpflanzung des Lichtes im Vakuum stets derselbe Vorgang sei, unabhängig von den Bewegungen anderer Körper. Mir scheint darin ein unbewußtes Zurückgreifen auf das, was wir früher die „Hypothese vom ruhenden Aether" nannten, zu liegen, nur daß das Wort „Aether" durch das andere „Vakuum" ersetzt ist. — Bei dieser Auffassung verschwindet für den Vorgang der Lichtausbreitung natürlich ganz der Unterschied zwischen einem „Laboratoriumsversuch" und einem „interlaboratoriellen Versuche", und diese Unterscheidung scheint mir doch durchaus notwendig: Wenn Laue an jener Stelle sagt, zur Ableitung der Beziehungen zwischen den beiden Systemen bedürfe es der Kenntnis eines Naturgesetzes, so heißt das in unserer Ausdrucksweise doch natürlich: der Kenntnis über den Ablauf eines interlaboratoriellen Versuchs von beiden Systemen aus, und, wenn er dann weiter von dem durch das Relativitätsprinzip geforderten gleichen Wert für die Lichtgeschwindigkeit in beiden Systemen spricht, so liegt dem gerade die andere Vorstellung von zwei parallelen Laboratoriumsversuchen zugrunde.

aus soll stets denselben Wert c ergeben, und weil ich hier eben an die Messung ein und desselben Vorganges von den beiden Laboratorien aus zu denken berechtigt bin, liefert uns das Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit die Möglichkeit, auch die Beziehung zwischen den Grunduhren $\mathfrak{U}_0$ und $\mathfrak{U}'_{0'}$ der beiden Systeme zu bestimmen. —

So sehen wir also, daß sich tatsächlich alle die 3 oben gebliebenen Lücken bei Zuhilfenahme des Postulates von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit ausfüllen lassen. — Fassen wir zusammen, was uns dieses Prinzip bei Annahme der Längenmaßstäbe in beiden Systemen für das Problem, die Uhren zu richten, leistet, so können wir sagen: *es liefert uns den Anschluß zunächst aller Uhren des ersten Systems* $\mathfrak{L}$ *an dessen Grunduhr* $\mathfrak{U}_0$ *und sodann auch weiter den Anschluß sämtlicher Uhren des zweiten Systems* $\mathfrak{L}'$, *also einschließlich seiner Grunduhr* $\mathfrak{U}'_{0'}$, *an jene Grunduhr* $\mathfrak{U}_0$ *des ersten Systems.* — Nicht liefern kann auch jenes Prinzip die Ganggeschwindigkeit dieser Grunduhr $\mathfrak{U}_0$, d. h. die Zeiteinheit im ersten Systeme.

Nimmt man noch das Relativitätspostulat, und das Postulat von der Homogenität (Isotropie) des Raumes hinzu, so läßt sich auch noch eine *Beziehung zwischen den Längenmaßstäben in beiden Laboratorien* herleiten. Das möchte ich an dieser Stelle nicht näher begründen; bewiesen wird diese Behauptung erst werden bei Gelegenheit der analytischen Behandlung des Problems, welche ich diesen bisherigen allgemein orientierenden Ausführungen im nächsten Paragraphen folgen lassen werde [vgl. speziell S. 63—64].

So bleibt denn also nur noch der Längenmaßstab (die Längeneinheit) und die Ganggeschwindigkeit (die Zeiteinheit) im ersten Systeme $\mathfrak{L}$ unbestimmt. Verfügen wir über diese Einheiten, so ist alles andere, zunächst also der Gang der übrigen Uhren dieses Systems (sowohl Ganggeschwindigkeit wie auch Stellung gegeneinander), sodann aber auch alles, was sich auf das zweite System $\mathfrak{L}'$ bezieht, Längeneinheit und Gang der Uhren, bekannt — und nun behauptet Einstein, daß wenn so die Instrumentarien der beiden Laboratorien aufeinander abgestimmt sind, daß dann stets gleiche Parallelversuche in beiden Laboratorien, gemessen mit diesen Instrumenten, gleich ablaufen (Relativitätsprinzip) und daß dann auch gleiche Versuche im selben Laboratorium, an verschiedenen Orten oder zu verschiedenen Zeiten angestellt, stets gleich ablaufen (Prinzip von der Homogenität des Raumes und der Zeit). Sind also — so kann man den Sachverhalt etwa darstellen — die Instrumentarien so bestimmt, daß diese Sätze speziell für die Fortpflanzung der Lichtimpulse gelten, so behauptet Einstein, daß sie für alle Naturvorgänge richtig sind. — Diese Behauptung, dieses Einsteinsche Grundgesetz, das seine Berechtigung nur aus der Uebereinstimmung der aus ihm gezogenen Folgerungen mit der Erfahrung herleiten kann, wollen wir jetzt als „Axiom" folgendermaßen formulieren:

Einsteinsches Axiom. — *Die Maßstäbe und Uhren in je zwei gegen ein Grundsystem geradlinig gleichförmig bewegten Laboratorien lassen sich so bestimmen, daß gleichzeitig die 3 folgenden Sätze gelten:*

1) *Das Prinzip von der Homogenität des Raumes und der Zeit: Gleiche Versuche innerhalb desselben Laboratoriums, angestellt an verschiedenen Orten (und in verschiedenen Orientierungen) und ebenso zu verschiedenen Zeiten, nehmen stets gleichen Verlauf.*

2) *Das Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit: Die Geschwindigkeit der geradlinigen gleichförmigen Lichtfortpflanzung im Vakuum hat, gemessen in beiden Laboratorien, zahlenmäßig denselben konstanten Wert c, unabhängig davon, ob die Lichtquelle mitgeführt wird oder nicht.*

3) *Das spezielle Relativitätsprinzip: Zwei in jenen Laboratorien parallel angestellte gleiche Laboratoriumsversuche, d. h. zwei mit den Apparaten des betreffenden Laboratoriums ausgeführte und mit Instrumenten desselben messend verfolgte Versuche nehmen zahlenmäßig denselben Verlauf.*

Dieser Satz ist das eigentliche Fundament der Einsteinschen speziellen Relativitätstheorie.

Es sei noch ausdrücklich bemerkt, daß auch die Einsteinsche Behauptung nicht dahin geht, daß man irgend je zwei geradlinig gleichförmig gegeneinander bewegte Laboratorien so mit Instrumenten ausstatten kann, daß Parallelversuche in beiden gleich ablaufen, oder, was nach früheren Betrachtungen dasselbe ist, daß die Naturgesetze in beiden bei Zugrundelegung dieser Meßinstrumente dieselbe Form besitzen, sondern Einstein behauptet wieder nur, daß es ein ausgezeichnetes Raumzeitsystem gibt, derart, daß die Naturgesetze ungeändert bleiben beim Uebergange zwischen geradlinig gleichförmig gegen dieses eine Grundsystem bewegten Systemen. — Diese Einschränkung ist durch das Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit bedingt, denn die Behauptung dieses Prinzips, daß die Fortpflanzung des Lichtes „geradlinig gleichförmig" erfolgt, kann natürlich nur von einer ausgezeichneten Klasse von Raumzeitsystemen aus zutreffen, nicht aber gleichzeitig auch von beliebig gegen diese bewegten und mit beliebigen Uhren ausgestatteten Systemen aus. Es liegen die Verhältnisse hier also ganz analog wie in der klassischen Mechanik, wo uns die Aussage des Trägheitsgesetzes von der geradlinig gleichförmigen Bewegung eines Massenpunktes zwang, eine ausgezeichnete Klasse von Raumsystemen und eine ausgezeichnete Zeitrechnung einzuführen. Nur beim Uebergange zwischen diesen „Galileischen" Systemen und bei Zugrundelegung dieser „Newtonschen" Zeitrechnung bestand auch dort Invarianz der Gesetze der Mechanik.

Die hier in der Relativitätstheorie den Galileischen Raumsystemen mit der Newtonschen Zeitrechnung entsprechenden, ausgezeichneten Raumzeitsysteme wollen wir nun hinfort als die „Lorentzschen Systeme" bezeichnen, und die in den folgenden Paragraphen zu behandelnden Gleichungen, welche den Uebergang von einem dieser Systeme zu einem anderen vermitteln, als „Lorentz-Transformationen". Dann können wir das obige „Einsteinsche Axiom" auch kürzer folgendermaßen aussprechen, und zwar wollen wir es in dieser üblicheren Formulierung kurz bezeichnen als

Einsteinsches spezielles Relativitätsprinzip. — *Die Naturgesetze sind invariant gegenüber allen Lorentz-Transformationen.*

Um nun die Lorentzschen Raumzeitsysteme leichter charakterisieren zu können, wollen wir irgend eines unter ihnen (das „Grundsystem" des Prinzipes von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit) hervorheben und als „Lorentzsches Grundsystem" bezeichnen. Die Achsenkreuze der übrigen Lorentzschen Systeme sind dann in geradlinig gleichförmiger Bewegung gegen das dieses Grundsystemes begriffen

und ihre Maßstäbe und Uhren sind nach den obigen Prinzipien auf Maßstäbe und Uhren im Grundsystem abgestimmt.

Jedenfalls geht aus diesen Ueberlegungen deutlich hervor, daß auch dieser Einsteinschen Theorie noch die Annahme eines bevorzugten Raumzeitsystems zugrunde liegt, also die Annahme eines bestimmten ausgezeichneten Raumsystems und ebenso einer bestimmten ausgezeichneten Zeitrechnung. Wir können dafür sagen: *Auch der Einsteinschen speziellen Relativitätstheorie liegt die Vorstellung eines absoluten Raumes und einer absoluten Zeit zugrunde**).

§ 6.

Die schließliche Lösung des Einsteinschen Problems. Die Lorentz-Transformationen.

Nachdem wir uns zunächst in den beiden letzten Paragraphen eingehend klar gemacht haben, was die einzelnen in Rede stehenden Prinzipien für das Einsteinsche Problem der Bestimmung der Maßstäbe und Uhren in den beiden Laboratorien zu leisten imstande sind, wollen wir jetzt die gewonnenen Regeln zusammenfassen und die analytischen Ausdrücke für den Zusammenhang zwischen den durch die Laboratorien dargestellten Raumzeitsystemen entwickeln.

Dabei wollen wir gegen früher eine Aenderung insofern eintreten lassen, daß wir nicht in dem ersten Systeme $\mathfrak{L}$ die Längen- und Zeiteinheit beliebig gewählt annehmen und dann die Lichtgeschwindigkeit c in diesen Einheiten berechnet denken [vgl. S. 51], sondern wir wollen jetzt nur die *Längen*einheit gegeben denken (einen Einheitsmaßstab), und dann die Zeiteinheit so bestimmen, daß die Lichtgeschwindigkeit c einen ganz bestimmten Zahlenwert annimmt, z. B. den Wert $3 \cdot 10^{10}$ (in Anlehnung an das in der Praxis gebräuchliche Maßsystem mit dem Zentimeter als Längen- und der Sekunde als Zeiteinheit). — Wie wir aber auch über c verfügen, jedenfalls wollen wir hinfort darunter einen ganz bestimmt gegebenen Zahlenwert verstehen.

Dann können wir zunächst das Problem, die Uhren in einem einzelnen Laboratorium zu richten, in die beiden folgenden Probleme auflösen:

1. Die Grunduhr $\mathfrak{U}_0$ des Systems zu regulieren.
2. Die übrigen Uhren des Systems an die Grunduhr anzuschließen (Stellung der Uhren gegeneinander).

Unter der Voraussetzung, die wir auch im folgenden stets machen, daß das betrachtete Laboratorium (als bloßes Raumsystem betrachtet) sich überhaupt durch passende Wahl der Uhren zu einem Lorentzschen Raumzeitsystem ausgestalten, oder daß sich eben das Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit darauf anwenden läßt, lauten die Lösungen, welche dieses Prinzip für jene beiden Probleme liefert, folgendermaßen:

1. Regulierung der Grunduhr $\mathfrak{U}_0$ eines Systems. — *Man lasse vom räumlichen Anfangspunkte O des betrachteten Raumzeitsystems, dem Orte*

*) Auf die Aenderung in diesen Auffassungen, welche die allgemeine Relativitätstheorie mit sich gebracht hat, gehe ich am Schluß von § 1 des zweiten Teiles näher ein.

der Uhr $\mathfrak{U}_0$, *einen Lichtblitz ausgehen, wenn* $\mathfrak{U}_0$ *die Zeit* t_0 *anzeigt, und lasse ihn an einem Spiegel im Abstande* l *in sich zurückgeworfen werden. Alsdann stelle man die Uhr* $\mathfrak{U}_0$ *im Augenblick der Rückkehr auf die Zeit*

1) $$T_0 = t_0 + \frac{2l}{c}.$$

Diesen Versuch kann man sich nun immer wiederholt denken, indem man etwa den Lichtblitz in O wieder durch einen Spiegel in sich reflektiert und dann etwa immer zwischen den beiden Spiegeln hin- und hergeworfen denkt. Dann ist die Uhr $\mathfrak{U}_0$ immer, wenn der Lichtblitz auf den bei ihr befindlichen Spiegel trifft, auf die Zeiten

$$t_0 + \tau, \qquad t_0 + 2\tau, \qquad t_0 + 3\tau, \ldots \qquad \left(\tau = \frac{2l}{c}\right)$$

zu stellen. — In dieser Vorschrift haben wir, zumal l und damit auch τ beliebig klein gewählt werden kann, eine Regel, die Grunduhr $\mathfrak{U}_0$ *fortlaufend* zu regulieren.

2. Stellung der Uhren eines Systems gegeneinander. — *Man sende von* O *aus, wenn die dort befindliche Grunduhr* $\mathfrak{U}_0$ *die Zeit* t_0 *zeigt, einen Lichtblitz nach einem Punkte* A *und stelle bei seiner Ankunft daselbst, die dort befindliche Uhr* $\mathfrak{U}_A$ *auf die Zeit*

2) $$t_A = t_0 + \frac{OA}{c}.$$

Da wir die Stelle A beliebig gewählt, und auch diesen Versuch jederzeit wiederholt denken können, so ist dies anzusehen als eine Vorschrift, *sämtliche* Uhren des betrachteten Systems *fortlaufend* zu regulieren und zugleich gegeneinander zu stellen.

So sind denn in dieser Weise sämtliche Uhren eines Laboratoriums (Raumzeitsystems) gerichtet, sie sind alle an die Grunduhr $\mathfrak{U}_0$ des Systems angeschlossen, und damit auch gegeneinander gestellt. Einstein sagt, wenn die Uhren in der angegebenen Weise gerichtet sind, sie seien „synchron zu der Grunduhr $\mathfrak{U}_0$“. Dabei spielt aber die Grunduhr $\mathfrak{U}_0$ nur scheinbar eine ausgezeichnete Rolle: Nehmen wir zwei beliebige Stellen A und B an und lassen einen Lichtblitz, der zur Zeit t_0 von O ausgeht in A nach B und dort zurück nach O reflektiert werden und dort ankommen, wenn $\mathfrak{U}_0$ die Zeit T_0 anzeigt, dann ist nach dem Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

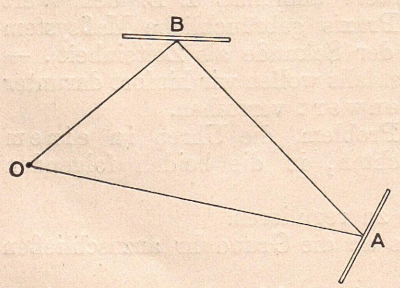


Fig 7.

2a) $$T_0 = t_0 + \frac{OA + AB + BO}{c},$$

und die zuvor synchron mit $\mathfrak{U}_0$ gerichteten Uhren $\mathfrak{U}_A$ und $\mathfrak{U}_B$ in A und B zeigen im Augenblick, wo der Lichtblitz an den dortigen Spiegeln reflektiert wird, die Zeiten

$$t_A = t_0 + \frac{OA}{c} \qquad \text{und} \qquad t_B = T_0 - \frac{BO}{c}$$

[vgl. (2)]; daraus folgt aber:

$$t_B - t_A = T_0 - t_0 - \frac{OA + OB}{c},$$

oder nach (2a):

$$t_B - t_A = \frac{AB}{c},$$

und diese Gleichung lehrt, daß $\mathfrak{U}_B$ auch synchron zu $\mathfrak{U}_A$ ist [vgl. (2)], so daß wir sagen können:

Zusatz 1. — *Sind zwei Uhren synchron zu einer dritten, so sind sie auch synchron untereinander.*

Ob wir also die Uhren des Systems synchron zu $\mathfrak{U}_0$ oder zu einer beliebigen anderen Uhr $\mathfrak{U}_A$ stellen, ist ganz gleichgültig, es ist demnach bei der angegebenen Art, die Uhren zu richten, das Prinzip von der Homogenität des Raumes gewahrt, es ist tatsächlich keine Uhr vor einer an anderer Stelle bevorzugt, und wir sind daher auch völlig berechtigt, hinfort zu sagen, die Uhren wären „*untereinander* synchron".

Durch Ausstattung mit solchen synchronen Uhren ist dann unser Laboratorium zu einem „*Lorentzschen Raumzeit-System*" geworden, und nun wollen wir einmal zwei solche Lorentz-Systeme ins Auge fassen, also zwei geradlinig gleichförmig gegeneinander bewegte Laboratorien $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$, Achsenkreuze mit je einem zugehörigen System synchroner Uhren. Wie im folgenden meist, wollen wir auch hier schon die Annahme machen, daß die x-Achse und die x'-Achse der beiden Systeme dauernd zusammenfielen, die Systeme also längs dieser Achse gegeneinander verschoben würden, und zwar $\mathfrak{L}'$ gegen $\mathfrak{L}$ in Richtung dieser positiven Achse. Nach dem Prinzip von der Homogenität (Isotropie) des Raumes, nach dem kein Raumpunkt vor einem anderen und keine Richtung in einem System vor einer anderen bevorzugt sein soll, bedeutet das keine sachliche Einschränkung. Ich kann, wenn irgendein Achsenkreuz gegen ein anderes geradlinig verschoben wird, die Bahn von dessen Anfangspunkt mit demselben Rechte zur x-Achse wählen wie jede andere Gerade, und ebenso auch zur x'-Achse, und weiter kann ich dann auch noch auf dieser Geraden die Anfangspunkte O und O' der beiden Systeme beliebig wählen. Habe ich das getan, so kann ich augenscheinlich wieder ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die in O und O' befindlichen Grunduhren $\mathfrak{U}_0$ und $\mathfrak{U}'_{0'}$ in dem Augenblick, wo diese Stellen aneinander vorübergleiten gerade die Zeit Null anzeigen, denn beim Synchronstellen der Uhren eines Systems blieb ja eine einmalige Stellung der Grunduhr (das obige t_0) noch ganz willkürlich. — Wir sagen dann, die beiden Raumzeitsysteme $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$ besäßen „denselben Raumzeitanfangspunkt" weil den Werten $x = y = z = t = 0$ im anderen System die Werte $x' = y' = z' = t' = 0$ entsprechen, oder dem Anfangspunkte O des einen Systems zur Anfangszeit auch gerade der Anfangspunkt O' des anderen Systems zu seiner Anfangszeit entspricht.

Wir betrachten jetzt also zwei solche längs der x- bzw. x'-Achse gleichförmig sich gegeneinander verschiebende Lorentzsche Raumzeitsysteme $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$ mit gemeinsamem Raumzeitanfangspunkte, und wollen uns dann zunächst über die Frage orientieren, ob aus dieser Uebereinstimmung der Uhren in O und O' im Augenblick ihres zeitlichen Zusammenfallens nun auch ganz allgemein

Uebereinstimmung je zweier gerade zusammenfallender Uhren beider Systeme folgt: Da denken wir uns denn einen Lichtblitz von dem gemeinsamen Raumzeitanfangspunkte ausgesandt, d. h. vom Orte des Zusammentreffens der beiden räumlichen Anfangspunkte O und O' im Augenblicke dieses Zusammentreffens, wenn also die beiden dort befindlichen Uhren der beiden Systeme gerade die Zeit $t_0 = t'_{0'} = 0$ anzeigen. (Von welchem der Systeme aus wir den Lichtblitz aussenden, ob mittels einer Kerze, die in dem einen oder dem anderen Systeme steht, ist nach dem letzten Teile des Prinzips von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit gänzlich gleichgültig.) Diesen Lichtblitz lassen wir nun an einem an beliebiger Stelle der x-Achse senkrecht zu dieser aufgestelltem Spiegel reflektiert werden. Diese Reflexion finde statt, wenn die daselbst stehende Uhr $\mathfrak{U}_R$ des ersten Systems die Zeit t_R, die des zweiten Systems t'_R anzeigt; alsdann wird der Lichtblitz, da er (nach dem Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit) in jedem Systeme zum Rückweg die gleiche Zeit wie zum Hinweg braucht, zur Stelle O des ersten Systems zur Zeit

$$T_0 = 2t_R$$

und zum Anfangspunkte O' des zweiten Systems zur Zeit

$$T'_{0'} = 2t'_R$$

zurückkehren, und, wenn wir also annehmen würden, daß augenblicklich zusammenfallende Uhren beider Systeme immer gleiche Zeit angäben, so müßte zunächst

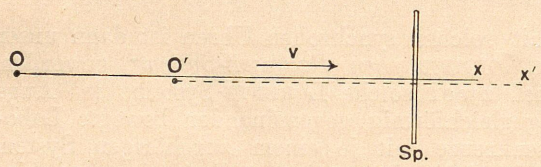


Fig. 8.

$$t'_R = t_R \qquad \text{und weiter auch} \qquad T'_{0'} = T_{0'}$$

sein, wenn $T_{0'}$ die Angabe einer Uhr im ersten Systeme $\mathfrak{L}$, die mit dem Anfangspunkte O' des zweiten Systems $\mathfrak{L}'$ zusammenfällt, wenn der zurückgehende Lichtimpuls diese Stelle passiert. So würde denn aus jener Annahme folgen:

$$T_0 = T_{0'},$$

und das würde dem Prinzipe von der Konstanz (Endlichkeit) der Lichtgeschwindigkeit widersprechen, denn es würde besagen, daß der Lichtblitz, um auf dem Rückwege die Strecke zwischen den dann doch nicht mehr zusammenfallenden Punkten O und O' zu durchlaufen (im System $\mathfrak{L}$ gemessen), überhaupt keine Zeit brauchen würde. So sehen wir denn, daß unsere Annahme unhaltbar ist, und wir erhalten:

Zusatz 2. — *Sind zwei gegeneinander bewegte Laboratorien gegeben und jedes einzeln mit einem Systeme synchroner Uhren ausgestattet, so zeigen im allgemeinen augenblicklich zusammenfallende Uhren beider Laboratorien verschiedene Zeiten.* — Denn wir wiesen ja nach, daß, wenn die in den Anfangspunkten O und O' aufgestellten Uhren beider Systeme im Augenblick des Zusammentreffens gleiche Zeit zeigten, es die Uhren an anderen Stellen (z. B. am Ort der Reflexion) nicht tun. —

Nach diesen mehr der Orientierung dienenden negativen Feststellungen wollen wir jetzt an die Hauptaufgabe herangehen, den tatsächlich bestehenden Zusammenhang zwischen den örtlich zusammenfallenden Uhren der beiden Systeme $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$ anzugeben und *analytisch* darzustellen, oder genauer: Wir

wollen einen beliebigen Raumzeitpunkt x, y, z, t im Systeme $\mathfrak{L}$, d. h. also eine beliebige Stelle x, y, z betrachten, wenn die daselbst befindliche Uhr die Zeit t angibt, und wollen dann nach den Koordinaten x', y', z' des koinzidierenden Punktes im zweiten Systeme $\mathfrak{L}'$ und der Angabe t' der dort befindlichen Uhr dieses Systems $\mathfrak{L}'$ fragen, also nach den Raumzeitkoordinaten x', y', z', t' desselben Raumzeitpunktes im Systeme $\mathfrak{L}'$ — wir wollen also die Beziehungsgleichungen (1) S. 40 zwischen den Raumzeitkoordinaten desselben Ereignisses in den beiden Systemen $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$,

$$3) \quad x' = x'(x,y,z,t), \quad y' = y'(x,y,z,t), \quad z' = z'(x,y,z,t), \quad t' = t'(x,y,z,t)$$

wirklich aufzustellen suchen.

Da machen wir zunächst einmal die Annahme, daß diese Beziehungsgleichungen linear sein sollen, also x', y', z', t' lineare Funktionen von x, y, z, t seien, eine Annahme, die nahegelegt wird durch die Analogie mit den entsprechenden Gleichungen, die den Uebergang zwischen zwei räumlichen Koordinatensystemen angeben. Ich komme später auf die Frage der Berechtigung dieser Annahme noch näher zurück.

Ueber die Form dieser linearen Funktionen können wir dann sogleich noch nähere Angaben machen: Wir halten an den oben getroffenen Verabredungen über die Orientierung der beiden Systeme $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$ gegeneinander fest; sie mögen sich längs der (mit der x'-Achse zusammenfallenden) x-Achse gleichförmig gegeneinander verschieben und einen gemeinsamen Raumzeitanfangspunkt besitzen. Aus dieser letzteren Tatsache (daß eben den Werten $x = y = z = t = 0$ auch die Werte $x' = y' = z' = t' = 0$ entsprechen) folgt zunächst, daß die gesuchten linearen Funktionen (3) homogen sein müssen. Weiter aber folgt, wenn wir die Geschwindigkeit von $\mathfrak{L}'$ gegen $\mathfrak{L}$ mit v bezeichnen, daß für den Anfangspunkt O' von $\mathfrak{L}'$ und überhaupt für alle Punkte der y', z'-Ebene, d. h. der Ebene $x' = 0$, im Systeme $\mathfrak{L}$ stets die Beziehung $x = vt$ gelten muß, oder die gesuchten linearen Funktionen (3) müssen so beschaffen sein, daß x' und $x - vt$ gleichzeitig verschwinden, unabhängig von den Werten von y und z. Daraus folgt aber, daß sich diese beiden Größen nur durch einen konstanten Faktor voneinander unterscheiden können, so daß also die erste der Gleichungen (3) sicher die Form

$$x' = A(x - vt)$$

haben muß. — Um ähnlich auch die zweite und dritte Gleichung (3) zu vereinfachen, denken wir uns noch die beiden (gleichsinnig angenommenen) Achsenkreuze um die x- oder x'-Achse so gedreht, daß die y'- und z'-Achse der y- bzw. z-Achse parallel und gleichgerichtet werden. Dann fallen also die x', z'-Ebene des einen und die x, z-Ebene des anderen Systems dauernd zusammen, und ebenso die x', y'-Ebene dauernd mit der x, y-Ebene, d. h. einem Werte $y = 0$ entspricht unabhängig von den Werten von x, z und t stets der Wert $y' = 0$ und ebenso werden auch z und z' immer gleichzeitig verschwinden. Daraus folgt wieder, daß sich y und y' und ebenso z und z' nur durch konstante Faktoren unterscheiden können, so daß wir jetzt die Form der 3 ersten Funktionen in (3) angeben können, und diese Gleichungen daher die Gestalt annehmen:

$$
\begin{aligned}
& x' = A(x - vt), \\
4) \qquad & y' = B \cdot y, \qquad z' = C \cdot z, \\
& t' = \alpha x + \beta y + \gamma z + kt.
\end{aligned}
$$

Es reduziert sich also unser Problem auf die Bestimmung nur noch der 7 Konstanten A, B, C, α, β, γ und k.

Um diese Bestimmung durchzuführen, stellen wir jetzt folgende Ueberlegung an: Wir senden (wie schon früher einmal) im gemeinsamen Raumzeitanfangspunkte ($x = y = z = t = 0$ und $x' = y' = z' = t' = 0$) der Systeme $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$ einen Lichtblitz aus und betrachten dessen Ankunft an einer Stelle x, y, z des ersten Systems. Sie erfolge zur Zeit t, d. h. natürlich, wenn die dort aufgestellte Uhr die Zeit t angibt, sodaß x, y, z, t die Raumzeitkoordinaten dieser Ankunft im System $\mathfrak{L}$ sind — und nun wollen wir die Raumzeitkoordinaten x', y', z', t' dieses selben „Ereignisses" E, die Ankunft des Lichtimpulses an dieser Stelle, im zweiten System $\mathfrak{L}'$ berechnen. Das ist nach den früheren allgemeinen Ausführungen möglich wegen des im Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit statuierten interlaboratoriellen Charakters der Lichtfortpflanzung, weil wir eben nach jenem Prinzipe die Gesetze kennen, nach denen sich derselbe Lichtblitz, auch vom zweiten Systeme aus betrachtet, fortpflanzt. — Würde jenes Prinzip, ebenso wie das Relativitätsprinzip, nur von getrennten Parallelversuchen handeln, so könnte es uns natürlich niemals die Beziehungsgleichungen zwischen beiden Systemen liefern.

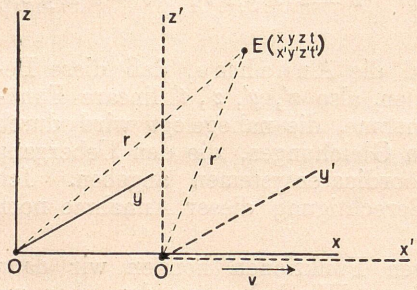


Fig. 9.

Das Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit sagt nun also aus, daß ein und derselbe Lichtblitz, unabhängig vom Bewegungszustande der Lichtquelle, in dem einen wie in dem anderen Laboratorium gemessen dieselbe Lichtgeschwindigkeit c besitzt — so sind ja die Uhren in jedem Systeme einzeln gestellt. Es ist also

$$r = c \cdot t \qquad \text{und} \qquad r' = c \cdot t'$$

wenn $r = OE$ und $r' = O'E$ die Lichtwege in beiden Systemen sind. So folgt also

$$c^2 t^2 - r^2 = 0 \qquad \text{und} \qquad c^2 t'^2 - r'^2 = 0$$

oder

$$5) \quad c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \qquad \text{und} \qquad c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0$$

Dies also sind Beziehungen, welche nach dem Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in dem einen und dem anderen Systeme zwischen den Koordinaten eines Punktes und der Zeitangabe der daselbst befindlichen Uhr beim Durchgang des Lichtimpulses bestehen. Da nun aber der Ort x, y, z im System $\mathfrak{L}$ — um uns zunächst auf eines der Systeme zu beschränken — beliebig gewählt werden kann, können wir das Verschwinden des Ausdrucks linkerhand in (5) auch allgemein als die Bedingung dafür ansehen, daß ein Raumpunkt x, y, z zur Zeit t, oder kurz, daß ein Raumzeitpunkt x, y, z, t von dem Licht-

impuls getroffen wird. Dann muß aber auch der Ausdruck links in der zweiten Gleichung (5) verschwinden, wenn x', y', z', t' die Koordinaten desselben Raumzeitpunktes bedeuten. Das Verschwinden von

$$6) \qquad c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

muß also mittels der zwischen den Koordinaten ein und desselben Raumzeitpunktes bestehenden Relationen (3) bzw. (4) auch das Verschwinden von

$$6') \qquad c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$$

nach sich ziehen. Da aber wegen des linearen Charakters der Gleichungen (4) dieser letztere Ausdruck, auch als Funktion von x, y, z, t aufgefaßt, wieder vom zweiten Grade ist, so können sich die beiden Ausdrücke (6) und (6') höchstens durch einen konstanten Faktor voneinander unterscheiden. So folgt denn, identisch in x, y, z, t:

$$7) \qquad c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 \equiv \sigma(c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2)$$

oder

$$7\,a) \qquad \begin{aligned} &c^2(\alpha x + \beta y + \gamma z + kt)^2 - A^2(x - vt)^2 - B^2y^2 - C^2z^2 \\ &\equiv \sigma(c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2). \end{aligned}$$

Wenn diese Gleichung aber identisch für alle x, y, z, t gelten soll, müssen die Koeffizienten entsprechender Quadrate und Produkte beiderseits übereinstimmen, und so ergibt sich durch Nullsetzen der Koeffizienten der nur links auftretenden Produkte: zunächst von t mit je einer der Raumkoordinaten x, y, z:

$$(P_1) \qquad 0 = c^2\alpha k + A^2v = c^2\beta k = c^2\gamma k$$

und sodann je zweier Raumkoordinaten untereinander:

$$(P_2) \qquad 0 = \beta\cdot\gamma = \gamma\cdot\alpha = \alpha\cdot\beta,$$

und weiter dann durch Gleichsetzen der Koeffizienten der Quadrate t^2, x^2, y^2, z^2:

$$(Q) \qquad \sigma = \frac{c^2k^2 - A^2v^2}{c^2} = A^2 - c^2\alpha^2 = B^2 - c^2\beta^2 = C^2 - c^2\gamma^2.$$

Da nun ein Blick auf (4) lehrt, daß A (ebenso wie B und C) nicht gleich 0 sein kann, und v eine gegebene von 0 verschiedene Größe ist, so folgt aus der ersten der Gleichungen (P_1) zunächst:

$$\alpha \neq 0 \qquad \text{und} \qquad k \neq 0,$$

so daß die weiteren Gleichungen (P_1) sofort das Resultat liefern

$$8_1) \qquad \beta = 0 \qquad \text{und} \qquad \gamma = 0,$$

wodurch gleichzeitig auch den Gleichungen (P_2) Genüge geschieht. Es bleiben also zur Bestimmung der übrigen 5 unbekannten Koeffizienten in (4) und der neu hinzugetretenen Unbekannten σ die Gleichungen

$$c^2\alpha k = -A^2v$$

$$8_2) \qquad \sigma = k^2 - \frac{A^2v^2}{c^2} = A^2 - c^2\alpha^2 = B^2 = C^2.$$

Das sind 5 Gleichungen, welche die 6 Unbekannten A, B, C, α, k und σ nicht vollständig zu bestimmen gestatten; wir können mittels derselben höchstens die übrigen dieser Größen durch eine von ihnen

ausdrücken. — Dazu wollen wir die Größe σ wählen, die wir, da sie nach den letzten Gleichungen positiv sein muß, gleich einem Quadrate setzen können, etwa

9) $$\sigma = \lambda^2 \qquad (\lambda > 0).$$

Dann ergibt sich:

10_1) $$B = C = \lambda,$$

denn, da nach unseren Festsetzungen über die Achsenrichtungen einem positiven y auch ein positives y' entspricht, folgt nach (4_2), das $B > 0$ sein muß, und ebenso $C > 0$. — Um dann auch noch die übrigen Unbekannten A, a und k durch σ bzw. λ auszudrücken, bleiben noch die Gleichungen:

11) $$c^2 a k = -A^2 v \qquad c^2 a^2 = A^2 - \lambda^2 \qquad c^2 k^2 = A^2 v^2 + c^2 \lambda^2.$$

Aus diesen Gleichungen können wir zunächst a und k eliminieren, indem wir $c^4 a^2 k^2$ einmal durch Quadrieren der ersten, dann durch Multiplizieren der beiden letzten Gleichungen bilden; so folgt

$$A^4 v^2 = (A^2 - \lambda^2)(A^2 v^2 + c^2 \lambda^2)$$

und daraus

$$0 = A^2 c^2 - A^2 v^2 - c^2 \lambda^2$$

oder

12) $$A^2 = \frac{c^2 \lambda^2}{c^2 - v^2} = \frac{\lambda^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

und unter Benutzung der schon früher eingeführten Bezeichnung

13) $$\frac{v}{c} = q \qquad \text{[vgl. S. 30]}$$

schließlich:

10_2) $$A = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - q^2}},$$

und zwar ist dabei die Wurzel positiv ausgezogen gedacht, denn A muß, wenn wir, wie immer, annehmen, daß x- und x'-Achse gleichgerichtet sind, positiv angenommen werden [vgl. (4_1)].

So sind denn durch die Formeln (10_1) und (10_2) die 3 in den Darstellungen (4) für x', y', z' auftretenden Faktoren A, B, C bestimmt oder wenigstens durch die eine unbekannte Größe λ ausgedrückt, und es bedarf nach (8_1) nur noch der Lösung der gleichen Aufgabe für die Koeffizienten a und k in der Darstellung (4) von t'. — Da knüpfen wir an die letzte Gleichung (11) an: In Verbindung mit (12) liefert sie

$$c^2 k^2 = c^2 \lambda^2 \left(\frac{v^2}{c^2 - v^2} + 1 \right) = \frac{c^4 \lambda^2}{c^2 - v^2}$$

oder:

$$k^2 = \frac{c^2 \lambda^2}{c^2 - v^2} = A^2, \qquad \text{[vgl. (12)]}$$

und daraus folgt dann, da k seiner Natur nach positiv sein muß (denn wachsendem t muß bei festgehaltenem x, y, z natürlich wachsendes t' entsprechen):

14) $$k = A = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - q^2}},$$

und dann liefert uns schließlich die erste Gleichung (11) noch:

$$c^2 a = -Av = -\frac{v\lambda}{\sqrt{1-q^2}}$$

oder:

$$15) \qquad a = -\frac{\lambda}{\sqrt{1-q^2}} \cdot \frac{v}{c^2} = -k \cdot \frac{v}{c^2}.$$

Damit sind jetzt sämtliche Koeffizienten in (4) durch λ ausgedrückt, und wir erhalten durch Substitution dieser Ausdrücke jetzt die Gleichungen:

$$16) \qquad \begin{aligned} x' &= \frac{\lambda}{\sqrt{1-q^2}}(x - vt), \\ y' &= \lambda y, \qquad z' = \lambda z, \qquad \left(q = \frac{v}{c},\ \lambda > 0\right) \\ t' &= \frac{\lambda}{\sqrt{1-q^2}}\left(t - \frac{v}{c^2}x\right), \end{aligned}$$

und damit ist der gesuchte Zusammenhang zwischen x, y, z, t und x', y', z', t' ermittelt — bis auf die eine noch unbekannt gebliebene Größe λ. —

Wir haben soeben in (16) die Koeffizienten der linearen Funktionen (4) so bestimmt, daß der Gleichung (7) Genüge geschieht (mit $\sigma = \lambda^2$), oder, wie wir auch sagen können, so daß unser interlaboratorieller Versuch mit dem Lichtblitz von den beiden Laboratorien aus betrachtet den vom Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit geforderten Verlauf nimmt. Die Größe λ kann uns dieses Prinzip nicht kennen lehren, denn sie gibt, wie wohl die zweite und dritte Gleichung (16) am deutlichsten erkennen lassen, eine Beziehung zwischen Längenmessungen in beiden Systemen an, und über diese enthält das Prinzip keine Aussage, es setzt ja nur die Verhältnisse von Längenmessungen zu Zeitmessungen (Geschwindigkeiten) in beiden Systemen in Beziehung zueinander. So müssen wir, um zur Bestimmung von λ zu gelangen, noch andere Prinzipien zu Hilfe nehmen, und zwar wird uns das Relativitätsprinzip und das Prinzip von der Homogenität (Isotropie) des Raumes zum Ziele führen.

Wir denken uns etwa in der x, y-Ebene des festen Systems $\mathfrak{L}$, bei unserer Veranschaulichung also auf der Erde,*) zwei zur x-Achse parallele Geraden (Schienen) im Abstande 1 voneinander, so daß

$$y_2 - y_1 = 1$$

ist. Dann erscheinen diese Geraden vom zweiten, fahrenden Laboratorium $\mathfrak{L}'$ aus nach Gleichung (16_2) im Abstande

$$y'_2 - y'_1 = \lambda.$$

Weiterhin wollen wir nun, um die Vorstellung zu fixieren, für die an sich ja beliebige Richtung der x-Achse, die Richtung, in der wir das zweite Laboratorium $\mathfrak{L}'$ (den Eisenbahnwagen) bewegt denken, eine bestimmte Richtung festlegen, oder richtiger eine Bezeichnung einführen: sie werde etwa als „Ostrichtung" bezeichnet — und ferner wollen wir annehmen, es sei $\lambda > 1$. Dann können wir unsere obigen Feststellungen folgendermaßen aussprechen: Der Abstand jenes parallel der Bewegungs-

*) Vgl. S. 39, vor allem auch die dritte Anmerkung daselbst.

richtung verlaufenden Linienpaares (der Schienen) erscheint von einem nach Osten fahrenden Laboratorium aus vergrößert. — Nun können wir aber bei demselben Vorgange nach dem Relativitätsprinzipe, von dem wir hiermit Gebrauch machen, ebensogut das zweite (bisher als bewegt betrachtete) Laboratorium $\mathfrak{L}'$, das System (x', y', z', t'), als ruhend ansehen und in ihm zwei Geraden im Abstande 1 gezogen

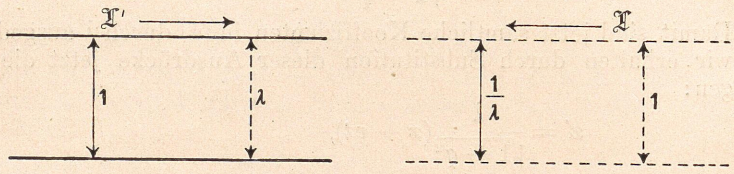


Fig. 10.

denken. Diese erscheinen dann vom System (x, y, z, t) aus, das jetzt ein nach Westen fahrendes Laboratorium darstellt, wieder nach (16_2) im Abstande $\frac{1}{\lambda} < 1$, und damit haben wir gefunden: der Abstand eines parallel der Bewegungsrichtung gezogenen Linienpaares erscheint von einem nach Westen bewegten Laboratorium aus verkleinert. — Diese beiden aus der Annahme $\lambda > 1$ gezogenen Folgerungen stehen aber nach dem Prinzipe von der Isotropie des Raumes in Widerspruch miteinander, denn diesem Prinzipe zufolge ist keine Richtung vor einer anderen bevorzugt, ein Laboratorium in einem nach Westen fahrenden Eisenbahnwagen kann keine anderen Eigenschaften zeigen wie eins in einem nach Osten fahrenden. — Dieser Widerspruch wird augenscheinlich nur behoben durch die Annahme

17) $$\lambda = 1 \qquad (\sigma = \lambda^2 = 1).$$

Das Relativitätsprinzip und das Prinzip von der Homogenität (Isotropie) des Raumes liefern also gemeinsam diese Bestimmung von λ, und damit sind dann die gesuchten Beziehungen zwischen den Raumzeitkoordinaten desselben Ereignisses in den beiden Laboratorien (x, y, z, t) und (x', y', z', t') völlig bestimmt, also hergeleitet aus dem Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit, dem Relativitätsprinzip und dem Prinzip von der Homogenität des Raumes. Sie lauten jetzt, wenn wir noch unsere frühere Größe $k = A$ [vgl. (14)] als Abkürzung beibehalten, folgendermaßen:

18)
$$x' = k(x - vt),$$
$$y' = y, \qquad z' = z, \qquad \left(k = \frac{1}{\sqrt{1 - q^2}},\ q = \frac{v}{c}\right).$$
$$t' = k\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

Allerdings ist diese Herleitung nur erfolgt unter der von vornherein gemachten Annahme der Linearität der Beziehungsgleichungen. Diese Annahme gilt es jetzt noch nachträglich zu begründen. Dazu verhelfen uns am einfachsten die Prinzipe von der Homogenität des Raumes und der Zeit.

Nach diesen Prinzipien bedeutet es zunächst keine Einschränkung, wenn wir nur Punkte der x-Achse ins Auge fassen, also von vorn-

herein $y = z = 0$ setzen*). Dann ist die x'-Koordinate eines solchen Punktes eine Funktion allein von x und t,

$$x' = f(x, t), \tag{19}$$

und diese Funktion gilt es nun näher zu untersuchen. Zu diesem Zwecke fassen wir noch einen beliebigen festen Punkt $x = \alpha$ der x-Achse zu einer ebenfalls beliebigen Zeit $t_\alpha = \tau$ ins Auge. In diesem Augenblick möge derselbe Punkt im zweiten System $\mathfrak{L}'$ die Koordinaten α', β', γ' besitzen und die dort befindliche Uhr von $\mathfrak{L}'$ möge die Zeit τ' anzeigen. Dann können wir diesen Raumzeitpunkt $(\alpha, 0, 0, \tau)$ bzw. $(\alpha', \beta', \gamma', \tau')$ zum gemeinsamen Anfangspunkt zweier neuer Raumzeitkoordinatensysteme $(\xi, \eta, \zeta, \vartheta)$ und $(\xi', \eta', \zeta', \vartheta')$ wählen, indem wir eben z. B. im ersten Systeme den räumlichen Anfangspunkt um die Strecke α verschieben und ebenso die Zeitanfangspunkte aller Uhren um die Zeit τ verlegen, so daß also

$$\xi = x - \alpha, \qquad \eta = y, \qquad \zeta = z, \qquad \vartheta = t - \tau$$

ist, und entsprechend:

$$\xi' = x' - \alpha', \qquad \eta' = y' - \beta', \qquad \zeta' = z' - \gamma', \qquad \vartheta' = t' - \tau'.$$

Dann müssen nach den Prinzipien von der Homogenität des Raumes und der Zeit diese neuen Systeme völlig gleichwertig sein unseren ursprünglichen, soll doch ihnen zufolge kein Raumpunkt und kein Zeitpunkt vor einem anderen ausgezeichnet sein. Demnach muß auch ein von dem gemeinsamen Raumzeitanfangspunkte dieser Systeme ausgesandter Lichtblitz von diesen Systemen aus betrachtet, sich genau so fortpflanzen wie der frühere in jenen Systemen, deren Raumzeitanfangspunkt seinen Ausgangspunkt darstellte. Da aber die Beziehungen zwischen Orts- und Zeitangaben in zwei Systemen immer aus der Beobachtung solcher Lichtblitze erschlossen wurden, so muß also genau die Beziehung (19) auch zwischen den Raumzeitkoordinaten in den neuen Systemen bestehen, d. h. es muß

$$\xi' = f(\xi, \vartheta) \qquad \text{sein, oder} \qquad x' - \alpha' = f(x - \alpha, t - \tau).$$

Durch Kombination dieser Gleichung mit (19) ergibt sich dann:

$$f(x, t) - f(x - \alpha, t - \tau) = \alpha' = f(\alpha, \tau) \tag{20}$$

und hier können wir nun z. B. $\tau = 0$ setzen, um so zu erhalten:

$$\frac{f(x, t) - f(x - \alpha, t)}{\alpha} = \frac{f(\alpha, 0)}{\alpha}.$$

Dieser Differenzenquotient links — denn um nichts anderes handelt es sich — ist also ganz unabhängig von der Stelle x, an der wir ihn bilden, daher folgt durch Grenzübergang $(\alpha \to 0)$ auch

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \text{const}, \tag{21a}$$

und hätten wir in (20) $\alpha = 0$ gesetzt, so hätten wir ganz analog zeigen können, daß auch

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \text{const} \tag{21b}$$

*) Die speziellen oben über die Orientierung der beiden Systeme gegeneinander gemachten Voraussetzungen können wir hier zunächst ganz fallen lassen, nur an der Annahme des gemeinsamen Raumzeitanfangspunktes wollen wir noch festhalten.

ist. Mit diesen beiden Gleichungen (21) ist aber der Beweis erbracht, daß *f eine lineare Funktion von x und t* ist. — Nach denselben Prinzipien läßt sich natürlich auch die Linearität der übrigen Gleichungen (3) beweisen.

Damit ist das letzte, was bei Ableitung die Formeln (18) zunächst noch hypothetisch geblieben war, als notwendige Folge der von uns zugrundegelegten Prinzipien erkannt, und wir haben damit endgültig bewiesen, daß die Gleichungen (18) den durch die genannten 3 Prinzipien von der Homogenität von Raum und Zeit, von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit und von der Relativität geforderten Zusammenhang zwischen zwei Raumzeitsystemen darstellen.

Zusammenfassung. — *Es werden zwei* Lorentzsche *Raumzeitsysteme* $\mathfrak{L}(x, y, z, t)$ *und* $\mathfrak{L}'(x', y', z', t')$ *mit gemeinsamen Raumzeitanfangspunkten betrachtet, von denen das zweite sich mit der Geschwindigkeit* $v > 0$ *in Richtung der positiven x-Achse gegen das erstere bewege; im Uebrigen falle die x'-Achse dauernd mit der x-Achse zusammen, während die y- und y'-Achse und ebenso die z- und z'-Achse einander dauernd parallel bleiben. — Alsdann werden die Beziehungen zwischen den Raumzeitkoordinaten ein und desselben Ereignisses in diesen beiden Systemen dargestellt durch die Gleichungen:*

$$(18)\qquad \begin{aligned} x' &= k(x - vt), \\ y' &= y, \qquad z' = z, \qquad \left(k = \frac{1}{\sqrt{1-q^2}},\ q = \frac{v}{c}\right), \\ t' &= k\left(t - \frac{v}{c^2}x\right), \end{aligned}$$

oder aufgelöst nach x, y, z, t:

$$(18')\qquad \begin{aligned} x &= k(x' + vt'), \\ y &= y', \qquad z = z', \\ t &= k\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right). \end{aligned}$$

Die Gleichungen, welche die Uebergänge von einem Lorentzschen System zu einem anderen darstellen, also Transformationen, denen gegenüber die Naturgesetze invariant sein sollten [vgl. S. 54], nannten wir nun schon früher „Lorentz-Transformationen". Wir können daher sagen: *die Gleichungen* (18) *oder* (18′) *stellen eine „spezielle Lorentz-Transformation" dar.*

Eine wichtige Eigenschaft dieser Lorentz-Transformation geht unmittelbar aus ihrer Ableitung hervor. Wir notieren folgenden

Zusatz. — *Die Substitutionen* (18) *oder* (18′) *lassen den Ausdruck*

$$(22)\qquad c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \qquad \textit{invariant.}$$

Es war das ja gerade die Forderung, aus der heraus wir die Formeln (18) und (18′) herleiteten [vgl. (7) und (17)].

Um sodann einige einfache Folgerungen aus den Gleichungen (18) und (18′) zu ziehen, betrachten wir die Bewegung des Anfangspunktes $O(x = y = z = 0)$ des ersten Systems $\mathfrak{L}$ vom System $\mathfrak{L}'$ aus. So erhalten wir denn für seine Raumzeitkoordinaten die Beziehungen

$$x' + vt' = 0, \qquad y' = 0, \qquad z' = 0$$

d. h. der Punkt O bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\frac{x'}{t'} = -v$ längs der x'-Achse, und das sprechen wir so aus:

Erste Folgerung. — *Das System $\mathfrak{L}$ erscheint, vom Systeme $\mathfrak{L}'$ aus gesehen, mit derselben Geschwindigkeit v im Sinne der negativen x'-Achse bewegt.*

Danach können wir also v kurz als die „*Relativgeschwindigkeit*“ der beiden Systeme bezeichnen. —

Sodann lehrt der bloße äußere Anblick der Formeln (18) oder (18′) weiter, daß die ganze Theorie auf den Fall $q < 1$ oder Systemgeschwindigkeiten $v < c$ beschränkt ist.

Zweite Folgerung. — *Die Theorie läßt nur Geschwindigkeiten $v < c$ (Unterlichtgeschwindigkeiten) zu.*

§ 7.

Vergleichung von Längen und Zeiten in zwei Systemen.

Auf Grund des in den Formeln (18) und (18′) dargestellten Zusammenhanges zwischen den Raumzeitkoordinaten zweier Lorentzscher Systeme wollen wir nun Längen- und Zeitvergleichungen in diesen vornehmen.

Da wollen wir uns einmal die Aufgabe stellen, die Länge eines Stabes im bewegten Systeme $\mathfrak{L}'$ zu messen vom ruhenden System $\mathfrak{L}$ aus*). — Zunächst bedarf diese Aufgabe noch der näheren Erklärung: Wenn der Stab im bewegten Systeme $\mathfrak{L}'$ senkrecht zur Fortbewegungsrichtung (x'-Achse) liegt, etwa in der x', y'-Ebene, so werden die Stabenden in der x, y-Ebene des ruhenden Systems $\mathfrak{L}$ zwei parallele Gerade beschreiben, und es kann wohl keinem Zweifel unterliegen, daß wir unter der „Länge des Stabes, gemessen im ruhenden Systeme“ den Abstand dieser beiden Geraden zu verstehen haben, und dieser läßt sich ja leicht berechnen. Ist die Stablänge im bewegten Systeme l, also

$$y'_a - y'_e = l \qquad (a \text{ und } e = \text{Anfangs- und Endpunkt}),$$

so folgt nach (18), daß auch der Abstand jener Geraden

$$y_a - y_e = l$$

ist, der Stab erscheint also vom ruhenden Systeme aus ebensogroß wie vom bewegten — Betrachtungen, wie wir sie ganz ähnlich ja bereits oben einmal anstellten [vgl. S. 63], als es sich um die Bestimmung der Faktors λ handelte. —

Nun nehmen wir einmal an, der Stab von der Länge l im bewegten Systeme $\mathfrak{L}'$ liege parallel der Fortbewegungsrichtung, z. B. etwa in der x'-Achse selber. Was werden wir dann unter der Länge dieses Stabes, gemessen vom ruhenden Systeme $\mathfrak{L}$ aus, verstehen? Da müssen wir uns an den älteren Auffassungen orientieren: Wie dachte man in der vorrelativistischen Physik die Länge eines bewegten Stabes in einem ruhenden Systeme gemessen, etwa im Galileischen Grundsystem? Man dachte sich den Abstand der Orte gemessen, an

*) Vgl. die dritte Anmerkung S. 39.

denen sich die beiden Endpunkte „zu gleicher Zeit“ befanden, wenn also die die universelle Zeit angebende NEWTONsche Normaluhr gleiche Zeit anzeigte. Die Auffassung von einer solchen NEWTONschen Normaluhr haben wir nun fallen lassen, an ihre Stelle tritt immer zur zeitlichen Wertung eines Ereignisses eine Uhr am Orte dieses Ereignisses, und zwar hier, wo wir doch die Messung im ruhenden System $\mathfrak{L}$ vornehmen wollen, natürlich die zu diesem System gehörige Uhr. So werden wir also sagen: *Unter der Länge eines Stabes im bewegten System, gemessen vom ruhenden aus, verstehen wir den Abstand der beiden Orte im ruhenden System, an denen sich Anfangs- und Endpunkt des Stabes befinden, wenn die beiden daselbst befindlichen Uhren dieses Systems gleiche Zeit anzeigen*; welche Zeit das ist, ist gänzlich gleichgültig, sie kann irgendwie vorgeschrieben sein.

Wir können uns danach die zur Messung notwendigen Operationen ganz konkret etwa in folgender Weise klar machen: Der (in der x'-Achse ruhende) Stab verschiebt sich gleichmäßig in seiner eigenen Längsrichtung gegen das feste System. An seinen Enden mögen 2 Beobachter sitzen, die seine Bewegung mitmachen und dauernd die Uhren des ruhenden Systems im Auge haben, an denen sie gerade vorbeigleiten. Jeder von ihnen macht, wenn die von ihm beobachtete Uhr eine bestimmte vorher verabredete Zeit t_0 z. B. *3* anzeigt, eine Marke auf der x-Achse des ruhenden Systems und dann mißt der in diesem System (Laboratorium) arbeitende Physiker den Abstand dieser beiden Marken aus, natürlich mit dem Maßstabe seines, des ruhenden Systems.

Nun wollen wir das Resultat dieser Messung rechnerisch bestimmen: da der zu messende Stab im bewegten System $\mathfrak{L}'$ ruht, und dort gemessen die Länge l hat, so sind x'_a und x'_e konstant und haben die Differenz l,

$$x'_a - x'_e = l,$$

und nun gilt es die Abszissen x_a und x_e der Marken im ruhenden System zu bestimmen, also der Stabenden, wenn die zugehörigen Uhren dieses Systems gleiche, eben die vorher verabredete Zeit t_0 zeigen. Dann sind also x_a und t_0 die Raumzeitkoordinaten der durch den Beobachter am Stab anfang ausgeführten Markierung, die mit der gegebenen Abszisse x'_a dieses Ereignisses im bewegten System durch die erste Gleichung (18) zusammenhängen, so daß

$$x'_a = k(x_a - v t_0)$$

ist, und entsprechend gilt für die Markierung am Stab ende:

$$x'_e = k(x_e - v t_0),$$

und aus beiden Gleichungen folgt durch Subtraktion

$$l \equiv x'_a - x'_e = k(x_a - x_e)^*)$$

oder

$$x_a - x_e = \frac{l}{k} = \sqrt{1 - q^2} \cdot l \cdot$$

---

*) Daß die beiden Markierungen, die vom ruhenden System aus gleichzeitig erfolgen, vom bewegten aus nicht mehr gleichzeitig sind [vgl. S. 58], folgt entsprechend aus der dritten Gleichung (18'), nach der $0 = t_a - t_e = k\left(t'_a - t'_e + \frac{v}{c^2} l\right)$, und also $t'_a - t'_e = -\frac{v}{c^2} l \neq 0$ ist.

Das also ist der Abstand der beiden Marken im ruhenden System, die Länge jenes Stabes, der im bewegten System die Länge l besaß, gemessen im ruhenden System. — Wir sprechen unsere Resultate folgendermaßen aus:

Längenvergleichung in der speziellen Relativitätstheorie. — *Ein Stab von der Länge l im bewegten Systeme hat, wenn er senkrecht zur Bewegungsrichtung liegt, vom ruhenden Systeme aus betrachtet dieselbe Länge l; liegt er hingegen parallel der Bewegungsrichtung, so erscheint er verkürzt im Verhältnis $\sqrt{1-q^2}:1$, wo $q=\frac{v}{c}$ — oder genauer: Der Abstand der Uhren im festen System, die beim Vorübergang des Anfangs- und des Endpunktes jenes Stabes gleiche Zeit anzeigen, ist nicht l, sondern nur $\sqrt{1-q^2}\cdot l$.* —

Entsprechend wollen wir jetzt einmal einen im ruhenden System $\mathfrak{L}$ festen Stab von der Länge l vom bewegten System $\mathfrak{L}'$ aus messen. Da müssen wir also den Abstand zweier Uhren dieses Systems $\mathfrak{L}'$ messen, die beim Vorübergang an Stab-Anfang und -Ende gleiche Zeit, sagen wir t'_0, zeigen. Es ist jetzt also

$$x_a - x_e = l$$

bekannt, und es wird $x'_a - x'_e$ gesucht, wenn nach der ersten der Gleichungen (18′)

$$x_a = k(x'_a + vt'_0) \qquad \text{und} \qquad x_e = k(x'_e + vt'_0)$$

ist. Es folgt so:

$$l \equiv x_a - x_e = k(x'_a - x'_e),$$

und also die gesuchte Länge des Stabes im System $\mathfrak{L}'$:

$$x'_a - x'_e = \frac{l}{k} = \sqrt{1-q^2}\cdot l.$$

Auch dieser Stab erscheint also verkürzt.

Zusatz. — *In demselben Sinne erscheint eine Länge l im ruhenden Systeme (parallel der Fortschreitungsrichtung), betrachtet vom bewegten Systeme aus, in dem Verhältnis $\sqrt{1-q^2}:1$ verkürzt.*

Wir sehen also, wie es ja nach dem Relativitätsprinzip auch sein muß, daß in Wahrheit keines der beiden Systeme $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$ vor dem anderen bevorzugt ist. Das Resultat in diesem zweiten Falle ist ganz genau dasselbe, als wenn wir das System $\mathfrak{L}$ mit dem Stabe als das bewegte, und $\mathfrak{L}'$ als das ruhende System ansähen und dann den ersten Satz anwendeten.

Wir sehen aber weiter auch, daß man diese Messungsresultate nicht etwa einfach durch eine Verschiedenheit der Maßstäbe in beiden Systemen erklären kann; denn wenn sich bei Messungen derselben Länge in beiden Systemen einmal in dem einen, das andere Mal in dem anderen der kleinere Wert ergibt, so hört diese Erklärungsmöglichkeit auf. Es kommt eben auf die näheren Umstände der Messung an, ob der gemessene Stab in dem einen oder in dem anderen Systeme ruht, und der tiefere Grund für die zunächst befremdlichen Resultate liegt, wie wohl aus der obigen Ableitung deutlich hervorgeht, in der neuen Art der Zeitmessung, in der Ausstattung jedes Systems (Laboratoriums) mit eigenen Uhren. —

Die beiden oben getrennt abgeleiteten Resultate gestatten die folgende

Zusammenfassung. — *Jeder Stab erscheint von einem mit der Geschwindigkeit v in seiner Längsrichtung gegen ihn bewegten* LORENTZschen *Systeme aus im Verhältnis* $\sqrt{1-q^2}:1$ *verkürzt, wo* $q=\frac{v}{c}$ *gesetzt ist. — Danach erscheint er am größesten von dem Systeme aus, in dem er ruht.* —

Nunmehr wenden wir uns zu einer entsprechenden Vergleichung der *Uhren* in beiden Systemen $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$. — Wir fassen speziell die Grunduhr $\mathfrak{U}'_{0'}$ im Anfangspunkte $O'(x'=y'=z'=0)$ des bewegten Systems $\mathfrak{L}'$ ins Auge; ihre Angaben $t'_{0'}$ können wir nach den EINSTEINschen Anschauungen nur vergleichen mit denen der Uhren des festen Systems $\mathfrak{L}$, an denen sie gerade vorbeigeht [vgl. Fig. 8, S. 58]. Für die Angabe $t_{0'}$ dieser Uhren von $\mathfrak{L}$, also die vierte Koordinate des Raumzeitpunktes $(0, 0, 0, t'_{0'})$ des bewegten Systems, liefert die letzte Gleichung (18′) die Darstellung

$$t_{0'}=k\cdot t'_{0'},$$

oder es ergibt sich

$$t'_{0'}=\frac{t_{0'}}{k}=\sqrt{1-q^2}\cdot t_{0'},$$

die bewegte Grunduhr $\mathfrak{U}'_{0'}$, die in dem Augenblicke, wo sie die Grunduhr $\mathfrak{U}_0$ des festen Systems passierte, mit dieser gleiche Zeit 0 zeigte — die Systeme sollten ja gemeinsamen Raumzeitanfangspunkt haben — bleibt immer mehr hinter den Angaben der festen Uhren $\mathfrak{U}_{0'}$, an denen sie vorbeigleitet, zurück.

Nunmehr wollen wir auch noch die Grunduhr $\mathfrak{U}_0$ des festen Systems $\mathfrak{L}$ vergleichen mit den wechselnden an ihr vorübergehenden Uhren $\mathfrak{U}'_0$ des bewegten Systems $\mathfrak{L}'$. Am Orte O von $\mathfrak{U}_0$ ist stets $x=y=z=0$ und daher nach (18_4):

$$t'_0=k\cdot t_0 \qquad \text{oder} \qquad t_0=\frac{t'_0}{k}=\sqrt{1-q^2}\cdot t'_0,$$

d. h. auch die Uhr $\mathfrak{U}_0$ bleibt hinter jenen an ihr vorüberziehenden Uhren zurück.

Zeitvergleichung in der speziellen Relativitätstheorie. — *Von den beiden Uhren in den Anfangspunkten O und O′ unserer beiden* LORENTZschen *Systeme* $\mathfrak{L}$ *und* $\mathfrak{L}'$, *die im Augenblicke der Koinzidenz (nach Voraussetzung) gleiche Zeit anzeigten* $(t_0=t'_{0'}=0)$, *bleibt jede hinter den Uhren des anderen Systems, an denen sie vorbeizieht, zurück: es ist*

$$t'_{0'}=\sqrt{1-q^2}\cdot t_{0'} \qquad \textit{und ebenso} \qquad t_0=\sqrt{1-q^2}\cdot t'_0 \qquad \left(q=\frac{v}{c}\right).$$

Der Satz bestätigt wieder die Gleichwertigkeit der beiden Systeme $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$, keines ist gegenüber dem anderen bevorzugt, es ist ganz gleichgültig, ob wir das eine oder das andere als das ruhende System ansehen.

Vielfach wird das obige Resultat auch so ausgesprochen: „Die EINSTEINschen Uhren im bewegten System gehen langsamer als die im festen System", oder noch kürzer: „bewegte Uhren gehen langsamer als

feste Uhren.“ In dieser sehr ungenauen Form scheint der Satz allerdings einen Widerspruch mit dem Relativitätsprinzip zu enthalten, denn man wird versucht, zu schließen: dasjenige von beiden Systemen, in dem die Uhren schneller gehen, also ein ganz bestimmtes, sei das ruhende — und diese Schlußweise würde allerdings dem Relativitätsprinzip widersprechen, demzufolge man berechtigt sein soll, ebensogut auch das andere als ruhend zu bezeichnen.

Daß der Satz in unserer obigen korrekten Fassung zunächst keinen Widerspruch in sich enthält, wie es auf den ersten Blick scheinen könnte, macht man sich am einfachsten wohl durch die Ueberlegung klar, daß es sich in den beiden Teilen des Satzes jedesmal um ganz verschiedene Uhren handelt, die verglichen werden. Das erste Mal verglichen wir *eine* Uhr des Systems $\mathfrak{L}'$ (dessen Grunduhr $\mathfrak{U}'_{0'}$) mit einer *Reihe* von Uhren des Systems $\mathfrak{L}$, das zweite Mal umgekehrt *eine* Uhr von $\mathfrak{L}$ ($\mathfrak{U}_0$) mit einer ganzen *Reihe* von Uhren von $\mathfrak{L}'$, so daß sich also *die beiden Aussagen des Satzes auf ganz verschiedene Uhren beziehen und daher auch nicht im Widerspruch miteinander stehen können.*

Die einzigen Uhren, die in beiden Sätzen gleichzeitig auftreten, sind die beiden Grunduhren $\mathfrak{U}_0$ und $\mathfrak{U}'_{0'}$; diese fallen aber nur in einem Augenblicke zusammen (in dem sie überdies noch gleiche Zeit anzeigen), ihre „Ganggeschwindigkeiten“ zu vergleichen ist daher gar keine Gelegenheit; denn die Ganggeschwindigkeiten zweier Uhren kann man nur dadurch vergleichen, daß man die Angaben der Uhren mehrmals vergleicht.

Nun könnte man aber einwenden, daß die eine Uhr z. B. von $\mathfrak{L}'$, wenn auch nicht mit einer Uhr von $\mathfrak{L}$ verglichen wird, so doch dauernd mit Uhren von untereinander gleicher Ganggeschwindigkeit*). — Aus dem oben angegebenen Resultate dieser Vergleichung aber auf eine Verschiedenheit der *Ganggeschwindigkeiten* der Uhren in beiden Systemen schließen zu wollen, wie sie der obige angebliche Widerspruch mit dem Relativitätsprinzip voraussetzt, wäre gänzlich falsch. Denn wenn man die Angaben einer Uhr mit denen verschiedener Uhren eines anderen Systems vergleicht, so hängt das Resultat durchaus nicht nur von den „Ganggeschwindigkeiten“ der beteiligten Uhren ab, sondern auch noch davon, wie die Uhren „gegeneinander gestellt“ sind [vgl. S. 42]. — Ein Beispiel aus dem täglichen Leben, bei dem wir sogar ruhig an der üblichen Vorstellung von einer universellen Zeit festhalten können, wird das am besten klar machen: Wenn jemand von einem Orte A nach einem Orte B geht, die beide „gleich regulierte“, oder „gleich schnellgehende“ Turmuhren besitzen, und er stellt seine Taschenuhr in A mit der dortigen Uhr übereinstimmend, und findet bei seiner Ankunft in B, daß die Taschenuhr weniger anzeigt, als die dortige Turmuhr, so kann er doch aus diesen Tatsachen unmöglich schließen, daß seine Taschenuhr „langsamer geht“ als diese beiden Turmuhren, denn er weiß ja gar nicht, ob die Uhr in B nicht von vornherein gegen die in A „vorgestellt“ war. — So sehen wir, daß es durchaus unzulässig ist, aus jenem unserem Satze Rückschlüsse auf die „Ganggeschwindigkeiten“ der Uhren in

*) Schlechtweg von einer Ganggeschwindigkeit der Uhren in $\mathfrak{L}$ oder auch derer in $\mathfrak{L}'$ zu sprechen, sind wir durchaus berechtigt, haben wir doch früher ausdrücklich alle Uhren eines Systems auf gleiche Ganggeschwindigkeit reguliert [vgl. S. 42].

beiden Systemen zu tun, wie es bei den angeführten ungenauen Formulierungen geschieht.

Nun könnte aber noch folgender weitere Einwand gemacht werden: Man denke sich die Grunduhr $\mathfrak{U}'_{0'}$ des bewegten Systems, die bei der Koinzidenz von O' mit O' gleiche Zeit wie $\mathfrak{U}_0$ zeigt, eine Strecke in der einen Richtung fortbewegt, und dann mit derselben Geschwindigkeit zurückgeführt. Dann wird sie jenem Satze zufolge auf Hin- und Rückweg immer hinter den Angaben der passierten festen Uhren zurückbleiben, also auch bei der Rückkehr weniger zeigen wie $\mathfrak{U}_0$. Es würde also $\mathfrak{U}'_{0'}$ schließlich hinter einer Uhr von $\mathfrak{L}$, mit der sie anfänglich gleich zeigte, zurückgeblieben sein, und man schiene allerdings berechtigt, zu sagen, sie „ginge langsamer" als diese. — Dieser Schluß ist aber — um wenigstens das hier kurz anzudeuten — deshalb unzulässig, weil es sich bei diesem Versuche gar nicht mehr um eine gleichförmige, beschleunigungsfreie Bewegung handelt, die $\mathfrak{U}'_{0'}$ ausführt, ihre Geschwindigkeit ändert sich von v in $-v$, es tritt also im Umkehrpunkte eine Beschleunigung auf. Deshalb sind unsere obigen Ueberlegungen nicht ohne weiteres anwendbar.

§ 8.

Die einfachsten Anwendungen der Theorie.

Wir wollen in diesem Paragraphen vor allem die drei in § 3 besprochenen Erscheinungen (Aberration des Lichtes, Michelsonscher Interferenzversuch und Fizeauscher Mitführungsversuch), die sich dort aus einer einheitlichen Hypothese über die Lichtfortpflanzung nicht erklären ließen, noch einmal erörtern. Es soll untersucht werden, wie sich ihre Erklärung zu der oben entwickelten speziellen Relativitätstheorie stellt.

Was zunächst den **Michelsonschen Interferenzversuch** anlangt, so haben wir von ihm bereits am Schlusse von § 3 erwähnt, daß er in bestem Einklang mit dem Relativitätsprinzip steht, denn wir konnten den bei ihm vorliegenden Sachverhalt dahin deuten, daß 2 Parallelversuche, einer in einem ruhenden, einer in einem bewegten Bezugssystem angestellt werden. Daß diese dann gleich verlaufen, wie es die Ausführung des Versuchs lehrte, das fordert ja gerade das Relativitätsprinzip. — Die im vorigen Paragraphen von uns ermittelten Beziehungen zwischen den Raumzeitkoordinaten eines Ereignisses in den beiden Systemen gestatten uns nun aber auch beide Versuche von ein und demselben Systeme aus rechnerisch zu verfolgen.

Wenn das Resultat zwar auch vorauszusehen ist, da wir ja jene Beziehungen eben so bestimmt haben, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in bezug auf beide Systeme gleich groß ist, so scheint mir die Durchführung einer solchen Rechnung doch lehrreich genug, um sie hier noch zu bringen.

Daß bei dem ersten Versuche (im Falle α, den wir eben den „Versuch mit ruhendem Apparate" nannten) die Mitte M des Interferenzschirmes [vgl. Fig. 4, S. 28] hell erschien, bedarf vom Standpunkte des ruhenden Systems, d. h. eben des Systems, in dem der Apparat jetzt ruht, keiner näheren Erläuterung. Nun wollen wir aber den

zweiten Versuch (Fall β) mit bewegtem Apparate vom ruhenden System aus betrachten. Da sehen wir denn als Raumzeitanfangspunkt dieses Systems das Ereignis an, das darin besteht, daß der Wellenberg, den wir auf seinem Wege verfolgten, die Glasplatte G oder die Achse A passiert, so daß, wenn (im ruhenden System) für diesen Wellenberg $x_A = 0$ ist, auch gleichzeitig die dortige Uhr $\mathfrak{U}_A$ die Zeit 0 anzeigt.

Um nun zunächst den ersten Lichtweg in der Bewegungsrichtung des Apparates (x-Richtung) zu untersuchen, fragen wir nach dem Abszissenwert x_{S_1}, der dem Spiegel S_1 entspricht, wenn die dortige Uhr $\mathfrak{U}_{S_1}$ (des ruhenden Systems) ebenfalls 0 zeigt. Von einem mitgehenden Beobachter ist der Abstand AS_1 zu l bestimmt; also ist der gesuchte Abstand zweier Uhren des festen Systems, die beim Vorübergange von A und S_1 gleiche Zeit (in unserem Falle also die Zeit 0) anzeigen, nach den Ausführungen des vorigen Paragraphen

$$x_{S_1} = \frac{l}{k} = \sqrt{1-q^2}\cdot l.$$

Bis nun der betrachtete Wellenberg den Spiegel S_1 erreicht (Zeit τ_h, jetzt aber natürlich wieder gemessen am Orte dieses Einholens) hat sich dieser Spiegel S_1 um die Strecke $v\cdot\tau_h$ verschoben*), denn die Geschwindigkeit v ist ja jetzt der Quotient aus dem zurückgelegten Wege und der Differenz der Zeitangaben (hier 0 und τ_h) an beiden Enden [vgl. S. 44]. So tritt also die Reflexion am Spiegel S_1 bei dem Abszissenwerte

$$x_{S_1} + v\cdot\tau_h = \sqrt{1-q^2}\cdot l + v\cdot\tau_h$$

und zu der Zeit τ_h ein. Da aber die Lichtgeschwindigkeit c ist, so ist diese selbe Strecke als Lichtweg von A bis zur Reflexion nach obiger Definition der Geschwindigkeit auch gleich $c\cdot\tau_h$, also

$$c\cdot\tau_h = \sqrt{1-q^2}\cdot l + v\cdot\tau_h,$$

und es folgt daher für die Zeit τ_h:

$$\tau_h = \sqrt{1-q^2}\,\frac{l}{c-v}.$$

Ganz entsprechende Ueberlegungen liefern natürlich für die Zeitdauer τ_r des Rückweges bis A:

$$\tau_r = \sqrt{1-q^2}\,\frac{l}{c+v},$$

also ergibt sich für die Zeit, die der Wellenberg zum Wege von A nach S_1 und wieder zurück nach A braucht, gemessen im festen System:

$$t_1 = \tau_h + \tau_r = \sqrt{1-q^2}\cdot l\left(\frac{1}{c-v} + \frac{1}{c+v}\right) = \sqrt{1-q^2}\,\frac{2cl}{c^2-v^2},$$

oder, da $\frac{v}{c} = q$ ist [vgl. S. 30 und (13) S. 62]:

$$t_1 = \sqrt{1-q^2}\cdot\frac{2l}{c}\,\frac{1}{1-q^2} = \frac{2l}{c}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-q^2}},$$

*) Man darf nicht etwa so ohne weiteres sagen: Bis der Wellenberg den Spiegel S_1 erreicht, hat sich „der ganze Apparat“ um diese Strecke verschoben, denn ich weiß ja gar nicht, was ich an anderer Stelle des Apparates unter der Zeit zu verstehen habe, zu der der Wellenberg den Spiegel S_1 erreicht — es wäre das ein Rückfall in die Vorstellung von der universellen Zeit.

und das ist genau der Wert, den wir früher für t_2 fanden, für die Zeit, die der Wellenberg im zweiten Teile des Strahles braucht, um von A über S_2 nach A zurückzukehren [vgl. (4_2) S. 30], und an der dort gegebenen Ableitung dieses Ausdrucks für t_2 ändert sich formal nichts, es ist eben nur bei den Zeitangaben zu beachten, daß sie sich jetzt stets auf den Ort des betreffenden Ereignisses (und auf das feste System) beziehen. So folgt denn, wie wir nicht anders erwarten konnten:

$$t_1 = t_2,$$

d. h. die beiden Teile des Zentralstrahles weisen keinen Gangunterschied auf, in der Schirmmitte M herrscht Helligkeit, wie es der Versuch ja auch bestätigt. — Wir vermerken daher folgenden

Spezialsatz I. — *Das Ergebnis des* Michelsonschen *Versuches wird durch die Relativitätstheorie völlig aufgeklärt.*

Ein Vergleich dieser auf Grund der Relativitätstheorie gegebenen Behandlung mit der in § 3 sich auf die Hypothese vom ruhenden Aether aufbauenden lehrt, daß der einzig wesentliche Unterschied darin besteht, daß eben jetzt der Abstand des Spiegels S_1, an dem der in die Bewegungsrichtung fallende Strahl reflektiert wird, gemessen im ruhenden System nicht gleich l, wie im bewegten, sondern gleich $\sqrt{1-q^2}\cdot l$ ist, also verkürzt erscheint. Nach der Relativitätstheorie tritt also genau die *Verkürzung im Verhältnis* $\sqrt{1-q^2}:1$ *ein, welche bereits H. A.* Lorentz *und G. F.* Fitzgerald *annahmen*, um das negative Ergebnis des Michelsonschen Versuches zu erklären [vgl. S. 31]; allerdings ist es nach der Relativitätstheorie nicht, wie diese Forscher annahmen, eine „wirkliche" Verkürzung der Stäbe, die als Begleiterscheinung der Bewegung auftritt*), sondern nur eine scheinbare Verkürzung, die nur in der neuen Art der Längenmessung, letzten Endes also wieder in der neuen Art der Zeitrechnung ihren Grund hat, wie das ja im vorigen Paragraphen näher ausgeführt ist. —

Um sodann auch festzustellen, wie das Resultat des **Fizeauschen Mitführungsversuches** sich zur Relativitätstheorie verhält, wollen wir hier zunächst noch einige allgemeine Untersuchungen anstellen, die auch ein gewisses selbständiges Interesse für sich beanspruchen.

Wir denken uns einen Massenpunkt sich im bewegten Systeme (x', y', z', t') mit einer gegebenen konstanten Geschwindigkeit u' parallel der Bewegungsrichtung dieses Systems fortbewegend, am einfachsten also bei der von uns immer angenommenen Sachlage in der x'-Achse selber — und wollen dann nach der Geschwindigkeit u fragen, die er, bezogen auf das feste System (x, y, z, t), besitzt.

Nach der Definition der Geschwindigkeit in der Relativitätstheorie, an die wir soeben erst erinnerten, ist sie immer der Quotient aus dem zurückgelegten Wege und der Differenz der Zeitangaben der beiden Uhren an den Enden dieser Wegstrecke. Betrachten wir also irgend 2 der von unserem Massenpunkt durchlaufenen Raumzeitpunkte (x_1, t_1) und (x_2, t_2) bzw. (x_1', t_1') und (x_2', t_2') — von der Angabe der übrigen dauernd verschwindenden Koordinaten sehen wir gänzlich ab —, dann ist

$$1) \qquad u = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \qquad \text{und} \qquad u' = \frac{x_2' - x_1'}{t_2' - t_1'},$$

*) Was hier kurz als „wirkliche Verkürzung" bezeichnet ist, hat natürlich überhaupt nur einen Sinn, wenn wir an der Vorstellung von der universellen Zeit festhalten.

und von diesen beiden Größen soll nun die zweite als bekannt angesehen, die erstere bestimmt werden. Nun benutzen wir den zwischen den Raumzeitkoordinaten in beiden Systemen bestehenden Zusammenhang, wie ihn speziell die Formeln (18′) S. 66 angeben. Dann folgt

$$u = \frac{k(x'_2 + v t'_2) - k(x'_1 + v t'_1)}{k\left(t'_2 + \frac{v}{c^2} x'_2\right) - k\left(t'_1 + \frac{v}{c^2} x'_1\right)} = \frac{(x'_2 - x'_1) + v(t'_2 - t'_1)}{(t'_2 - t'_1) + \frac{v}{c^2}(x'_2 - x'_1)},$$

und das ist, wenn wir Zähler und Nenner durch $(t'_2 - t'_1)$ dividieren, und die zweite Gleichung (1) benutzen:

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'}.$$

Damit ist die gestellte Aufgabe gelöst. Das Resultat sprechen wir folgendermaßen aus:

Das Additionstheorem der Geschwindigkeiten in der Relativitätstheorie. — *Bewegt sich ein Massenpunkt gegen ein selber mit einer Geschwindigkeit v bewegtes System in dessen Fortschreitungsrichtung mit der Geschwindigkeit u', so ist seine Geschwindigkeit u bezogen auf das feste System:*

2)
$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u' v}{c^2}}.$$

Während nach den älteren Auffassungen sich Geschwindigkeiten in derselben Richtung einfach addieren (also $u = u' + v$ wäre), tritt hier an die Stelle der einfachen Summenformel diese kompliziertere Formel (2). — Aus ihr ergibt sich eine wichtige Folgerung — am einfachsten, wenn wir die Formel (2) noch etwas umformen und folgendermaßen schreiben:

$$1 - \frac{u}{c} = 1 - \frac{\frac{u'}{c} + \frac{v}{c}}{1 + \frac{u' v}{c^2}} = \frac{\left(1 - \frac{u'}{c}\right)\left(1 - \frac{v}{c}\right)}{1 + \frac{u' v}{c^2}}.$$

Aus dieser Darstellung ersieht man sofort, daß, wenn $u' < c$ und $v < c$, also sämtliche Faktoren rechts positiv sind, auch $1 - \frac{u}{c}$ positiv, d. h. auch $u < c$ ist. So erhalten wir folgende interessante

Folgerung. — *Durch Zusammensetzen zweier Unterlichtgeschwindigkeiten kann man niemals eine Ueberlichtgeschwindigkeit erhalten.*

So erhält man z. B. durch Zusammensetzung zweier Geschwindigkeiten von der Größe $\frac{1}{2} c$ und $\frac{2}{3} c$ nicht, wie man früher gesagt hätte, eine Geschwindigkeit von der Größe $\frac{7}{6} c$, sondern nur von der Größe

$$\frac{\frac{7}{6} c}{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{\frac{7}{6} c}{\frac{4}{3}} = \frac{7}{8} c.$$ — Nach den älteren Auffassungen kann

man, wenn man überhaupt irgendeine bestimmte Geschwindigkeit v_0 herzustellen imstande ist, immer auch beliebig hohe Geschwindigkeiten herstellen: man braucht nur Geschwindigkeiten von der Größe v_0 wiederholt zu summieren, indem man z. B. einem ersten Wagen die Geschwindigkeit v_0 gibt, auf ihm einem zweiten Wagen abermals die Geschwindigkeit v_0 gegen ihn, usw.; so kann man dann die Geschwindigkeiten $2v_0$, $3v_0$, usw. herstellen, es gibt also keine obere Grenze der herstellbaren Geschwindigkeiten. — Anders hier in der Relativitätstheorie: hier kann man durch ein solches Verfahren der Summation von Geschwindigkeiten niemals über die Grenze c hinauskommen und unsere frühere Feststellung, daß die Relativitätstheorie nur Geschwindigkeiten unterhalb c (Unterlichtgeschwindigkeiten) kennt [vgl. die „Zweite Folgerung" S. 67], wird erst durch diese Tatsachen recht verständlich.

Will man sich von dieser Eigenschaft der Geschwindigkeiten in der Relativitätstheorie, sich nicht einfach zu summieren, eine leidlich anschauliche Vorstellung machen, so kann man etwa so schließen: die Geschwindigkeit u' unseres Massenpunktes gegen das bewegte System erscheint vom ruhenden System aus infolge der scheinbaren Aenderung der Längen- und Zeitmaßstäbe verkleinert, und da diese Aenderung der Maßstäbe um so größer wird, je näher die Relativgeschwindigkeit v der Systeme der Lichtgeschwindigkeit c kommt, so findet in diesem Falle auch die stärkste Verkleinerung statt, und man kann sich in dieser Weise klarmachen, wie es kommen kann, daß eine gewisse Grenze für die resultierende Geschwindigkeit nie überschritten werden kann. —

Von dem obigen Additionstheorem der Geschwindigkeiten wollen wir nun die Anwendung machen auf die Erklärung des Fizeauschen Versuchs [vgl. S. 32]. Wir bezeichnen zunächst die Geschwindigkeit des Lichtes in der Röhre mit der ruhenden Flüssigkeit [vgl. Fig. 6, S. 32] mit c', so daß also

$$3) \qquad \frac{c}{c'} = n,$$

der Quotient der Lichtgeschwindigkeiten im Vakuum und in der Flüssigkeit, der „Brechungsexponent" der Flüssigkeit ist. — Nunmehr denken wir uns mit der die zweite Röhre durchströmenden Flüssigkeit (Geschwindigkeit v) das bewegte Bezugssystem (x', y', z', t'), von dem wir immer sprachen, mitgehen. Dann muß die Geschwindigkeit u' eines Lichtimpulses in bezug auf dieses System dem Relativitätsprinzip zufolge wieder gleich c' sein,

$$u' = c',$$

denn die Geschwindigkeit des Lichtes muß in einem bewegten Systeme, gemessen mit dessen Instrumenten, diesem Prinzipe zufolge denselben Wert haben, wie im ruhenden Systeme, gemessen mit dessen Instrumenten. — So folgt denn nach dem Additionstheorem (2) der Geschwindigkeiten für die Geschwindigkeit u des Lichtimpulses gegenüber dem ruhenden System:

$$u = \frac{c' + v}{1 + \frac{c'v}{c^2}} \quad \text{oder} \quad u - c' = \frac{(c' + v) - c'\left(1 + \frac{c'v}{c^2}\right)}{1 + \frac{c'v}{c^2}} = v \cdot \frac{1 - \frac{c'^2}{c^2}}{1 + \frac{c'v}{c^2}}.$$

Machen wir jetzt von (3) Gebrauch und setzen wieder noch $\frac{v}{c} = q$, so ergibt sich schließlich

$$u = c' + v \frac{1 - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{q}{n}}.$$

Bei der Kleinheit von q — als Strömungsgeschwindigkeit der Flüssigkeit ist v naturgemäß äußerst klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit c im Vakuum — können wir den Nenner praktisch gleich 1 setzen, also schreiben:

4) $$u \sim c' + v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Von dieser Geschwindigkeit der Lichtimpulse im strömenden Wasser, bezogen auf das feste System, hängt nun augenscheinlich allein das Ergebnis des Versuches ab, denn es kommt darauf an, in welcher Zeit das Licht in der zweiten Röhre die Strecke zwischen den festen, die Röhre verschließenden, planparallelen Platten durchläuft, denn allein von dieser Zeit hängt der durch die Strömung der Flüssigkeit verursachte Gangunterschied der beiden interferierenden Strahlenbüschel und damit die Verschiebung der Interferenzfrangen ab. Diese Geschwindigkeit u ist nun nach (4) gegenüber c', der Geschwindigkeit in der ruhenden Flüssigkeit, also durch die Strömung, vermehrt um den Bruchteil $\vartheta = 1 - \frac{1}{n^2}$ der Strömungsgeschwindigkeit v, und das war genau das aus der Verschiebung der Interferenzfrangen berechnete Resultat [vgl. Satz 3, S. 33]. — Somit ergibt sich

Spezialsatz 2. — *Die Relativitätstheorie liefert für den* Fresnelschen *„Mitführungskoeffizienten" praktisch richtig den Wert:*

$$\vartheta = 1 - \frac{1}{n^2} \qquad \left(\textit{strenge: } \vartheta = \frac{1 - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{q}{n}} \right),$$

und erklärt damit den Fizeauschen *Mitführungsversuch.* —

Auch der Behandlung der **Aberration des Lichtes** nach der neuen Theorie wollen wir einige Betrachtungen allgemeineren Charakters vorausschicken.

Wir betrachten einen Wellenvorgang einfachster Art, eine ebene Welle, zunächst von einem bestimmten (festen) System aus. Was da in Schwingungen gerät, darüber brauchen wir uns keine näheren Vorstellungen zu bilden; wir können etwa an elastische Teilchen denken, und wollen uns demnach unter der im folgenden mit s bezeichneten Größe etwa die Elongation dieser Teilchen vorstellen, wie in der elastischen Lichttheorie.

Wenn die Wellennormale einer solchen ebenen Welle mit der ξ-Richtung eines Koordinatensystems zusammenfällt, die Fortpflanzung mit der Geschwindigkeit u erfolgt, und die Wellenlänge λ ist, gilt jetzt genau so wie in der älteren Physik die Gleichung:

$$s = A \cos 2\pi \frac{\xi - ut}{\lambda},$$

nur daß jetzt wieder t immer die Zeit am Orte der betrachteten Elongation bedeutet, und dafür können wir auch schreiben:

$$s = A \cos \nu \left(t - \frac{\xi}{u}\right), \qquad \text{wenn} \qquad \nu = 2\pi \frac{u}{\lambda} = \frac{2\pi}{T}$$

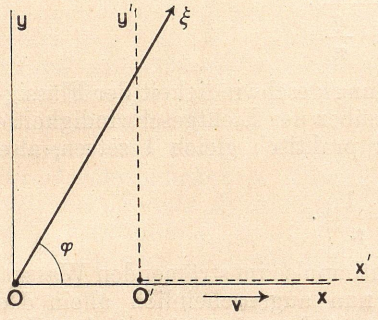


Fig. 11.

die „Frequenz" bedeutet, d. h. die Zahl der Schwingungen ein und desselben Teilchens (z. B. $\xi = 0$) in 2π Zeiteinheiten. — Die ξ-Richtung der Wellennormalen, so wollen wir nun annehmen, bildete in der x, y-Ebene unseres immer betrachteten festen Systems $\mathfrak{L}$ mit dessen x-Achse einen Winkel φ, so daß also

$$\xi = x \cdot \cos \varphi + y \cdot \sin \varphi$$

zu setzen ist. Dann ist in bezug auf dieses System $\mathfrak{L}$ der Vorgang beschrieben durch die Gleichung:

$$5) \qquad s = A \cos \nu \left(t - \frac{x \cos \varphi + y \sin \varphi}{u}\right),$$

und nun wollen wir diese nämliche fortschreitende Welle von dem bewegten System $\mathfrak{L}'$ (x', y', z', t') betrachten (also als einen „interlaborationellen" Vorgang). Da brauchen wir nur die Transformationsgleichungen (18′) S. 66 zur Anwendung zu bringen, um zu erhalten:

$$6) \qquad s = A \cos \nu \left\{k\left(t' + \frac{v}{c^2} x'\right) - \frac{k(x' + vt') \cos \varphi + y' \sin \varphi}{u}\right\},$$

und das ist wieder eine Gleichung von der Form

$$5') \qquad s = A \cos \nu' \left(t' - \frac{x' \cos \varphi' + y' \sin \varphi'}{u'}\right),$$

also *der Vorgang stellt, auch vom bewegten System aus betrachtet, eine ebene fortschreitende Welle dar*, nur von anderer Frequenz, Fortpflanzungs-Richtung und -Geschwindigkeit. — Zur Bestimmung dieser neuen Werte ν', φ', u' ergibt die Vergleichung der Formeln (5′) und (6) zunächst:

$$7) \qquad \nu' = \nu \cdot k \left(1 - \frac{v}{u} \cos \varphi\right) \qquad \left(k = \frac{1}{\sqrt{1 - q^2}}, \; q = \frac{v}{c}\right)$$

und sodann:

$$\frac{\nu' \cos \varphi'}{u'} = \nu \cdot k \left(\frac{\cos \varphi}{u} - \frac{v}{c^2}\right) \qquad \text{und} \qquad \frac{\nu' \sin \varphi'}{u'} = \frac{\nu \sin \varphi}{u},$$

woraus durch Division:

$$8) \qquad \operatorname{tg} \varphi' = \frac{1}{k} \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi - q \frac{u}{c}} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{k} \cdot \frac{1}{1 - q \frac{u}{c \cdot \cos \varphi}},$$

und durch Quadrieren und Addieren:

$$\frac{\nu'^2}{u'^2} = \frac{\nu^2}{u^2} \left\{k^2 \left(\cos \varphi - q \frac{u}{c}\right)^2 + \sin^2 \varphi\right\}$$

folgt, und hieraus weiter unter Benutzung von (7):

$$9) \qquad u'^2 = u^2 \frac{\left(1 - \frac{v}{u}\cos\varphi\right)^2}{\left(\cos\varphi - q\frac{u}{c}\right)^2 + \frac{\sin^2\varphi}{k^2}}.$$

Von diesen 3 Formeln (7), (8) und (9) wollen wir nun verschiedene Anwendungen machen:

Erster Fall: $\varphi = 0.$

Die Wellennormale falle also beim festen Systeme in die x-Richtung, oder die Welle schreite in derselben Richtung vor wie das bewegte System. Dann wird nach (8) auch $\varphi' = 0$, d. h. es tritt bei Betrachtung vom bewegten Systeme aus *keine Richtungsänderung* auf. Ferner folgt nach (9):

$$u' = u \cdot \frac{1 - \frac{v}{u}}{1 - q\frac{u}{c}} = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}},$$

es ergibt sich also für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, wie nicht anders zu erwarten war, der früher nach dem Additionstheorem (2) der Geschwindigkeiten berechnete Wert. — Etwas wesentlich neues ergibt nur die Formel (7) für die Frequenz:

$$10) \qquad \nu' = \nu \cdot k\left(1 - \frac{v}{u}\right),$$

und diese Formel enthält die Modifikation, welche das bekannte „Dopplersche Prinzip“ durch Einführung der neuen Begriffe der Relativitätstheorie erfährt.

Das Dopplersche Prinzip in der Relativitätstheorie. — *Bei einer mit der Geschwindigkeit u fortschreitenden Sinuswelle von der Frequenz ν (Zahl der Schwingungen in 2π Zeiteinheiten) verändert sich diese Frequenz für einen in derselben Richtung sich mit der Geschwindigkeit v bewegenden Beobachter in dem Verhältnis*

$$k\left(1 - \frac{v}{u}\right) : 1 = \frac{1 - \frac{v}{u}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} : 1,$$

es ist also bei einem Lichtstrahl ($u = c$) die neue Frequenz

$$10') \qquad \nu' = \nu \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}.$$

Wenn also auch die Geschwindigkeit eines Lichtstrahles immer gleich groß erscheint, ob wir ihn von einem ruhenden (etwa relativ zur Lichtquelle ruhenden) Systeme aus messen oder von einem dagegen bewegten (natürlich Lorentzschen) System — das war ja das der ganzen Theorie zugrunde liegende Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit — so sehen wir, daß die Schwingungsdauer und daher auch die Farbe des Lichtes verschieden erscheint. —

Sind Fortschreitungsrichtung der Welle und des Beobachters entgegengesetzt, ist also eigentlich $\varphi = \pi$, so brauche ich in den obigen Formeln für $\varphi = 0$ nur u durch $-u$ zu ersetzen, da ja in den allgemeinen Formeln immer nur der Quotient von u und $\cos\varphi$ auftritt.

Zweiter Fall. $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $u = c$.

Diese letztere Annahme bedeutet, daß es sich um eine Lichtwelle handelt, welche sich im festen System senkrecht zur x-Richtung, d. h. zur Bewegungsrichtung des zweiten Systems, fortpflanzt. In diesem Falle $u = c$ ist, wie eine leichte Rechnung aus (9) herzuleiten gestattet, auch $u' = c$ — in bester Uebereinstimmung mit dem soeben erwähnten Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit, und ferner ist nach (8):

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{-q \cdot 1} = -\frac{1}{kq},$$

und daraus folgt:

11) $$\operatorname{tg}(\varphi' - \varphi) = \operatorname{tg}\left(\varphi' - \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{cotg}\varphi' = k \cdot q.$$

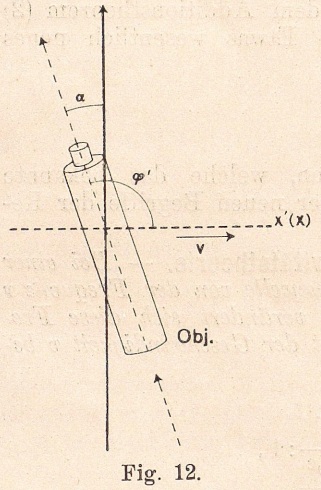


Fig. 12.

Da nun $q = \frac{v}{c}$ bei allen praktisch erreichbaren Geschwindigkeiten v sehr klein, und daher $k = \frac{1}{\sqrt{1-q^2}}$ nahezu 1 ist, so folgt hieraus, daß φ' etwas größer als $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist. Vom bewegten Systeme aus scheint also die Fortpflanzungsrichtung jenes Lichtstrahles mit der x'-Richtung einen stumpfen, wenn auch nur wenig vom Rechten abweichenden Winkel zu bilden, und das bedeutet, daß ein Beobachter im bewegten System, der die den Lichtstrahl aussendende Lichtquelle beobachten will, das Objektivende seines Fernrohres in der Bewegungsrichtung um einen kleinen Winkel vorwärts neigen muß. — Das ist ja aber gerade die Erscheinung der Aberration.

Da nun in der Astronomie Richtungsänderungen gegenüber dem übrigen Fixsternhimmel gemessen werden, wird man zum festen System ein an diesen angeschlossenes Bezugssystem wählen, und gegen dieses bewegt sich die Erde mit einer Geschwindigkeit von (im Mittel) $30\ \frac{km}{sec}$. Demnach muß nach unserer Theorie ein Beobachter auf der Erde an zwei Stellen, an denen die Bewegungsrichtung der Erde die entgegengesetzte ist, auch das Fernrohr beide Male in entgegengesetztem Sinne um einen kleinen Winkel gegen die Richtung drehen, in welcher der Stern (die Lichtquelle) einem an derselben Stelle befindlichen gegen den Fixsternhimmel ruhenden Beobachter erschiene — genau wie es die astronomischen Beobachtungen bestätigt haben. — Wir wollen auch noch die Größe dieses Neigungswinkels $\alpha = \varphi' - \varphi$ berechnen. Formel (11) liefert uns

$$\operatorname{tg}\alpha = k \cdot q.$$

Da aber $k = \frac{1}{\sqrt{1-q^2}}$ sich von dem Werte 1 nur um Größen von der Ordnung von q^2 unterscheidet, und $q = \frac{v}{c}$, selbst bei dem hier vorliegenden gewaltigen Werte von v, erst den Wert $\frac{1}{10000}$ besitzt, so kann man mit einer über die Beobachtungen weit hinausgehenden Genauigkeit

$$\operatorname{tg}\alpha = q = \frac{v}{c} = \frac{1}{10000}$$

setzen, und das war ja tatsächlich der Wert von $\operatorname{tg}\alpha$, dem der beobachtete Wert $\alpha = 20'',5$ entsprach [vgl. (1) S. 27]. — So ergibt sich

Spezialsatz 3. — *Die Relativitätstheorie liefert zur Bestimmung des (halben) Aberrationswinkels α praktisch richtig die Beziehung:*

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v}{c} \qquad \left(\textit{strenge:}\ \operatorname{tg}\alpha = k\cdot\frac{v}{c} = \frac{v}{\sqrt{c^2-v^2}}\right),$$

*wenn v die mittlere Erdgeschwindigkeit gegen den Fixsternhimmel bedeutet**).

So sehen wir, daß die 3 im § 3 behandelten Beobachtungen, der Aberration des Lichtes, des MICHELSONschen Interferenzversuches und des FIZEAUschen Mitführungsversuches, die wie früher aus einer einheitlichen Annahme über die Lichtfortpflanzung nicht erklären konnten, jetzt durch die Relativitätstheorie ganz zwanglos erklärt werden.

§ 9.

Die Transformation der MAXWELLschen Gleichungen für das Vakuum.

Nach MAXWELL bestehen in einem im Vakuum erregten elektromagnetischen Felde zwischen den Komponenten X, Y, Z der elektrischen Feldstärke und L, M, N der magnetischen Feldstärke die folgenden Differentialgleichungen: erstlich die beiden Tripel der „MAXWELLschen Gleichungen“,

1a)
$$\begin{cases} \frac{1}{c}\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \\ \frac{1}{c}\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{1}{c}\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \end{cases}$$

1b)
$$\begin{cases} \frac{1}{c}\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \\ \frac{1}{c}\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \\ \frac{1}{c}\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \end{cases}$$

und sodann die Divergenzgleichungen:

*) Auch die in der Anmerkung S. 27 erwähnte Tatsache, daß die Füllung des Beobachtungsfernrohres mit Wasser nichts an der Erscheinung der Aberration ändert, findet in dieser Theorie ihre Erklärung, denn nach ihr beruht die Aberration nicht auf einem Vorgange, der sich lediglich im Innern des Fernrohres abspielt, sondern hat ihren Grund allein in dem Bewegungszustand des Beobachters.

2a) $$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=0 \qquad 2b)\quad \frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial z}=0.$$

Aufgestellt sind diese Gleichungen von MAXWELL ursprünglich noch unter der Herrschaft der Auffassung von einer universellen Zeit. Doch wollen wir sie unverändert als richtig annehmen auch noch in den Raumzeitsystemen der EINSTEINschen speziellen Relativitätstheorie, und so mögen denn in jenen Gleichungen X, Y, Z und L, M, N die Angaben der in einem Laboratorium $\mathfrak{L}$ (Raumzeitsystem x, y, z, t) aufgestellten Elektrometer und Magnetometer sein, betrachtet in ihrer Abhängigkeit von den Koordinaten x, y, z und den Zeitangaben t der an derselben Stelle befindlichen Uhr dieses Systems.

Nun kann man aber die Angaben dieser Instrumente auch auffassen als Funktionen der Raumzeitkoordinaten x', y', z', t' in einem gegen das erstere bewegten LORENTZ-Systeme $\mathfrak{L}'$, und dann wollen wir die entsprechenden Gleichungen zwischen den partiellen Ableitungen nach diesen neuen Variablen x', y', z', t' aufsuchen. Dabei wollen wir bezüglich der Orientierung der Achsen der beiden Systeme zur Bewegungsrichtung genau die früher immer betrachteten Verhältnisse annehmen, die auch den Formeln (18) und (18′) zugrunde liegen [vgl. Fig. 9, S. 60].

Danach ist dann zunächst, wenn F irgendeine der Funktionen X, Y, Z, L, M, N bedeutet, und zwar je nachdem aufgefaßt als Funktion von x, y, z, t oder aber von x', y', z', t':

3) $$\frac{\partial F}{\partial y'}=\frac{\partial F}{\partial y} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial F}{\partial z'}=\frac{\partial F}{\partial z} \qquad (F=X, Y, Z, L, M, N),$$

hingegen z. B.

4) $$\frac{\partial X}{\partial t'}=\frac{\partial X}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t'}+\frac{\partial X}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial t'},$$

weil t' auf dem Umwege über x und t in X eingeht. Berücksichtigen wir nun noch, daß nach (2a) und (3):

$$\frac{\partial X}{\partial x}=-\left(\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)=-\left(\frac{\partial Y}{\partial y'}+\frac{\partial Z}{\partial z'}\right)$$

ist, und ebenso nach (1a):

$$\frac{\partial X}{\partial t}=c\left(\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z}\right)=c\left(\frac{\partial N}{\partial y'}-\frac{\partial M}{\partial z'}\right),$$

so folgt aus (4) unter Benutzung der LORENTZ-Transformation (18′) S. 66:

$$\frac{\partial X}{\partial t'}=-\left(\frac{\partial Y}{\partial y'}+\frac{\partial Z}{\partial z'}\right)k\cdot v+c\left(\frac{\partial N}{\partial y'}-\frac{\partial M}{\partial z'}\right)\cdot k,$$

wofür wir auch, wenn wir wieder $\frac{v}{c}=q$ setzen, schreiben können:

5_1) $$\frac{1}{c}\frac{\partial X}{\partial t'}=k\frac{\partial}{\partial y'}\left(N-qY\right)-k\frac{\partial}{\partial z'}\left(M+qZ\right),$$

und ähnlich folgt:

$$\frac{\partial X}{\partial x'}=\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'}+\frac{\partial X}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x'}=-\left(\frac{\partial Y}{\partial y'}+\frac{\partial Z}{\partial z'}\right)k+c\left(\frac{\partial N}{\partial y'}-\frac{\partial M}{\partial z'}\right)k\frac{v}{c^2}$$

oder, nur etwas anders geschrieben:

6) $$\frac{\partial X}{\partial x'}+k\frac{\partial}{\partial y'}\left(Y-qN\right)+k\frac{\partial}{\partial z'}\left(Z+qM\right)=0\cdot$$

In diesen Gleichungen (5_1) und (6) haben wir Relationen gefunden, die schon äußerlich eine ganz ähnliche Form haben, wie die erste Gleichung (1 a) und die Gleichung (2 a).

Um auch Analoga zu den übrigen Gleichungen (1 a) zu erhalten, brauchen wir diese nur neu hinzuschreiben unter konsequentem Festhalten an der Auffassung, daß jetzt X, Y, Z, L, M, N sämtlich als Funktionen von x', y', z', t' gegeben seien. So nimmt dann z. B. die zweite Gleichung (1 a) die Gestalt an:

$$\frac{1}{c}\left(\frac{\partial Y}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t}+\frac{\partial Y}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}\right)=\frac{\partial L}{\partial z'}-\left(\frac{\partial N}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x}\right),$$

und das ist unter Berücksichtigung der zwischen x, y, z, t und x', y', z', t' bestehenden Beziehungsgleichungen (jetzt in der Form (18) S. 66):

$$\frac{1}{c}\left(\frac{\partial Y}{\partial x'}(-kv)+\frac{\partial Y}{\partial t'}\cdot k\right)=\frac{\partial L}{\partial z'}-\left(\frac{\partial N}{\partial x'}k+\frac{\partial N}{\partial t'}\left(-k\frac{v}{c^2}\right)\right)$$

oder

$$5_2)\qquad \frac{k}{c}\frac{\partial}{\partial t'}(Y-qN)=\frac{\partial L}{\partial z'}-k\frac{\partial}{\partial x'}(N-qY),$$

und ganz entsprechend erhalten wir auch das Analogon zu der letzten Gleichung (1 a) — und nach genau denselben Regeln kann man auch die Formeln des zweiten Systems transformieren, so daß sich schließlich die folgenden Systeme von Gleichungen ergeben:

$$5\,a)\qquad \begin{cases} \frac{1}{c}\frac{\partial X}{\partial t'}=\frac{\partial}{\partial y'}[k(N-qY)]-\frac{\partial}{\partial z'}[k(M+qZ)] \\ \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}[k(Y-qN)]=\frac{\partial L}{\partial z'}-\frac{\partial}{\partial x'}[k(N-qY)] \\ \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}[k(Z+qM)]=\frac{\partial}{\partial x'}[k(M+qZ)]-\frac{\partial L}{\partial y'} \end{cases} \quad \text{und}$$

$$6\,a)\qquad \frac{\partial X}{\partial x'}+\frac{\partial}{\partial y'}[k(Y-qN)]+\frac{\partial}{\partial z'}[k(Z+qM)]=0$$

und ferner:

$$5\,b)\qquad \begin{cases} \frac{1}{c}\frac{\partial L}{\partial t'}=\frac{\partial}{\partial z'}[k(Y-qN)]-\frac{\partial}{\partial y'}[k(Z+qM)] \\ \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}[k(M+qZ)]=\frac{\partial}{\partial x'}[k(Z+qM)]-\frac{\partial X}{\partial z'} \\ \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}[k(N-qY)]=\frac{\partial X}{\partial y'}-\frac{\partial}{\partial x'}[k(Y-qN)] \end{cases} \quad \text{und}$$

$$6\,b)\qquad \frac{\partial L}{\partial x'}+\frac{\partial}{\partial y'}[k(M+qZ)]+\frac{\partial}{\partial z'}[k(N-qY)]=0.$$

Dieses also sind die Differentialgleichungen, denen die Angaben X, Y, Z, L, M, N der Elektrometer und Magnetometer des festen Systems $\mathfrak{L}$ genügen, wenn wir sie als Funktionen der Raumzeitkoordinaten x', y', z', t' des bewegten Systems $\mathfrak{L}'$ ansehen.

Wenn wir nun im bewegten Laboratorium $\mathfrak{L}'$ ebenfalls Elektrometer und Magnetometer aufstellen, so fordert das Relativitätsprinzip, daß deren Angaben X', Y', Z', L', M', N' über ein elektromagnetisches Feld im Vakuum in den Raumzeitkoordinaten dieses Systems stets denselben MAXWELLschen Gleichungen genügen wie X, Y, Z, L, M, N in den Koordinaten des festen Raumzeitsystems, denn gleiche Versuche, einmal ganz ausgeführt in dem einen Laboratorium mit dessen Instrumenten, das andere Mal im zweiten Laboratorium mit dessen Instrumenten, sollen ja stets gleich ablaufen, also müssen — so schlossen wir schon früher — auch die Naturgesetze in beiden Systemen ganz gleich aussehen. So folgt denn ganz allgemein:

$$1'a)\quad \begin{cases} \frac{1}{c}\frac{\partial X'}{\partial t'} = \frac{\partial N'}{\partial y'} - \frac{\partial M'}{\partial z'} \\ \frac{1}{c}\frac{\partial Y'}{\partial t'} = \frac{\partial L'}{\partial z'} - \frac{\partial N'}{\partial x'} \\ \frac{1}{c}\frac{\partial Z'}{\partial t'} = \frac{\partial M'}{\partial x'} - \frac{\partial L'}{\partial y'} \end{cases} \qquad 1'b)\quad \begin{cases} \frac{1}{c}\frac{\partial L'}{\partial t'} = \frac{\partial Y'}{\partial z'} - \frac{\partial Z'}{\partial y'} \\ \frac{1}{c}\frac{\partial M'}{\partial t'} = \frac{\partial Z'}{\partial x'} - \frac{\partial X'}{\partial z'} \\ \frac{1}{c}\frac{\partial N'}{\partial t'} = \frac{\partial X'}{\partial y'} - \frac{\partial Y'}{\partial x'} \end{cases}$$

und

$$2'a)\quad \frac{\partial X'}{\partial x'} + \frac{\partial Y'}{\partial y'} + \frac{\partial Z'}{\partial z'} = 0 \qquad 2'b)\quad \frac{\partial L'}{\partial x'} + \frac{\partial M'}{\partial y'} + \frac{\partial N'}{\partial z'} = 0.$$

Strenge genommen gelten diese Gleichungen nach dieser Begründung nur für ein elektromagnetisches Feld, das ganz mit den Hilfsmitteln des Laboratoriums $\mathfrak{L}'$ erzeugt ist, wie die Gleichungen (1) und (2) und die daraus hergeleiteten Gleichungen (5) und (6) sich auf ein mit den Mitteln von $\mathfrak{L}$ erregtes Feld bezogen. — Doch man schreibt dem Begriff des elektromagnetischen Feldes interlaboratorielle Bedeutung zu, wie das durch das Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit nahegelegt wird, nach welchem ja auch der elektromagnetische Vorgang der Lichtaussendung interlaboratoriell sein sollte. Wie es hiernach bei Messungen der Lichtgeschwindigkeiten gar nicht darauf ankommen soll, ob die Lichtquelle mit in dem Laboratorium steht, in dem gemessen wird oder nicht, genau so nimmt man an, daß in einem elektromagnetischen Felde stets die gleichen allgemeinen Gesetze herrschen, ob es erregt wird durch Apparate, welche dem Untersuchungslaboratorium angehören oder nicht. Dann aber können wir die Gleichungen (5) und (6) und die Gleichungen (1′) und (2′) auf das gleiche Feld oder auf denselben Versuch bezogen denken, so daß dann also X, Y, Z, L, M, N und X', Y', Z', L', M', N' die Angaben der Elektrometer und Magnetometer des einen bzw. anderen Laboratoriums bei demselben Versuche bedeuten, und zwischen diesen Angaben müssen dann solche Beziehungen stattfinden, daß aus dem Bestehen von (5) und (6) immer das gleichzeitige Bestehen von (1′) und (2′) folgt.

Bei dem genau entsprechenden Bau der beiden Gleichungssysteme ergibt sich als einfachste Art des Zusammenhanges, die dieser Forderung genügt, die, daß sich entsprechende Funktionen in beiden Systemen nur durch einen konstanten Faktor voneinander unterscheiden:

$$7)\quad \begin{aligned} X' &= \lambda \cdot X & L' &= \lambda \cdot L \\ Y' &= \lambda \cdot k(Y - qN) & M' &= \lambda \cdot k(M + qZ) \\ Z' &= \lambda \cdot k(Z + qM) & N' &= \lambda \cdot k(N - qY), \end{aligned}$$

und diese Bestimmung der Beziehungen zwischen den in dem einen und dem anderen System gemessenen Komponenten der elektrischen und magnetischen Feldstärken erkennt man als die einzig zulässige, sobald man die naheliegende Annahme macht, daß z. B. einer Verdoppelung der elektrischen und magnetischen Kräfte in dem einen System auch eine Verdoppelung im anderen Systeme entsprechen soll, und einer Verdreifachung wieder eine Verdreifachung, kurz, daß es sich um lineare homogene Funktionen handeln soll.

So gilt es also nur noch den Faktor λ in (7) zu bestimmen. Dazu dienen ähnliche Ueberlegungen, wie wir sie schon früher einmal anstellten, als ein solcher Faktor — wir nannten ihn auch damals λ — unbestimmt blieb [vgl. S. 63—64]:

Durch Auflösung der Gleichungen für Y' und N' nach Y und N folgern wir zunächst bei unbestimmtem λ:

$$(7') \qquad Y = \frac{1}{\lambda} k (Y' + q N') \qquad \text{und} \qquad N = \frac{1}{\lambda} k (N' + q Y'),$$

und nun denken wir uns etwa $X = Y = Z = L = M = 0$ und nur $N = \text{const} \neq 0$, d. h. ein homogenes rein magnetisches Feld, dessen Kraftlinien der z-Achse parallel, sagen wir, vertikal nach oben gerichtet sind. Dann ist nach (7)

$$8) \qquad N' = \lambda k \cdot N.$$

Nehmen wir nun wieder einmal an, es wäre $\lambda \neq 1$, so können wir unter den auf S. 63 angenommenen Verhältnissen den Inhalt dieser letzten Gleichung etwa so ausdrücken: Von einem nach Osten fahrenden System aus erscheint die Intensität dieses Magnetfeldes verändert im Verhältnis $\lambda k : 1$. — Andererseits folgt, wenn wir jetzt, was dem Relativitätsprinzip zufolge erlaubt ist, das System $\mathfrak{L}' (x' y', z', t')$ als das feste ansehen und wieder in ihm $X' = Y' = Z' = L' = M' = 0$ und nur $N' = \text{const} \neq 0$ annehmen, nach (7'):

$$8') \qquad N = \frac{1}{\lambda} k \cdot N'$$

d. h. die Intensität erscheint von einem mit gleicher Geschwindigkeit nach Westen fahrenden Laboratorium aus verändert im Verhältnis $\frac{1}{\lambda} k : 1$.

Das widerspricht aber dem Prinzipe von der Homogenität (Isotropie) des Raumes, demzufolge bei unserem Versuche kein Unterschied zwischen einem nach Osten und einem nach Westen fahrenden Laboratorium sein darf, denn infolge der Symmetrie des benutzten Magnetfeldes zur x-Achse können wir zwei solche Versuche mit derselben Apparatur*), nur in verschiedenen Orientierungen, angestellt denken, was ja jenem Prinzipe zufolge auf den Ablauf keinen Einfluß haben darf. — Dieser Widerspruch wird wieder nur beseitigt durch die Annahme

$$\lambda = 1,$$

und so ergeben sich denn schließlich als Folgerung aus unserer Theorie die Gleichungen:

---

*) In dieser „Apparatur" ist diesmal immer das zweite, verschiebbare, Laboratorium mit einbegriffen zu denken.

$$
\begin{aligned}
X' &= X & \qquad L' &= L \\
Y' &= k(Y - qN) & \qquad M' &= k(M + qZ) \\
Z' &= k(Z + qM) & \qquad N' &= k(N - qY)
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Diese Gleichungen stellen also den von der Relativitätstheorie geforderten Zusammenhang zwischen den in dem einen und dem anderen Systeme gemessenen Komponenten der elektrischen und magnetischen Feldstärke eines elektromagnetischen Feldes im Vakuum dar.

Wir wollen aus ihnen noch einige Folgerungen ziehen: Nehmen wir einmal an, im festen Systeme herrschte ein rein magnetisches (magnetostatisches) Feld, wie es etwa ein Stahlmagnet erzeugt, es sei also

$$X = Y = Z = 0.$$

Alsdann liefern die Gleichungen (9) für einen Beobachter im bewegten Systeme:

$$
\begin{aligned}
X' &= 0 & \qquad L' &= L \\
Y' &= -kq \cdot N & \qquad M' &= k \cdot M \\
Z' &= kq \cdot M & \qquad N' &= k \cdot N,
\end{aligned}
$$

d. h. im bewegten Systeme werden außer den Magnetometern auch die Elektrometer Ausschläge zeigen. Also ein rein magnetisches Feld erscheint vom bewegten Systeme aus als elektromagnetisches Feld, oder der ruhende Magnet scheint einem bewegten Beobachter auch elektrische Wirkungen auszuüben, oder, wenn wir die Rollen der Systeme vertauschen, was ja das Relativitätsprinzip zu tun gestattet, so können wir auch sagen: *Ein bewegter Magnet übt im ruhenden Systeme auch elektrische Kräfte aus.* Das ist aber genau die bekannte Erscheinung der Magnetinduktion, die wir hier so überaus einfach durch Transformation der Maxwellschen Gleichungen auf ein neues, gegen das erstere bewegtes System erhalten haben.

Wenn wir zu der Vorstellung vom ruhenden Magneten zurückkehren, so liegen hier die Verhältnisse mit den elektrischen Kräften ganz analog wie wir sie am Ende von § 2 bei den Zentrifugalkräften schilderten. Wie diese nur ein mit dem rotierenden Systeme mitgehender Beobachter wahrzunehmen glaubte, genau so glaubt auch hier die elektrischen Kräfte nur der Beobachter vom bewegten Systeme aus wahrzunehmen.

So sehen wir denn, daß sich elektrische und magnetische Kräfte niemals voneinander trennen lassen; inwieweit wir Kräfte als elektrische oder als magnetische ansehen, hängt wesentlich von der Wahl des Bezugssystemes ab. —

Wir sahen schon, daß vom Standpunkte eines Systems rein magnetische Kräfte vom Standpunkte eines anderen aus auch elektrische Wirkungen auslösen. Aber auch der andere extreme Fall kann eintreten: ein rein elektrisches (elektrostatisches) Feld scheint vom Standpunkte eines bewegten Systems neben elektrischen auch magnetische Wirkungen hervorzubringen; wenn

$$L = M = N = 0$$

ist, so folgt nämlich nach (9)

$$
\begin{aligned}
X' &= X & \qquad L' &= 0 \\
Y' &= k \cdot Y & \qquad M' &= kq \cdot Z \\
Z' &= k \cdot Z & \qquad N' &= -kq \cdot Y,
\end{aligned}
$$

und in diesen Gleichungen liegt die Erscheinung enthalten, daß ruhende Elektrizität von einem bewegten Systeme aus, oder auch umgekehrt, bewegte Elektrizität vom ruhenden System aus auch magnetische Kräfte hervorzubringen scheint — Erscheinung des Elektromagnetismus (Biot-Savartsches Gesetz) und Rowlandscher Versuch.

Auf eine weitere Vergleichung der jetzt aus der Relativitätstheorie hergeleiteten Gesetze, einerseits mit den Beobachtungen und sodann mit den früher für diese Erscheinungen aufgestellten Gesetzen, möchte ich hier nicht eingehen.

§ 10.

Minkowskis geometrische Veranschaulichung der Lorentz-Transformationen.

Wir haben in den letzten Paragraphen stets zwei Lorentzsche Raumzeitsysteme nebeneinander betrachtet; das eine können wir uns etwa als das früher von uns eingeführte „Lorentzsche Grundsystem" denken [vgl. S. 54], das andere ist ein geradlinig gleichförmig dagegen bewegtes System, das nach Einsteinscher Art mit synchronen Uhren ausgestattet zu denken ist. Die Achsenkreuze orientierten wir stets so, daß sie zunächst einander dauernd parallel (und gleichgerichtet) waren, und daß überdies die x- und x'-Achse in der Fortschreitungsrichtung des einen Systems gegen das andere zusammenfielen, und ferner nahmen wir an, daß beide Systeme einen gemeinsamen Raumzeitanfangspunkt besaßen. — Unter diesen speziellen Voraussetzungen hatte die zugehörige Lorentz-Transformation, das ist die Transformation, welche den Zusammenhang zwischen den Raumzeitkoordinaten beider Systeme angab, die von uns immer benutzte Form (18) bzw. (18′) S. 66:

$$1)\quad \begin{aligned} x' &= k(x - vt) \\ y' &= y, \quad z' = z \\ t' &= k\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{aligned} \qquad 1')\quad \begin{aligned} x &= k(x' + vt') \\ y &= y', \quad z = z' \\ t &= k\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) \end{aligned} \qquad \left(k = \frac{1}{\sqrt{1-q^2}}; \quad q = \frac{v}{c}\right).$$

Diese spezielle Lorentz-Transformation hatte die Eigenschaft, den Ausdruck $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ ungeändert zu lassen, d. h. nach Umrechnung in die Koordinaten im anderen Systeme besitzt er in diesen genau dieselbe Form:

$$2)\qquad c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 \quad \text{[vgl. (22) S. 66]}.$$

Es war das eine unmittelbare Folge des Prinzips von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit.

Wir wollen nun die bisherigen Einschränkungen fallen lassen, zunächst bezüglich der Orientierung der Axen, während wir vorläufig noch die Annahme des gemeinsamen Raumzeitanfangspunktes unserer beiden Lorentz-Systeme beibehalten. Dann können wir, wenn wir genau wie früher einen in diesem Raumzeitanfangspunkte ausgesandten Lichtblitz in beiden Systemen verfolgen, das unveränderte Fortbestehen der Gleichung (2) nachweisen, und von der Richtigkeit dieses Resultates kann man sich leicht auch überzeugen, wenn man sich klar macht, daß die neuen Raumzeitsysteme sich lediglich dadurch von den früher

betrachteten unterscheiden, daß die Achsenkreuze gedreht sind, was aber auf die Zeitangaben synchroner Uhren nach den Vorschriften von S. 56 gänzlich ohne Einfluß ist. Bei solchen Drehungen der Achsenkreuze bleiben aber bekanntlich $x^2 + y^2 + z^2$ bzw. $x'^2 + y'^2 + z'^2$ ungeändert — also bleibt auch die Gleichung (2) unverändert bestehen, und wir ersehen aus diesen Ueberlegungen zugleich in bester Uebereinstimmung mit früheren Feststellungen [vgl. S. 65, vor allem auch die Anmerkung], daß die Beziehungsgleichungen zwischen diesen allgemeineren LORENTZ-Systemen mit gemeinsamem Raumzeitanfangspunkte *linear und homogen* sind.

Um nun auch die Voraussetzung des gemeinsamen Raumzeitanfangspunktes zu beseitigen, fassen wir irgend zwei beliebige LORENTZ-Systeme (x, y, z, t) und $(x', y', z', t',)$ ins Auge und betrachten in dem einen System irgend einen Raumzeitpunkt x_0, y_0, z_0, t_0; seine Koordinaten in dem zweiten Raumzeitsystem seien x_0', y_0', z_0', t_0'. — Dann können wir leicht zwei neue Raumzeitsysteme $(\xi, \eta, \zeta, \vartheta)$ und $(\xi', \eta', \zeta', \vartheta')$ einführen, die diesen Raumzeitpunkt zum gemeinsamen Anfangspunkt besitzen, wir brauchen nur

$$\xi = x - x_0, \quad \eta = y - y_0, \quad \zeta = z - z_0, \quad \vartheta = t - t_0 \quad \text{und}$$
$$\xi' = x' - x_0', \quad \eta' = y' - y_0', \quad \zeta' = z' - z_0', \quad \vartheta' = t' - t_0'$$

zu setzen, und da die Uhren jedes dieser neuen Systeme immer noch synchron sind — sind sie doch sämtlich gegen die in den ursprünglichen Systemen nur um t_0 bzw. t_0' zurückgestellt — so sind die Beziehungsgleichungen zwischen $\xi, \eta, \zeta, \vartheta$ und $\xi', \eta', \zeta', \vartheta'$ eben linear und homogen, und daher die zwischen x, y, z, t und x', y', z', t' zwar auch noch *linear*, im allgemeinen aber nicht mehr homogen, und natürlich gilt jetzt die Gleichung (2) für $\xi, \eta, \zeta, \vartheta$ und $\xi', \eta', \zeta', \vartheta'$, also

$$c^2(t-t_0)^2 - (x-x_0)^2 - (y-y_0)^2 - (z-z_0)^2$$
$$= c^2(t'-t_0')^2 - (x'-x_0')^2 - (y'-y_0')^2 - (z'-z_0')^2,$$

und so erhalten wir das Resultat:

Satz 1. — *Jede LORENTZ-Transformation stellt eine lineare Transformation der Raumzeitkoordinaten dar, bei der jeder Ausdruck von der Form*

3) $$c^2(t-t_0)^2 - (x-x_0)^2 - (y-y_0)^2 - (z-z_0)^2$$

invariant bleibt, d. h. in einen entsprechenden Ausdruck in den neuen Variablen (nur mit anderen Konstanten) übergeht.

Bemerkt sei noch, daß auch umgekehrt jede lineare Transformation mit dieser Invarianzeigenschaft eine LORENTZ-Transformation darstellt, wie sich das unschwer nachweisen läßt. — Daraus ergibt sich, daß zwei LORENTZ-Transformationen nacheinander ausgeführt, immer wieder eine LORENTZ-Transformation liefern, was man kurz so ausdrückt:

Zusatz 1. — *Alle LORENTZ-Transformationen bilden eine Gruppe (LORENTZ-Gruppe).* —

Nach den obigen Darlegungen kann man nun den Zusammenhang zwischen zwei beliebigen LORENTZ-Systemen stets leicht zurückführen auf den zwischen zwei Systemen mit gemeinsamem Raumzeitanfangspunkt. Auf die Betrachtung solcher Systeme können wir uns daher im wesentlichen beschränken. Für sie gilt der folgende

Zusatz 2. — *Der Uebergang speziell zwischen zwei LORENTZ-Systemen*

mit gemeinsamem Raumzeitanfangspunkt wird durch lineare homogene Transformationen dargestellt, welche den Ausdruck

2a) $$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \qquad invariant$$

lassen, und durch diese Eigenschaft völlig charakterisiert sind. — Wir nennen daher solche Transformationen kurz „homogene Lorentz-Transformationen“.

Wir wollen uns nun speziell die Aufgabe stellen, diese homogenen Lorentz-Transformationen geometrisch zu deuten. — Dabei wird es sich empfehlen, sich zunächst auf den räumlich eindimensionalen Fall zu beschränken, so daß also die betrachteten Lorentz-Systeme lediglich aus einer Zahlenachse (x-Achse) bestehen, deren sämtliche Punkte mit je einer Uhr (t) versehen zu denken sind, die alle nach den früheren Prinzipien synchron gemacht sind. Dann betrachten wir noch ein zweites solches gegen das erstere bewegtes System (x', t') mit gleichem Raumzeitanfangspunkte. Die Lorentz-Transformation, welche die Raumzeitkoordinaten x, t bzw. x', t' eines Ereignisses in diesen beiden Systemen ineinander überführt, ist dann dadurch charakterisiert, daß sie linear ist und

$$c^2 t^2 - x^2 \qquad invariant$$

läßt — und nun fragt es sich, ob wir nicht diese Transformation uns ähnlich veranschaulichen können, wie wir z. B. alle linearen Transformationen, die

$$x^2 + y^2 \qquad invariant$$

lassen, geometrisch deuten können als Drehungen rechtwinkliger Koordinatensysteme um den Nullpunkt. — Die Analogie zwischen beiden Fällen wird noch verstärkt, wenn man

4) $$c \cdot t = u$$

setzt, also eine neue Zeiteinheit einführt, bei deren Zugrundelegung die Lichtgeschwindigkeit c den Wert 1 annimmt [vgl. S. 55]. Dann handelt es sich jetzt um eine Veranschaulichung der linearen Transformationen zwischen x, u und x', u', welche

5) $$F \equiv u^2 - x^2 \qquad invariant$$

lassen. — Wir deuten zunächst x und u als Cartesische Koordinaten in einem rechtwinkligen Systeme; dann gehört jedem Punkte der x, u-Ebene ein bestimmter Wert von $u^2 - x^2$ zu, und nun fragen wir nach anderen Koordinatensystemen (x', u'), in welchen demselben Punkte immer derselbe Wert auch von $u'^2 - x'^2$ entspricht. Dann muß auch z. B. in den Punkten, in denen $u^2 - x^2 = 0$ ist, d. h. auf den Winkelhalbierenden $u - x = 0$ und $u + x = 0$ der Achsen des x, u-Systems, $u'^2 - x'^2 = 0$ sein, also entweder $u' - x' = 0$ oder $u' + x' = 0$. — Ein zweites rechtwinkliges Koordinatensystem, in dem jene Winkelhalbierenden diese Gleichungen besitzen, gibt es augenscheinlich nicht, also müssen wir schon zu nichtrechtwinkligen Systemen unsere Zuflucht nehmen, und da sehen wir denn sofort, daß in dem schiefwinkligen Koordinatensysteme, deren Achsen aus denen des rechtwinkligen durch Drehung um denselben Winkel φ in entgegengesetztem Sinne hervorgehen, jene Winkelhalbierenden wieder dieselbe Gleichungsform besitzen.

So wollen wir denn ein solches schiefwinkliges System (ξ, η) betrachten und den Zusammenhang zwischen ihm und dem rechtwinkligen

System x, u entwickeln. Sind die Winkel, welche die ξ- und η-Achse, beide mit der x-Achse dieses Systems, bilden, α und β, so bestehen zwischen den Koordinaten ein und desselben Punktes P in beiden Systemen, wie die Figur 14 sofort lehrt, die Beziehungen:

$$x = \xi \cos\alpha + \eta \cos\beta, \qquad u = \xi \sin\alpha + \eta \sin\beta.$$

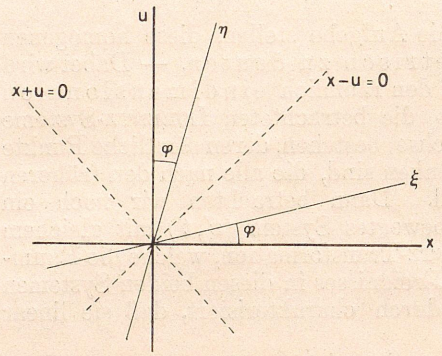


Fig. 13.

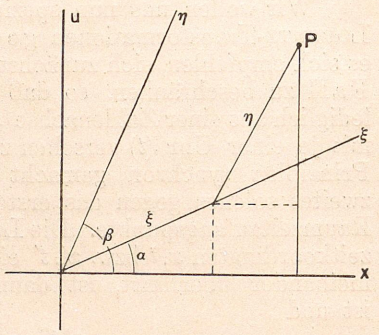


Fig. 14.

In unserem Falle sollten nun α und β Komplementärwinkel sein, etwa

$$\alpha = \varphi \qquad \text{und} \qquad \beta = \frac{\pi}{2} - \varphi,$$

dann lauten also die Beziehungsgleichungen:

6) $$x = \xi \cos\varphi + \eta \sin\varphi, \qquad u = \xi \sin\varphi + \eta \cos\varphi,$$

und nun wollen wir zusehen, ob bei diesem Uebergang zwischen diesen beiden Systemen tatsächlich $u^2 - x^2$ invariant bleibt, d. h. stets gleich $\eta^2 - \xi^2$ wird; bisher haben wir ja nur bewiesen, daß, wenn eine der Größen den speziellen Wert 0 hat, ihn auch die andere annimmt. — Die einfache Rechnung lehrt nun

$$u^2 - x^2 = (\eta^2 - \xi^2)(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = (\eta^2 - \xi^2)\cos 2\varphi,$$

es bleibt also $u^2 - x^2$ beim Uebergange zu dem schiefwinkligen System nicht invariant, es besitzt in den neuen Koordinaten nicht dieselbe Form — aber es multipliziert sich nur mit einer Konstanten, und wenn wir daher

7) $$\xi\sqrt{\cos 2\varphi} = x', \qquad \eta\sqrt{\cos 2\varphi} = u'$$

setzen, wodurch φ der Beschränkung unterworfen wird, daß es zwischen $+45^0$ und -45^0 liegen muß, dann wird

$$u^2 - x^2 = u'^2 - x'^2,$$

dann ist also die gewünschte Invarianz erreicht.

Diese neuen Größen x' und u' können wir nun immer noch deuten als Koordinaten in jenem schiefwinkligen Koordinatensysteme, nur daß die sie darstellenden Strecken nicht ausgemessen zu denken sind in derselben Längeneinheit, welche wir bisher allgemein, vor allem also in dem rechtwinkligen Systeme zugrunde gelegt dachten, sondern in einer im Verhältnis $1 : \sqrt{\cos 2\varphi}$ größeren Einheit (denn die Zahlenwerte von x' und u' fallen nach (7) kleiner aus als die von ξ und η). — Wenn wir also, wie das zuerst Minkowski getan hat, von dem recht-

winkligen Achsensysteme zu jenen schiefwinkligen übergehen, und zugleich diesen Wechsel in der Längeneinheit eintreten lassen, so ist die Differenz der Quadrate der Koordinaten in beiden Systemen gleich groß.

Diese Veränderung der Längeneinheit beim Ausmessen der schiefwinkligen Koordinaten in diesen Diagrammen können wir nun noch sehr einfach geometrisch beschreiben. Wie bei den oben zum Vergleich herangezogenen Drehungen rechtwinkliger Koordinatensysteme, welche $x^2 + y^2$ invariant ließen, die Kurven, auf denen diese Größe konstante Werte besitzt, also Kreise um den Nullpunkt, eine ausgezeichnete Rolle spielen, weil ihre Gleichungen sich beim Uebergang zu anderen Systemen nicht ändern, genau so wollen wir hier die Kurven betrachten, auf denen $F \equiv u^2 - x^2$ konstant ist, und zwar wollen wir noch spezieller die Kurven mit den Werten ± 1 dieses Ausdrucks betrachten (der Wert 0 würde, weil er nach unseren obigen Ausführungen jenen dort auftretenden Faktor nicht erkennen läßt, ungeeignet sein), also zwei sich in Richtung der beiden Achsen öffnende (kongruente) Hyperbeln, die wir die „Grundhyperbeln" nennen wollen. In dem schiefwinkligen Systeme muß bei richtiger Wahl der Längeneinheit ihre Gleichung wieder

$$u'^2 - x'^2 = \pm 1$$

lauten, und daraus ergibt sich, daß die zu wählende Längeneinheit gerade durch die (gleichen) Abschnitte, welche diese Grundhyperbeln auf den Achsen des Systems ($u' = 0$ bzw. $x' = 0$) abschneiden, dargestellt wird. — So ergibt sich folgender

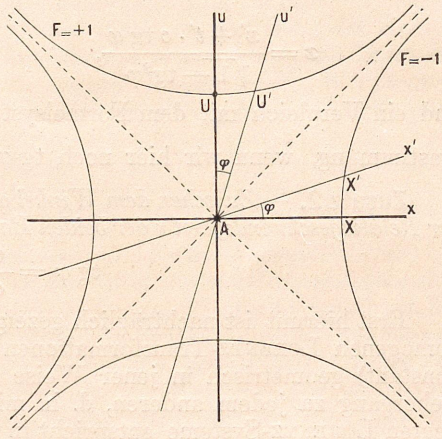


Fig. 15.

Satz 2. — *Eine homogene LORENTZ-Transformation, welche y und z nicht ändert*), läßt sich nach MINKOWSKI folgendermaßen veranschaulichen: Trägt man in einem ebenen rechtwinkligen Koordinatensystem die einen Raumzeitkoordinaten, x und $u = c \cdot t$, eines Ereignisses ein, so sind die anderen, x' und u', die schiefwinkligen Koordinaten des so erhaltenen Punktes in einem System, dessen Achsen durch Drehung um den gleichen Winkel φ, wo $|\varphi| \leqq 45^0$, in entgegengesetztem Sinne aus den rechtwinkligen Achsen entstehen, wenn man zugleich als Einheit beim Ausmessen der schiefwinkligen Koordinaten die Abschnitte AX' (oder AU') benutzt, welche die beiden „Grundhyperbeln" $F \equiv u^2 - x^2 = \pm 1$ auf den schiefen Achsen abschneiden.*

Aus (6) und (7) folgt dann sofort noch der

Zusatz 1. — *Analytisch stellt sich der geschilderte Zusammenhang zwischen x, u und x', u' folgendermaßen dar:*

*) Wir haben bisher von „räumlich eindimensionalen" LORENTZ-Systemen gesprochen; es kommt aber augenscheinlich auf dasselbe heraus, wenn wir die Systeme zwar dreidimensional denken, jedoch wie hier annehmen, daß zwei der Koordinaten ungeändert bleiben, sodaß sich die Transformationen eben doch nur auf eine Raumkoordinate und die Zeit beziehen.

8) $$x = \frac{x' \cos\varphi + u' \sin\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}, \qquad u = \frac{x' \sin\varphi + u' \cos\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}},$$

und diese Formeln können wir auch so umgestalten:

$$x = \frac{x' \cos\varphi + u' \sin\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}} = \frac{x' + u' \operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2\varphi}}$$

$$u = \frac{x' \sin\varphi + u' \cos\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}} = \frac{x' \operatorname{tg}\varphi + u'}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2\varphi}},$$

oder, wenn wir wieder $t = \frac{u}{c}$ einführen, auch folgendermaßen:

$$x = \frac{x' + t' \cdot c \operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2\varphi}}, \qquad t = \frac{t' + x' \cdot \frac{\operatorname{tg}\varphi}{c}}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2\varphi}},$$

und ein Vergleich mit dem Formelsystem (1′) lehrt sofort völlige Übereinstimmung, wenn wir hier noch $\operatorname{tg}\varphi = \frac{v}{c}$ setzen.

Zusatz 2. — *Zwischen dem Winkel φ im obigen graphischen Schema und der Relativgeschwindigkeit v der beiden Raumzeitsysteme besteht die Beziehung*

9) $$\operatorname{tg}\varphi = \frac{v}{c}.$$

Erst hiermit ist nachträglich gezeigt, daß sich wirklich sämtliche homogenen Lorentz-Transformationen der betrachteten Art (y und z konstant) geometrisch in jener Weise veranschaulichen lassen. — Dem Uebergang zu jedem anderen, d. h. mit anderer Geschwindigkeit v bewegten Lorentz-Systeme entspricht in jenem Schema ein durch Neigung der Achsen um einen anderen Winkel φ entstehendes schiefwinkliges Koordinatensystem.

Der Uebergang von einem dieser schiefwinkligen Systeme zu einem anderen stellt also ebenso den Uebergang zwischen zwei der betrachteten Lorentz-Systeme dar wie der von dem rechtwinkligen zu einem schiefwinkligen. Alle diese geradlinigen Koordinatensysteme (mit gleichen Winkelhalbierenden) sind also gleichwertig: welches der Lorentz-Systeme wir gerade in dem rechtwinkligen veranschaulichen, ist ganz gleichgültig, genau so, wie es auch gleichgültig war, welches von ihnen wir als das Lorentzsche „Grundsystem“ bezeichneten [vgl. S. 54]. — Es liegt wohl nahe, das rechtwinklige Schema gerade jenem Grundsysteme entsprechen zu lassen. Wir können aber, wenn wir, wie in der Regel, zwei Lorentz-Systeme betrachten, stets das eine derselben als das Grundsystem denken, und können daher auch bei der geometrischen Veranschaulichung immer mit einem rechtwinkligen und einem schiefwinkligen Systeme operieren. —

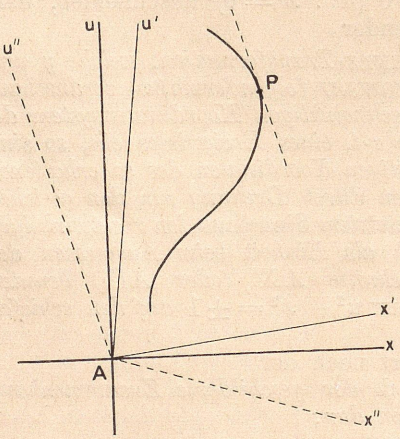


Fig. 16.

Aus der Tatsache, daß jedem Raumzeitpunkte (auf der x-Achse) in unserem geometrischen Bilde ein und derselbe Punkt entspricht, ob wir das rechtwinklige oder aber das schiefwinklige Koordinatensystem zugrunde legen, ergibt sich nun sofort die folgende interessante Anwendung unserer geometrischen Betrachtungsweise:

Satz 3. — *Denkt man sich eine beliebige eindimensionale Bewegung eines Massenpunktes (in der x-Achse), so kann man diese in bekannter Weise in einem rechtwinkligen x, u-Systeme durch eine Kurve veranschaulichen. Diese Kurve liefert dann zugleich das Bild des Vorganges in einem gegen das ursprüngliche in der x-Richtung gleichförmig bewegten Bezugssysteme (Lorentz-System), wenn man sie in dem ihm nach* (9) *entsprechenden schiefwinkligen Koordinatensysteme (x', u') in der neuen Maßeinheit ausmißt. Minkowski nennt diese von der Wahl des Bezugssystems also in weitem Umfange unabhängige Kurve die „Weltlinie" des bewegten Massenpunktes und ihre einzelnen Punkte seine „Weltpunkte".*

Da $u = c \cdot t$ ist und ebenso $u' = c \cdot t'$ ist, so ergibt sich leicht noch folgender

Zusatz. — *Die aus der Weltlinie bestimmten Differentialquotienten $\frac{dx}{du}$ (d. i.* tangens *des Neigungswinkels gegen die u-Achse) und $\frac{dx'}{du'}$ stellen immer die durch die Lichtgeschwindigkeit dividierten augenblicklichen Geschwindigkeiten des Massenpunktes in den betreffenden Bezugssystemen dar.*

Da die spezielle Relativitätstheorie nun nur Unterlichtgeschwindigkeiten kennt, dürfen diese Differentialquotienten, absolut genommen, niemals größer als 1 sein, d. h. *der Neigung der Weltlinie gegen die u-Achse darf (absolut genommen) niemals den Wert von 45^0 übersteigen.*

Ist die Bewegung des Massenpunktes gleichförmig, sind also jene Differentialquotienten konstant,

$$\frac{dx}{du} = \text{const} = a \qquad (x = au + b) \qquad (|a| \leq 1),$$

so ist die zugehörige Weltlinie eine Gerade; hat die Konstante a ihren absolut größten Wert 1, ist also $a = \pm 1$ (Lichtgeschwindigkeit), so ist die Gerade unter $\pm 45^0$ gegen die u-Achse geneigt.

Spezialsatz. — *Die Weltlinie einer gleichförmigen Bewegung ist eine Gerade, insbesondere sind die Symmetriegeraden $x = \pm u$ die Weltlinien eines vom raumzeitlichen Nullpunkte in der x-Achse nach beiden Seiten fortschreitenden Lichtimpulses.* —

Nunmehr denken wir uns irgendeine eindimensionale Bewegung und die sie darstellende Weltlinie gegeben, eine Linie also, die gegen die u-Achse nirgends mehr als 45^0 geneigt ist [vgl. Fig. 16] und fassen nun irgendeinen Augenblick der Bewegung oder, im geometrischen Bilde, einen Punkt P der Weltlinie ins Auge. In ihm legen wir die Tangente an die Weltlinie, und konstruieren sodann ein schiefwinkliges mit dem rechtwinkligen nullpunktgleiches Koordinatensystem (x'', u''), dessen Zeitachse (u''-Ache) jener Tangente parallel ist. In dem durch dieses neue System veranschaulichten Raumzeitsysteme ändert sich dann in der nächsten Umgebung jenes Augenblicks die Abszisse x'' nicht, in ihm „ruht" also der Massenpunkt augenblicklich.

Satz 4. — *Für jeden Augenblick einer wirklichen Bewegung eines materiellen Punktes (Geschwindigkeit $< c$) läßt sich ein Bezugssystem einführen, in dem der Punkt in dem betrachteten Augenblicke ruht („auf Ruhe transformieren", „Ruhsystem").*

Das Resultat an sich ist ja äußerst plausibel, fast trivial, man kann natürlich ein System einführen, das in jenem Augenblicke dieselbe Geschwindigkeit wie der Massenpunkt besitzt — uns kommt es hier wesentlich nur auf die geometrische Behandlungsweise solcher Fragen an. —

Schon weniger selbstverständlich dürften die nachstehenden Folgerungen aus unseren geometrischen Darstellungen sein: Man betrachte von einem LORENTZ-Systeme (Grundsystem) aus zwei Ereignisse (Raumzeitpunkte, Weltpunkte) in der x-Achse $E_1(x_1, t_1)$ und $E_2(x_2, t_2)$. Es sei $t_2 > t_1$. Dann sind doch 2 Fälle möglich:

Erstens: (a) $\left|\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\right| < c.$

Das bedeutet doch, die Geschwindigkeit einer gedachten gleichförmigen Bewegung eines Punktes, der die Orte der Ereignisse gerade zu den Zeiten der Ereignisse passiert, ist kleiner als die Lichtgeschwindigkeit, oder nur anders ausgedrückt: ein zur Zeit des ersten Ereignisses E_1 vom Orte desselben ausgesandter Lichtblitz erreicht den Ort des zweiten Ereignisses E_2 noch vor dessen Eintritt. Wie liegen in diesem Falle in unserem geometrischen Schema die die Ereignisse darstellenden Punkte E_1 und E_2?

Es ist $\left|\frac{x_2 - x_1}{u_2 - u_1}\right| < 1$, die Verbindungslinie der Punkte ist also um weniger als 45° gegen die u-Achse geneigt. Dann können wir aber ein schiefwinkliges Koordinatensystem (x', u') einführen, dessen u'-Achse (Zeitachse) jener Verbindungslinie parallel läuft (Fig. 17a), und in diesem Systeme, oder dem ihm entsprechenden LORENTZschen Raumzeitsysteme, haben dann die beiden Ereignisse E_1 und E_2 gleiches x', d. h. von diesem Systeme aus scheinen beide Ereignisse am selben Orte einzutreten; wir sagen, wir hätten sie „gleichortig" gemacht. — Auch

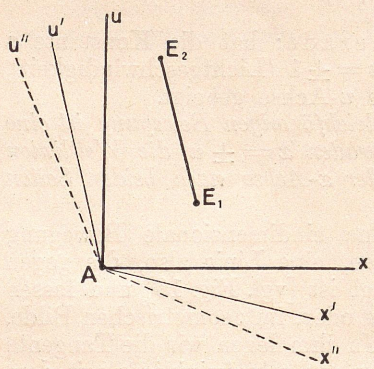


Fig. 17a.

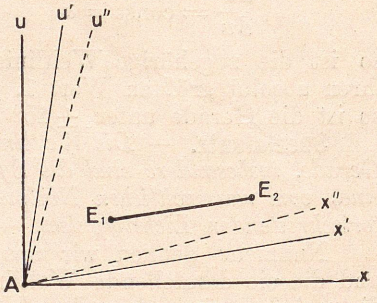


Fig. 17b.

dieses Resultat kann man sich noch verhältnismäßig einfach vorstellen: Dieses System ist eben so bewegt, daß derselbe Punkt in ihm, z. B. sein Anfangspunkt, die Orte der Ereignisse gerade zur Zeit derselben passiert, und eine solche Bewegung ist möglich, da ihre Geschwindigkeit eben nach der Annahme (a) kleiner als c war.

Doch nun wollen wir zu dem anderen Falle übergehen, daß

Zweitens: (b) $\left|\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\right| > c$

ist, daß also der von $E_1(x_1, t_1)$ ausgehende Lichtblitz den Ort des zweiten Ereignisses E_2 nicht mehr vor dessen Eintritt erreicht. Dann ist also $\left|\frac{x_2 - x_1}{u_2 - u_1}\right| > 1$, die Verbindungslinie der Punkte E_1 und E_2 in unserem Schema bildet mit der u-Achse einen Winkel von mehr als 45^0, oder sie ist gegen die x-Achse um weniger als 45^0 geneigt. Dann können wir wegen der Beschränkung $|\varphi| \leqq 45^0$ nur ein schiefwinkliges System einführen, dessen x'-Achse (Raumachse) dieser Verbindungslinie parallel läuft (Fig. 17 b), und in diesem Systeme haben dann die Punkte E_1 und E_2 gleiches u', oder in dem entsprechenden LORENTZ-Systeme erfolgen beide Ereignisse zur gleichen Zeit, wir haben sie so „gleichzeitig" gemacht. — Damit haben wir also folgenden Satz bewiesen:

Satz 5. — *Zwei Ereignisse in der x-Achse eines LORENTZschen Raumzeitsystems, die so nahe beieinander stattfinden, daß ein zur Zeit des früheren von dessen Ort ausgehender Lichtblitz den Ort des zweiten vor dessen Eintritt erreicht, lassen sich durch passende Wahl eines anderen LORENTZ-Systems stets gleichortig machen — sind ihre Orte aber weiter voneinander entfernt, so lassen sie sich durch Wahl eines passenden Bezugssystems gleichzeitig machen, oder: im ersteren Falle läßt sich die räumliche, im zweiten die zeitliche Folge der Ereignisse auch umkehren.*

Diese letztere Bemerkung ergibt sich sofort, wenn wir Systeme (x'', u'') einführen, deren Achsen noch mehr von denen des rechtwinkligen Systems abweichen als die der oben eingeführten Systeme (x', u'). So ist z. B. in unserer Fig. 17 a: $x_2 < x_1$ aber $x_2'' > x_1''$ und in Fig. 17 b: $t_2 > t_1$, aber $t_2'' < t_1''$.

Dieses letzte Resultat, daß unter Umständen zwei Ereignisse, die nach den Angaben der Uhren in einem LORENTZ-Systeme zu verschiedenen Zeiten stattfinden, von einem anderen Systeme aus gleichzeitig erscheinen, ja daß man sogar Systeme ermitteln kann, in denen die zeitliche Aufeinanderfolge der Ereignisse umgekehrt erscheint, bietet dem anschauungsmäßigen Verständnis einige Schwierigkeit, da wir noch allzusehr in der Vorstellung von der universellen Zeit befangen sind. Wenn wir uns nun aber einmal auf den Boden der EINSTEINschen Theorie stellen, ist an der Richtigkeit unserer Feststellungen nicht zu zweifeln. Die Anschauung wird vielleicht erleichtert, wenn man eben beachtet, daß die Zeiten immer an verschiedenen Uhren abgelesen werden. — Jedenfalls aber illustrieren diese Resultate bestens die EINSTEINsche Auffassung, daß es eine absolute Gleichzeitigkeit, eine Gleichzeitigkeit schlechtweg, nicht gibt, daß die Beurteilung, ob zwei Ereignisse an verschiedenen Orten gleichzeitig sind oder nicht, wesentlich von den zugrunde gelegten Raumzeitsystemen abhängt. —

Wir wollen jetzt an der Hand unserer geometrischen Bilder das früher schon analytisch behandelte Problem der Uhrenvergleichung nochmals aufnehmen und zunächst einmal die Grunduhr $\mathfrak{U}'_{0'}$ des bewegten Systems mit den Uhren des festen Systems vergleichen. Da die Abszisse x' jener Grunduhr im bewegten System immer 0 ist, stellt die u'-Achse ($x' = 0$) unseres graphischen Schemas die „Weltlinie" dieser Uhr dar; die auf die beiden Systeme, das recht- und das schiefwinklige, bezogenen Zeitkoordinaten jedes Punktes dieser Geraden stellen also immer zusammengehörige Angaben $u'_{0'}$ dieser bewegten Uhr $\mathfrak{U}'_{0'}$

und $u_{0'}$ der gerade mit ihr zusammenfallenden Uhr des festen Systems dar. Fassen wir nun irgendeinen Punkt M' jener u'-Achse ins Auge [vgl. Fig. 18a], so ist das zugehörige u' gleich AM', diese Strecke aber nach unseren früheren Regeln gemessen in einer Einheit, die geometrisch durch den Abschnitt AU' der Grundhyperbel auf der u'-Achse dargestellt wird, also:

$$u'_{0'} = \frac{AM'}{AU'}.$$

Andererseits ist das zugehörige u gleich der Linie AM, wieder ausgemessen in dem zugehörigen Achsenabschnitte AU der Grundhyperbel, also:

$$u_{0'} = \frac{AM}{AU},$$

und ein Blick auf die Figur lehrt daher, daß wieder

$$u_{0'} > u'_{0'} \qquad (t_{0'} > t'_{0'})$$

ist, d. h. daß *die bewegte Uhr hinter den festen zurückbleibt.*

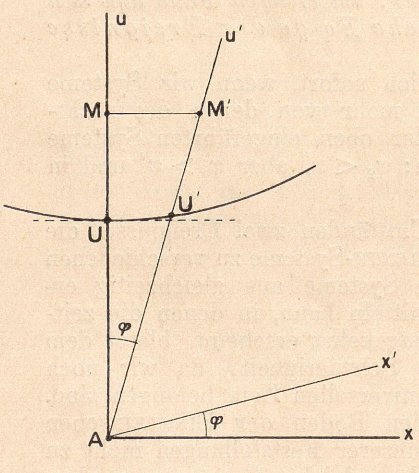


Fig. 18a.

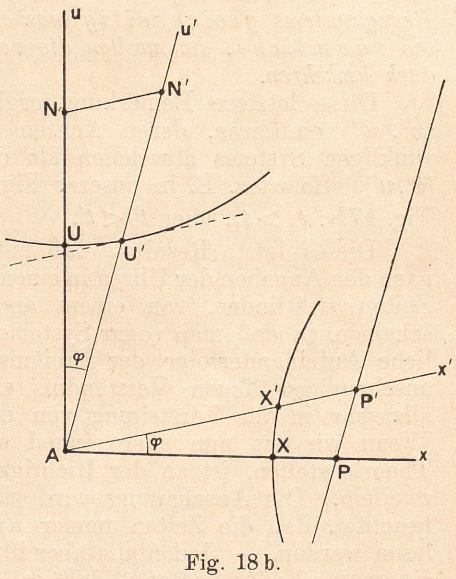


Fig. 18b.

Aber auch quantitativ können wir den Sachverhalt an der Hand unserer Figur genauer prüfen: Es folgte bereits früher für das Verhältnis der beiden Einheitslängen AU und AU' beider Systeme

$$10) \qquad \frac{AU}{AU'} = \sqrt{\cos 2\varphi}, \qquad \text{[vgl. (7) S. 90]}$$

und aus der Figur ergibt sich unmittelbar

$$AM = AM' \cdot \cos\varphi.$$

So folgt denn

$$u_{0'} = \frac{AM' \cdot \cos\varphi}{AU' \sqrt{\cos 2\varphi}} = u'_{0'} \frac{\cos\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}} = \frac{u'_{0'}}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2\varphi}},$$

oder, da nach (9) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{v}{c} = q$ ist:

$$u_{0'} = \frac{u'_{0'}}{\sqrt{1-q^2}}, \quad \text{also} \quad u'_{0'} = \sqrt{1-q^2}\cdot u_{0'} \qquad (t'_{0'} = \sqrt{1-q^2}\cdot t_{0'}),$$

und das ist auch quantitativ genau unser altes Resultat [vgl. den Satz auf S. 70].

Nun wollen wir aber auch hier wieder noch die Grunduhr $\mathfrak{U}_0$ des festen Systems vergleichen mit den Uhren des bewegten Systems. Die Weltlinie dieser Uhr $\mathfrak{U}_0$ ist die u-Achse ($x = 0$) und zusammengehörige Angaben dieser Uhr (u_0) und der gerade koinzidierenden des bewegten Systems (u'_0) sind also immer die Zeitkoordinaten u bzw. u' der Punkte dieser Geraden. — Betrachten wir nun einen solchen Punkt N, so ist nach obigen Prinzipien [vgl. Fig. 18 b]

$$u_0 = \frac{AN}{AU} \qquad \text{und} \qquad u'_0 = \frac{AN'}{AU'},$$

und wenn wir den bekannten und auch leicht zu beweisenden Satz benutzen, daß die Tangente an die Grundhyperbel im Schnittpunkt mit einer der schiefen Achsen immer gerade der anderen parallel ist (weil die Achsen konjugierte Durchmesser sind), so lehrt wieder ein Blick auf die Figur sogleich, daß

$$u'_0 > u_0$$

ist, und wenn wir weiter rechnerisch vorgehen, ergibt sich zunächst aus dem Dreieck ANN':

$$\frac{AN'}{AN} = \frac{\sin(N)}{\sin(N')} \quad \text{d. i.} \quad = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\varphi\right)} = \frac{\cos\varphi}{\cos 2\varphi},$$

und hieraus in Verbindung mit (10):

$$u'_0 = \frac{AN'}{AU'} = \frac{AN\frac{\cos\varphi}{\cos 2\varphi}}{AU\frac{1}{\sqrt{\cos 2\varphi}}} = u_0\frac{\cos\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}},$$

und weiter wie vorhin:

$$u'_0 = \frac{u_0}{\sqrt{1-q^2}}, \qquad \text{also} \qquad u_0 = \sqrt{1-q^2}\cdot u'_0 \qquad (t_0 = \sqrt{1-q^2}\cdot t'_0).$$

Auch hier ergibt sich also in völliger Uebereinstimmung mit unseren früheren Resultaten, daß die Angaben der Grunduhr $\mathfrak{U}_0$ des festen Systems hinter denen der vorübergehenden des bewegten Systems wieder in demselben Verhältnis $\sqrt{1-q^2}:1$ zurückbleiben [vgl. S. 70]. —

Auch die Längenvergleichung [vgl. S. 69] läßt sich ganz analog geometrisch durchführen. Wir betrachten einen Stab, der im bewegten Systeme ruht und in ihm die Länge l besitze; sein einer Endpunkt sei der Nullpunkt O' dieses Systems, dessen Weltlinie die u'-Achse ist (s. oben). Die Weltlinie des anderen Endpunktes ist dann eine Parallele PP', deren Abstand in dem entsprechenden Systeme

unseres graphischen Schemas, also parallel der x'-Achse gemessen, unter Zugrundelegung von AX' als Einheit, gleich l ist, so daß also

$$l = \frac{AP'}{AX'}. \qquad \text{[vgl. Figur 18 b]}$$

Die Länge dieses Stabes, gemessen vom festen LORENTZ-System aus, ist der zu gleicher Zeit (in diesem Systeme) gemessene Abstand der Stabenden, also im Bilde der Abstand jener Parallelen, gemessen parallel der x-Achse ($u = \text{const}$), also gleich $\frac{AP}{AX}$. — Die Vergleichung der Längen eines Stabes in beiden Systemen führt danach wegen der völligen Symmetrie der Figur auf genau dasselbe Problem wie die Vergleichung der Uhren, und damit wieder zu der scheinbaren Verkürzung im Verhältnis $\sqrt{1-q^2} : 1$. — Für den Fall, daß der Stab im ruhenden System (x, u) liegt, überlassen wir dem Leser die Durchführung der Schlüsse im einzelnen. —

Daß wir hier anstatt t immer $u = c \cdot t$ als Zeitkoordinate benutzten (oder eine Zeiteinheit zugrunde legten, bei der die Lichtgeschwindigkeit c den Wert 1 besitzt) ist für alle diese Betrachtungen von nebensächlicher Bedeutung. Wir können ebensogut auch x und t selber als Koordinaten in unseren Figuren benutzen. Bei allen Figuren wird dann nur der Maßstab in der einen Achsenrichtung verändert, oder es werden die alten Figuren nur einer affinen Transformation

$$t = \frac{u}{c}$$

mit der x-Achse als Affinitätsachse unterworfen. Dabei gehen unsere alten Grundhyperbeln $F \equiv u^2 - x^2 = \pm 1$ wieder über in Hyperbeln

$$G_1 \equiv c^2 t^2 - x^2 = \pm 1,$$

die wir jetzt wieder als „Grundhyperbeln" bezeichnen, und die alten schiefwinkligen Achsen (x'- und u'-Achse), die, wie schon einmal er-

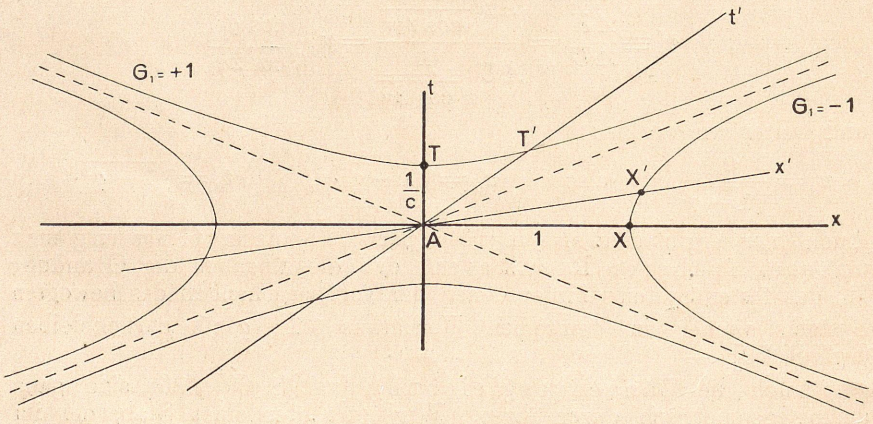


Fig. 19.

wähnt wurde, konjugierte Durchmesser der Grundhyperbeln waren, gehen dabei wieder in konjugierte Durchmesser der neuen Grund-

hyperbeln über, und, auf diese als Achsen bezogen, lautet die Gleichung dieser neuen Hyperbeln wieder:

$$c^2t'^2 - x'^2 = \pm 1,$$

wenn man die Einheiten passend wählt, nämlich so, daß den Achsenabschnitten ($t' = 0$ bzw. $x' = 0$) die Werte $x' = 1$ und $t' = \frac{1}{c}$ entsprechen. So entsteht aus der Figur 15 S. 91 die neue Figur 19, an der wir alle obigen Schlüsse mit nur unwesentlichen Modifikationen durchführen könnten.

Satz 6$_1$. — *Deutet man direkt x und t anstatt x und $u = c \cdot t$ als Koordinaten, so kann man die speziellen homogenen Lorentz-Transformationen, welche y und z und daher auch*

$$G_1 \equiv c^2t^2 - x^2 \qquad invariant$$

lassen, ansehen als Uebergänge zwischen geradlinigen Koordinatensystemen, deren Achsen konjugierte Durchmesser der „Grundhyperbeln"

$$G_1 \equiv c^2t^2 - x^2 = \pm 1$$

sind, wenn man zugleich die Maßeinheiten bei allen diesen Systemen, z. B. beim Systeme (x', t') so wählt, daß den Schnittpunkten der Achsen mit den Grundhyperbeln die Werte $x' = 1$ und $t' = \frac{1}{c}$ entsprechen. —

Wir haben zuletzt immer nur solche Lorentz-Systeme mit gemeinsamem Raumzeitanfangspunkte betrachtet, die längs der x-Achse gegeneinander verschoben wurden, so daß also bei Uebergängen von einem dieser Systeme zu anderen zwei der Raumzeitkoordinaten, y und z, ungeändert blieben, und brauchten dann nur die Transformation der beiden übrigen, also von x und t, zu behandeln. — Wir wollen jetzt Uebergänge zwischen zwei Systemen betrachten, bei denen nur e i n e der Raumkoordinaten, z, ungeändert bleibt, also x, y und t an der Transformation teilnehmen.

Die homogenen Lorentz-Transformationen dieser Art lassen den Ausdruck

$$G_2 \equiv c^2t^2 - x^2 - y^2 \qquad invariant$$

und sind durch diese Eigenschaft völlig charakterisiert. — Sie lassen nun, wie ich jetzt zeigen will, eine ganz ähnliche Deutung zu wie die vorhin betrachteten noch spezielleren Transformationen. Wir deuten x, y und t zunächst als Koordinaten in einem rechtwinkligen räumlichen Cartesischen Koordinatensystem. Dann stellen die Gleichungen

$$G_2 \equiv c^2t^2 - x^2 - y^2 = \pm 1$$

zwei Rotationshyperboloide dar, die jetzt an die Stelle der Grundhyperbeln treten und „Grundhyperboloide" heißen mögen. Bezogen auf irgend 3 konjugierte Durchmesser als Koordinatenachsen (ξ, η, ζ) besitzen nach einem bekannten Satze der analytischen Geometrie diese Flächen wieder Gleichungen von der Form

$$\frac{\zeta^2}{\gamma^2} - \frac{\zeta^2}{\alpha^2} - \frac{\eta^2}{\beta^2} = \pm 1,$$

wo α, β, γ die neuen Achsenabschnitte sind. Wenn wir also wieder die Maßeinheiten so wählen, daß diese Achsenabschnitte die Werte

$$\gamma = \frac{1}{c} \qquad \text{und} \qquad \alpha = \beta = 1$$

erhalten, so lautet die Gleichung der Grundhyperboloide in den neuen Koordinaten ganz genau so wie in den ursprünglichen, und es bleibt dann, wie leicht einzusehen, beim Uebergang zu dem schiefwinkligen Systeme der Ausdruck G_2 ganz allgemein, d. h. auch wenn er nicht gerade den Wert ± 1 hat, unverändert — solche Uebergänge stellen also LORENTZ-Transformationen der betrachteten Art dar. — Das liefert aber den folgenden

Satz 6_2. — *Auch homogene LORENTZ-Transformationen, welche nur eine der Koordinaten, z. B. z, ungeändert lassen, und für die daher*

$$G_2 \equiv c^2 t^2 - x^2 - y^2 \qquad \textit{eine Invariante}$$

ist, lassen sich deuten als Uebergänge zwischen geradlinigen Koordinatensystemen, deren Achsen konjugierte Durchmesser der „Grundhyperboloide"

$$G_2 \equiv c^2 t^2 - x^2 - y^2 = \pm 1$$

sind, wenn man zugleich immer die Maßstäbe so abändert, daß den Achsenabschnitten der Grundhyperboloide die Werte $x' = 1$, $y' = 1$ und $t' = \frac{1}{c}$ entsprechen.

Bevor wir weiter zu den ganz allgemeinen homogenen LORENTZ-Transformationen übergehen, wollen wir noch einmal zusehen, wie viele aus konjugierten Durchmessern bestehende Systeme es denn überhaupt gibt, und wie wir sie bestimmen können, wenn wir auch keinen Wert auf die explizite Angabe der Resultate zu legen brauchen.

Wir denken uns zunächst ganz allgemein irgendeine Richtung gegeben oder einen Durchmesser $D_\varkappa$ (Gerade durch den Anfangspunkt A). Dazu bedarf es der Angabe zweier Größen, als die wir die 2 Verhältnisse der 3 Koordinaten irgend eines Punktes von $D_\varkappa$,

$$p_\varkappa = \frac{x_\varkappa}{t_\varkappa} \qquad \text{und} \qquad q_\varkappa = \frac{y_\varkappa}{t_\varkappa},$$

annehmen können, und zwar wollen wir unter diesem Punkte $(x_\varkappa, y_\varkappa, t_\varkappa)$ speziell einen der Schnittpunkte von $D_\varkappa$ mit den Grundhyperboloiden verstehen. Alsdann lautet die Gleichung der Tangentialebene in diesem Punkte:

$$c^2 t_\varkappa t - x_\varkappa x - y_\varkappa y = \pm 1,$$

und daher die Gleichung der durch A gelegten Parallelebene zu dieser Tangentialebene:

$$\mathfrak{E}_\varkappa \equiv c^2 t_\varkappa t - x_\varkappa x - y_\varkappa y = 0.$$

In dieser Ebene liegen bekanntlich alle zu $D_\varkappa$ konjugierten Durchmesser.

Nach diesen Vorbereitungen wollen wir uns jetzt einen ersten Durchmesser $D_0\,(p_0, q_0)$ willkürlich aber fest gegeben denken; dann folgt für den zweiten zu ihm konjugierten $D_1(p_1, q_1)$ die Bedingungsgleichung

$$\mathfrak{E}_0 \equiv c^2 t_0 t - x_0 x - y_0 y = 0,$$

welche eines der Verhältnisse $p_1 = \frac{x_1}{t_1}$ und $q_1 = \frac{y_1}{t_1}$ zu bestimmen gestattet, wenn das andere gegeben ist; außer p_0 und q_0 können wir also etwa auch noch p_1 beliebig wählen. Dann ist aber ein dritter zu D_0 und D_1 konjugierter Durchmesser $D_2\,(p_2, q_2)$ aus den beiden Forderungen

$$\mathfrak{E}_0 \equiv c^2 t_0 t - x_0 x - y_0 y = 0 \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{E}_1 \equiv c^2 t_1 t - x_1 x - y_1 y = 0$$

eindeutig bestimmt. — Vielleicht ist es für das Folgende zweckmäßig diesen Sachverhalt durch folgendes kleine Schema darzustellen:

	Willkürlich anzunehmen	Bestimmungsgleichungen	Daraus ergibt sich
Von D_0	p_0, q_0		
„ D_1	p_1	$\mathfrak{E}_0 = 0$	q_1
„ D_2	nichts	$\mathfrak{E}_0 = 0$, $\mathfrak{E}_1 = 0$	p_2, q_2

So sehen wir, daß wir, wenn wir konjugierte Durchmesser bestimmen wollen, 3 Größen willkürlich annehmen dürfen. Es gibt demnach ∞^3 konjugierte Durchmesser bei unseren Grundhyperboloiden und demnach ∞^3 homogene Lorentz-Transformationen, welche z ungeändert lassen, und das steht in bestem Einklang mit der Abzählung der Anzahl entsprechender Paare Lorentzscher Raumzeitsysteme: da die x, y-Ebenen ($z = 0$) der beiden betrachteten Systeme dauernd zusammenfallen, so kann, was die Orientierung der Achsenrichtungen anlangt, das zweite gegen das erste nur um die z-Richtung gedreht sein (Drehungswinkel α), sodann kann die Fortschreitungsrichtung in der x, y-Ebene (Azimut γ) und die Fortschreitungsgeschwindigkeit v des zweiten gegen das erste System noch beliebig gewählt werden. Wir kommen also wieder auf ∞^3 verschiedene Paare Lorentzscher Systeme der betrachteten Art*). — Erst durch diese Ueberlegungen haben wir strenge genommen bewiesen, daß wirklich sämtliche homogene Lorentz-Transformationen, welche z ungeändert lassen, durch Uebergänge zu schiefwinkligen, aus konjugierten Durchmessern gebildeten Systemen veranschaulicht werden können. —

Sind nun etwa in der oben angegebenen Weise irgend 3 konjugierte Durchmesser D_0, D_1 und D_2 bestimmt**), so ist es jetzt eine einfache Aufgabe der analytischen Geometrie, aus den Koordinaten ξ, η, ϑ eines Punktes Π in dem einen Systeme seine Koordinaten ξ', η', ϑ' in dem neuen Systeme mit D_0 als t'-Achse und D_1 und D_2 als x'- und y'-Achse zu bestimmen. Zunächst folgt für die Achsenabschnitte $a_\varkappa$ (wenn wir das System (x, y, t) rechtwinklig annehmen, was wir ja immer dürfen):

$$a_\varkappa^2 = x_\varkappa^2 + y_\varkappa^2 + t_\varkappa^2 = t_\varkappa^2(1 + p_\varkappa^2 + q_\varkappa^2), \qquad (\varkappa = 0, 1, 2)$$

oder, da der Punkt $x_\varkappa, y_\varkappa, t_\varkappa$ auf einem der Grundhyperboloide $G_2 = \pm 1$ liegen sollte, und daher

$$c^2 t_\varkappa{}^2 - x_\varkappa{}^2 - y_\varkappa{}^2 = t_\varkappa{}^2 (c^2 - p_\varkappa{}^2 - q_\varkappa{}^2) = \pm 1$$

ist:

$$a_\varkappa{}^2 = \frac{1 + p_\varkappa{}^2 + q_\varkappa{}^2}{|c^2 - p_\varkappa{}^2 - q_\varkappa{}^2|} \qquad (\varkappa = 0, 1, 2).$$

*) Die Paare von Systemen, bei denen y und z dauernd gleich bleiben, sind in der Anzahl ∞^1 vorhanden, da sie sich nur durch die Relativgeschwindigkeit der Systeme (in der x-Achse) unterscheiden können. Dem entsprechen auch die ∞^1 Bildsysteme oder die ∞^1 Paare konjugierter Durchmesser unserer Hyperbeln $G_1 = \pm 1$, die in unserer ersten Darstellung durch die Größe des Winkels φ charakterisiert waren [Wegen der Beziehung zwischen v und φ vgl. Formel (9)].

**) Was die Bezeichnung anlangt, so werde speziell mit D_0 immer derjenige Durchmesser bezeichnet, der das zweischalige Hyperboloid $G_2 = +1$ trifft.

Dies festgestellt, legen wir jetzt durch Π eine Parallelebene z. B. zur x', y'-Ebene ($\mathfrak{E}_0 = 0$); deren Gleichung ist:

$$c^2 t_0 (t - \vartheta) - x_0 (x - \xi) - y_0 (y - \eta) = 0.$$

Der Abschnitt λ_0, den diese Ebene auf $D_0 (p_0, q_0)$ abschneidet, ist dann die eine Koordinate, bezogen auf das Achsensystem (D_0, D_1, D_2), und wenn wir diese zunächst in der ursprünglichen Längeneinheit des rechtwinkligen Systems messen, ergibt sich zu ihrer Bestimmung:

$$c^2 t_0 \left(\frac{\lambda_0}{\sqrt{1 + p_0^2 + q_0^2}} - \vartheta \right) - p_0 \left(\frac{\lambda_0 p_0}{\sqrt{1 + p_0^2 + q_0^2}} - \xi \right)$$
$$- q_0 \left(\frac{\lambda q_0}{\sqrt{1 + q_0^2 + q_0^2}} - \eta \right) = 0 .$$

Dieses so bestimmte λ_0, gemessen in einer Einheit, in der α_0 den Wert $\frac{1}{c}$ hat, ist dann die Zeitkoordinate ϑ' von Π im Systeme (x', y', t'), so daß also: $\vartheta' = \frac{1}{c} \cdot \frac{\lambda_0}{\alpha_0}$ und entsprechend: $\xi' = 1 \cdot \frac{\lambda_1}{\alpha_1}$ und $\eta' = 1 \cdot \frac{\lambda_2}{\alpha_2}$.

Damit ist in engster Anlehnung an die geometrische Formulierung in Satz 6_2 der Weg auch analytisch bis ins einzelne angegeben, wie man von den Raumzeitkoordinaten ξ, η, ϑ eines Ereignisses in dem ursprünglichen Systeme zu denen $(\xi', \eta', \vartheta')$ in einem anderen gelangen kann. —

Wenn wir jetzt zu den allgemeinsten homogenen Lorentz-Transformationen übergehen, an denen sämtliche 4 Raumzeitkoordinaten beteiligt sind, so ist in dem dreidimensionalen Raume unserer Anschauung eine Deutung derselben als „Koordinaten", sei es als rechtwinklige oder auch als schiefwinklige, ausgeschlossen. Wir nehmen dann unsere Zuflucht zu der Vorstellung eines vierdimensionalen Raumes, in dem wir dann x, y, z, t wieder als „Koordinaten" bezeichnen, und sprechen dann in ihm von „hyperbolischen Grundgebilden", die durch die Gleichungen

$$G_3 \equiv c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = \pm 1$$

dargestellt würden, von 4 „konjugierten Durchmessern" dieser Gebilde — alles ganz analog wie in den unserer Anschauung zugänglichen zwei- und dreidimensionalen Räumen, und dann können wir bezüglich der Lorentz-Transformationen auch einen ganz analogen Satz aussprechen, daß sie die Uebergänge zwischen geradlinigen „Koordinatensystemen" bedeuteten, deren Achsen stets konjugierte Durchmesser der hyperbolischen Grundgebilde wären. — Da dieser Satz aber eine anschaulich geometrische Bedeutung nicht besitzt, so kann er seine Berechtigung nur daraus herleiten, daß er ein wohldefiniertes analytisches Analogon besitzt, daß er wohldefinierte analytische Regeln enthält, den Uebergang von einem Wertsystem x, y, z, t zu einem entsprechenden x', y', z', t' zu bewerkstelligen. Das ist nun tatsächlich der Fall, wir können alle in dem Satze vorkommenden Begriffe wenigstens analytisch völlig scharf fassen, und die hier zutage tretende völlige Analogie mit den entsprechenden Begriffen der zwei- und dreidimensionalen Geometrien gibt uns dann das Recht, uns auch hier der kürzeren geometrischen Ausdrucksweise zu bedienen.

Die „Richtung" eines Durchmessers D_x ist im vierdimensionalen

Raume bestimmt durch die 3 Verhältnisse zwischen den 4 Koordinaten eines seiner Punkte,

$$p_\varkappa = \frac{x_\varkappa}{t_\varkappa}, \qquad q_\varkappa = \frac{y_\varkappa}{t_\varkappa}, \qquad r_\varkappa = \frac{z_\varkappa}{t_\varkappa},$$

ja sie ist gleichsam definiert als der Inbegriff dieser 3 Verhältniszahlen, ebenso wie ein „Punkt" definiert ist als der Inbegriff von 4 Werten x, y, z, t, seiner „Koordinaten". — Die Koordinaten eines „zu $D_\varkappa$ konjugierten Durchmessers" müssen der Bedingung

$$\mathfrak{E}_\varkappa \equiv c^2 t_\varkappa t - x_\varkappa x - y_\varkappa y - z_\varkappa z = 0$$

genügen, und wenn wir daher Paare von je 4 konjugierten Durchmessern suchen, so können wir von einem willkürlich gegebenen Durchmesser (D_0) ausgehend nach einem dem früher angegebenen völlig analogen Schema vorgehen:

	Willkürlich anzunehmen	Bestimmungsgleichungen	Daraus ergibt sich
Von D_0	p_0, q_0, r_0		
„ D_1	p_1, q_1	$\mathfrak{E}_0 = 0$	r_1
„ D_2	p_2	$\mathfrak{E}_0 = 0, \quad \mathfrak{E}_1 = 0$	q_2, r_2
„ D_3	nichts	$\mathfrak{E}_0 = 0, \quad \mathfrak{E}_1 = 0, \quad \mathfrak{E}_2 = 0$	p_3, q_3, r_3

Die Aufgabe, wenn in dieser Weise also die konjugierten Achsenrichtungen im vierdimensionalen Raume bestimmt sind, nun wirklich von den Koordinaten $\xi, \eta, \zeta, \vartheta$ eines Punktes in dem einen Systeme zu seinen Koordinaten in einem anderen Systeme überzugehen, läßt sich in so völlig analoger Weise lösen, wie es oben für den dreidimensionalen Raum auseinandergesetzt wurde, daß ein näheres Eingehen darauf erübrigt. — Wir notieren jetzt

Satz 6_3. — *Die allgemeinsten homogenen Lorentz-Transformationen, welche also*

$$G_3 \equiv c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \qquad \textit{invariant}$$

lassen, kann man im Raume von 4 Dimensionen wieder als Uebergang zwischen „geradlinigen Koordinatensystemen" deuten, deren Achsen 4 konjugierte Durchmesser der „hyperbolischen Grundgebilde"

$$G_3 \equiv c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = \pm 1$$

sind, und in denen die Maßeinheiten so festgelegt sind, daß den Achsenabschnitten die Werte $x' = 1$, $y' = 1$, $z' = 1$ und $t' = \frac{1}{c}$ entsprechen.

Man ist zu einer solchen Deutung berechtigt, weil man ein analytisches Verfahren angeben kann, das von dem einen Systeme (x, y, z, t) zu einem anderen (x', y', z', t') hinführt und völlig analog dem ist, das einer solchen Koordinatentransformation im Raume von 3 Dimensionen entspricht. —

Aus dem obigen Schema ersehen wir sogleich auch noch, daß man bei der Bestimmung konjugierter Durchmesser im vierdimensionalen Raume immer noch 6 Größen willkürlich vorgeben kann, daß es also im ganzen im vierdimensionalen Raume ∞^6 Paare konjugierter Durch-

messer gibt, und das steht wieder in bestem Einklang mit der Abzählung der allgemeinen homogenen LORENTZ-Transformationen: Die beiden durch die Transformation miteinander verbundenen LORENTZ-Systeme (mit gemeinsamem Raumzeitanfangspunkt), können sich erstlich durch die verschiedene Drehung der Achsenkreuze gegeneinander unterscheiden (3 willkürliche Parameter), dann kann die Fortschreitungsrichtung des einen gegen das andere noch willkürlich angenommen werden, was der Verfügung über 2 weitere Parameter entspricht, und endlich kann auch die Relativgeschwindigkeit v der Systeme noch willkürlich gegeben werden. Solche Raumzeitsysteme sind also erst durch die Angabe von 6 Parametern gegeneinander festgelegt, es gibt also auch ∞^6 verschiedene Paare solcher Systeme, und damit auch ∞^6 homogene LORENTZ-Transformationen, die also bei unserer geometrischen Veranschaulichung gerade den ∞^6 Uebergängen von einem geradlinigen Achsenkreuz (wenn man es hier noch so nennen darf) zu den ∞^6 übrigen entsprechen. —

Diese in Satz 6_2 und 6_3 angegebene Art, sich die allgemeineren LORENTZschen Raumzeittransformationen im 3- bzw. 4-dimensionalen Raume zu veranschaulichen, gestattet nun ganz analoge Anwendungen, wie wir sie oben bei den speziellen LORENTZ-Transformationen, welche Verschiebungen der entsprechenden Systeme längs der x-Achse darstellen, eingehend erörtert haben. So kann man sich z. B. schon an dem dreidimensionalen Modelle klar machen, daß man (unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen) *3 Ereignisse gleichzeitig machen* kann, d. h. daß man ein LORENTZ-System als Bezugssystem einführen kann, dessen Uhren bei Eintritt der Ereignisse gleiche Zeit anzeigen. Wir brauchen das System nur so einzurichten, daß die x', y'-Ebene ($\mathfrak{E}_0 = 0$) parallel der durch die Bildpunkte der 3 Ereignisse gelegten Ebene wird, denn dann hat diese Ebene die Gleichung $t' = \text{const}$, alle 3 Ereignisse erscheinen gleichzeitig. Es ist also in diesem Falle nicht D_0 von vornherein gegeben, und daraus die x', y'-Ebene zu bestimmen, sondern die umgekehrte Aufgabe zu lösen*). — Nehmen wir nun noch die allgemeinsten homogenen LORENTZ-Transformationen zu Hilfe, die wir vierdimensional veranschaulichen, so läßt sich analog zeigen, daß man auch sogar (wieder unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen) *4 Ereignisse gleichzeitig machen* kann. —

Unsere früheren Betrachtungen über „Weltlinien“ [vgl. Satz 3, S. 93] gelten auch in den allgemeineren Fällen unverändert, auch jede Bewegung in der Ebene (x, y-Ebene) oder im Raume kann man durch eine „Weltlinie“ in unserem 3- bzw. 4-dimensionalen Schema darstellen, und zwar unabhängig von der spezielleren Wahl des Bezugssystems. Natürlich sind dann solche Weltlinien keine ebenen Kurven mehr, sondern Raumkurven, Kurven im dreidimensionalen Raume oder gar Kurven im vierdimensionalen Raume.

Als „Kurve“ im vierdimensionalen Raume bezeichnet man natürlich nach Analogie mit Räumen niederer Dimension eine eindimensionale

*) Die erwähnten einschränkenden Bedingungen, welche man den 3 Ereignissen auferlegen muß, entspringen eben daraus, daß der so bestimmte Durchmesser D_0 der in der zweiten Anmerkung S. 101 erwähnten Richtungsforderung genügen muß, wie auch früher in der zweidimensionalen Darstellung [vgl. 17b, S. 94] die Einschränkungen die Richtung der Verbindungslinie der beiden Weltpunkte E_1 und E_2 oder der konjugierten Linie betrafen. — Man findet die Bedingungen für die allgemeineren Fälle angegeben bei MINKOWSKI, Gött. Nachr. 1908, S. 69.

Folge von „Punkten", d. h. von Wertsystemen x, y, z, t, die sich etwa mit Hilfe eines Parameters λ darstellen läßt:

11) $\quad x = x(\lambda), \qquad y = y(\lambda), \qquad z = z(\lambda), \qquad t = t(\lambda)$ —

Wir haben uns bei unseren geometrischen Veranschaulichungen immer nur auf homogene Lorentz-Transformationen beschränkt, wie sie den Uebergang zwischen zwei Lorentz-Systemen mit gemeinsamem Raumzeitanfangspunkt darstellen. Bei den inhomogenen Lorentz-Transformationen tritt, wie aus unserer Betrachtung S. 88 hervorgeht, zu den homogenen Termen immer noch eine additive Konstante hinzu, und das läßt sich in unseren geometrischen Bildern deuten als eine noch zu der behandelten Koordinatentransformation hinzutretende Parallelverschiebung der Systeme gegeneinander, und es liegen also in dieser Hinsicht die Verhältnisse ganz analog wie bei Transformationen gewöhnlicher Cartesischer Koordinaten. Die allgemeinste solche Transformation läßt sich auflösen in eine homogene und eine als Parallelverschiebung zu deutende inhomogene.

Satz 7. — *Inhomogene Lorentz-Transformationen, d. h. solche, die den Uebergang zwischen zwei Lorentz-Systemen mit verschiedenen Raumzeitanfangspunkten vermitteln, lassen sich geometrisch stets deuten als zusammengesetzt aus einer Parallelverschiebung des zugehörigen Minkowskischen Bildsystems und einem darauf folgenden Uebergang zu einem neuen solchen Systeme nach Maßgabe der früheren Regeln [vgl. Satz 6_1—6_3].*

Auch in zwei solchen allgemeinen Bildsystemen stellt dieselbe Kurve (Weltlinie) wieder denselben Bewegungsvorgang von beiden entsprechenden Lorentz-Systemen aus dar, wie das einer näheren Begründung wohl kaum bedarf. —

Ob wir es nun aber mit einer homogenen oder inhomogenen Lorentz-Transformation zu tun haben, die Raumzeitkoordinatendifferenzen transformieren sich homogen und für 2 Ereignisse $E_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$ und $E_2(x_2, y_2, z_2, t_2)$ ist jedenfalls

$$c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_1 - z_1)^2 \qquad invariant,$$

d. h. hat denselben Wert, welches der verschiedenen Lorentz-Systeme wir auch zugrunde legen [vgl. auch (3) S. 88], und wenn wir die Differenzen immer kleiner und kleiner wählen, folgt also

Satz 8. — *Bedeuten dx, dy, dz, dt die Inkremente der Raumzeitkoordinaten beim Uebergang von einem Weltpunkt zu einem benachbarten, so ist die quadratische Differentialform*

12) $\qquad c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \qquad$ *eine Invariante*

gegenüber allen Lorentz-Transformationen (sowohl den homogenen wie den inhomogenen), d. h. sie ändert sich nicht beim Uebergang von einem Lorentz-System zu irgendeinem anderen — in einer Formel ausgedrückt:

12 a) $\qquad c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2.$

Am zweckmäßigsten dürfte es auch bei diesem Satze sein, an die Darstellung in einem Minkowskischen Bildsysteme zu denken. Wenn man die Ereignisse etwa als benachbarte Raumzeitpunkte bei der Bewegung eines Massenpunktes ansieht, sind in jenem Bilde dx, dy, dz, dt die einem Elemente der zugehörigen Weltlinie entsprechenden Inkremente der Koordinaten, und jedem solchen Linienelemente gehört dann also nach jenem Satze ein vom Koordinatensystem unabhängiger Wert jener Differentialform (12) zu. Es liegt hierin wieder eine völlige

Analogie mit den bekannten orthogonalen Koordinatentransformationen, bei denen jedem Elemente einer Kurve (z. B. im dreidimensionalen Raume) ein bestimmter von dem speziellen zugrundegelegten Koordinatensystem unabhängiger Wert der Differentialform

$$dx^2 + dy^2 + dz^2$$

entspricht, das Quadrat der Bogenlänge jenes Elementes.

Diese Analogie führt dazu, auch hier bei den Minkowskischen Weltlinien einen der „Bogenlänge" der gewöhnlichen Geometrie analogen Begriff einzuführen. Wie die Bogenlänge das Integral der Quadratwurzel jener invarianten Differentialform ist, so wollen wir auch hier das Integral der Wurzel aus unserer obigen invarianten Form (12) einführen, oder genauer setzen wir

$$13) \qquad \int_a \sqrt{dt^2 - \frac{1}{c^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)} = \tau,$$

das Integral hinerstreckt längs der Weltlinie von einem beliebigen Grundpunkte a ab. Diese Größe τ nennen wir dann die „Eigenzeit" des betrachteten Punktes der Weltlinie. Wegen ihrer Unabhängigkeit von dem Lorentz-System, das wir zugrundelegen, empfiehlt sie sich besonders als Parameter bei der Darstellung von Weltlinien [vgl. oben (11)], geradeso wie man in der gewöhnlichen Differentialgeometrie die Bogenlänge bei der Darstellung von Kurven als Parameter bevorzugt.

Das Inkrement der Eigenzeit

$$d\tau = \sqrt{dt^2 - \frac{1}{c^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$$

ist noch einer anschaulichen Deutung fähig: Transformieren wir den in seiner Weltlinie betrachteten Massenpunkt auf Ruhe [vgl. S. 93], d. h. führen wir ein Lorentz-System ein, in dem er augenblicklich in Ruhe ist (Ruhsystem $\xi, \eta, \zeta, \vartheta$), so folgt aus

$$d\tau^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2) = d\vartheta^2 - \frac{1}{c^2}(d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2),$$

wegen $d\xi = d\eta = d\zeta = 0$:

$$d\tau = d\vartheta,$$

d. h. $d\tau$ ist die Zeitänderung während des betrachteten Bewegungselementes, wenn man sie speziell im Ruhsysteme mißt.

Im allgemeinen Lorentz-Systeme besteht zwischen $d\tau$ und dt die Beziehung:

$$14) \qquad \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2\right] = 1,$$

oder:

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]} = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}},$$

oder auch schließlich:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \varkappa,$$

wo V die augenblickliche Geschwindigkeit des Massenpunktes in dem zugrundegelegten Systeme ist*). — Zusammenfassend sagen wir:

Satz 9. — *Das von einem beliebigen Grundpunkte a längs einer Weltlinie hinerstreckte Integral*

$$\tau = \int_a \sqrt{dt^2 - \frac{1}{c^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)} \tag{13}$$

ist ganz unabhängig von dem zugrundegelegten Lorentzschen Raumzeitsysteme (x, y, z, t) (oder seinem Minkowskischen Bildsysteme) und also jedem Punkte der Weltlinie eindeutig zugeordnet.

Man nennt das Integral die „Eigenzeit" des betreffenden Weltpunktes.

Die Differentialbeziehung, welche sie mit der Zeit t in dem Lorentzsysteme (x, y, z, t) verbindet, kann man folgendermaßen schreiben:

$$\frac{dt}{d\tau} = \varkappa = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \qquad \left(V^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right). \tag{15}$$

Diese Formel bestätigt das folgende schon oben gefundene Resultat:

Zusatz. — *Das Element $d\tau$ der Eigenzeit läßt sich deuten als der Zeitzuwachs in demjenigen Lorentz-Systeme $(\xi, \eta, \zeta, \vartheta)$, in dem der Massenpunkt augenblicklich ruht (Ruhsystem):*

$$d\tau = d\vartheta. \tag{15 a}$$

§ 11.

Die Grundzüge der Minkowskischen Mechanik.

Nach Einstein soll sich die Gesamtheit aller Naturgesetze seinem Relativitätsprinzip beugen, d. h. invariant sein gegenüber allen Lorentz-Transformationen [vgl. S. 54]. Das muß also auch von den Gesetzen der Mechanik gelten. Die klassische Newtonsche Mechanik entsprach dieser Forderung nicht; auch in ihr galt zwar ein „Relativitätsprinzip" [vgl. S. 19], auch ihre Gesetze blieben invariant gegenüber gewissen Transformationen, doch nicht gegenüber den Lorentz-Transformationen, sondern den Galilei-Transformationen [vgl. S. 20], und es entsteht daher die Aufgabe, eine neue Mechanik aufzustellen, in der das neue, das Einsteinsche Relativitätsprinzip, die Invarianz ihrer Gesetze gegenüber den Lorentz-Transformationen gilt. Selbstverständlich müssen diese Gesetze denen der klassischen Mechanik, die sich durch Jahrhunderte so außerordentlich gut bewährt haben, sehr nahestehen, sie müssen in erster Näherung mit ihnen übereinstimmen. — Die Grundzüge einer solchen neuen Mechanik hat Minkowski gezeichnet, und über diesen Minkowskischen Versuch, die Mechanik dem Einstein-

*) Es ist also $\varkappa$ variabel und darf nicht verwechselt werden mit unserer früheren Größe k [vgl. (18) S. 66], die eine Konstante war, denn das in ihr auftretende v war die sich stets gleichbleibende Relativgeschwindigkeit der beiden nebeneinander betrachteten Systeme. [Man könnte V analog etwa bezeichnen als die Relativgeschwindigkeit des augenblicklichen Ruhsystems und des Systems (x, y, z, t).]

schen Relativitätsprinzipe unterzuordnen, will ich in diesem Paragraphen berichten.

Vor allem handelt es sich da wieder um die Definition der „Kräfte", die wir darum auch in dem Berichte über den Aufbau der klassischen Mechanik in § 2 so eingehend behandelten: Wir behalten im wesentlichen den dortigen Gedankengang bei, erblicken also in den Kräften wieder den Ausdruck der die Bewegung eines Massenpunktes im einzelnen bestimmenden Faktoren und suchen durch Beobachtung der Bewegung diese Einflüsse festzustellen und mittels der aus der Beobachtung gewonnenen Größen analytisch zu fassen, und zwar wieder unter Zugrundelegung verschiedener (jetzt natürlich Lorentzscher) Bezugssysteme.

Doch zunächst zeichnen wir nun unter allen diesen Systemen wieder ein ganz bestimmtes (x, y, z, t) aus, das wir dann als das „Lorentzsche Grundsystem" bezeichnen, und *definieren dann „Kräfte" zunächst wieder rein qualitativ als die Ursache von Abweichungen von einer geradlinig gleichförmigen Bewegung in bezug auf dieses Grundsystem*, also als die Ursache des Auftretens von Null verschiedener Beschleunigungen $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$ in diesem Systeme. Während nun aber in der klassischen Mechanik bezüglich dieser Beschleunigungen meist die Annahme gemacht wird, daß unter gleichen „äußeren Versuchsbedingungen", z. B. bei einer gleich weit gespannten Feder, derselbe Körper (Massenpunkt) stets dieselben Beschleunigungen erhält, unabhängig von seinem Bewegungszustand, d. h. von den Geschwindigkeiten, die er schon besitzt*), so läßt jetzt Minkowski diese Annahme fallen, er nimmt vielmehr an, daß die Beschleunigungen außer von den „äußeren" Versuchsbedingungen auch noch von den *Geschwindigkeiten* abhängen**), durch diese beiden Faktoren zusammen dann allerdings auch eindeutig bestimmt sind***). — Wenn wir also wieder, wie das im einzelnen noch ausgeführt werden soll, Kräfte durch die von ihnen verursachten Beschleunigungen messen und dann als etwas den Versuchsanordnungen Eigentümliches ansehen, so umfassen wir jetzt mit dem Worte „Versuchsanordnungen" neben den „äußeren Versuchsbedingungen" von früher auch noch den augenblicklichen Bewegungszustand des Massenpunktes selbst, seine Geschwindigkeiten.

Erst „äußeren Versuchsbedingungen" (wie in unserem obigen Beispiele: einer bestimmten Spannung der Feder) und Geschwindigkeiten zusammen gehören bestimmte Kräfte zu, *die „Kräfte" werden also nach*

---

*) Vgl. die zweite Anmerkung S. 12.

**) Nahegelegt wird diese Annahme durch folgende Ueberlegungen: Wären die Beschleunigungen von den Geschwindigkeiten unabhängig, hingen sie also nur von den äußeren Versuchsbedingungen ab, so könnte man die Geschwindigkeit eines Körpers dadurch, daß man ihn immer wieder denselben Versuchsbedingungen aussetzt, beliebig (also auch über den Wert c hinaus) steigern, was den Grundanschauungen der Relativitätstheorie widersprechen würde [vgl. S. 67 die „Zweite Folgerung"].

***) Mathematisch gesprochen heißt das: Minkowski übernimmt aus der klassischen Mechanik die Annahme, daß *die Bewegungen durch Differentialgleichungen zweiter Ordnung dargestellt* werden. — Doch enthalten diese jetzt auch die *ersten* Differentialquotienten im Gegensatz zu den Gleichungen der klassischen Mechanik, die, wenigstens nach den meist daselbst gemachten Annahmen, von solchen ersten Differentialquotienten frei sind.

Minkowski immer angesehen als Funktionen der Koordinaten und der Geschwindigkeiten. — Wenn wir demnach die zu bestimmten äußeren Versuchsbedingungen gehörigen Kräfte ermitteln wollen, so müssen wir uns Versuche noch bei verschiedensten Geschwindigkeiten angestellt denken. Da beginnen wir nun mit Versuchen, bei denen die Geschwindigkeiten (natürlich gegen das Grundsystem) zunächst sämtlich gleich 0 sind, also mit der Betrachtung von Bewegungen aus dem Zustande der Ruhe heraus: Für den ersten Augenblick einer solchen Bewegung definieren wir dann nach Minkowski die „Kräfte" X, Y, Z quantitativ genau wie in der klassischen Mechanik durch die Produkte aus einem Massenfaktor mit den eintretenden Beschleunigungen:

$$1) \qquad X = \mu \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad Y = \mu \frac{d^2y}{dt^2}, \qquad Z = \mu \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Den hier auftretenden Massenfaktor μ nennt man, weil er eben bei der Definition der im Augenblick der Ruhe wirkenden Kräfte auftritt, die „Ruhmasse" des Massenpunktes. —

Bei Bewegungen der betrachteten Art ist nun aber das Grundsystem (x, y, z, t) immer identisch mit dem augenblicklichen Ruhsystem $(\xi, \eta, \zeta, \vartheta)$ [vgl. S. 93] und wir können daher an Stelle von (1) auch schreiben:

$$2) \qquad X = \mu \frac{d^2x}{d\vartheta^2}, \qquad Y = \mu \frac{d^2y}{d\vartheta^2}, \qquad Z = \mu \frac{d^2z}{d\vartheta^2}.$$

Nun erinnern wir uns aber dessen, daß das Zeitelement $d\vartheta$ im Ruhsysteme mit dem Elemente $d\tau$ der „Eigenzeit" übereinstimmt [vgl. S. 106]. Dann liegt es sehr nahe, diese Eigenzeit τ, diesen von der Wahl des Bezugssystems unabhängigen Begriff [vgl. Satz 9, S. 107], in die Definitionen einzuführen. Wir betrachten demnach die Koordinaten des Massenpunkts im Grundsystem (oder Ruhsystem) als Funktionen der Eigenzeit, die ja ohnehin nach unseren früheren Feststellungen der natürliche Parameter zur Darstellung eines Bewegungsvorganges oder der entsprechenden Weltlinie ist. Dann folgt z. B.:

$$\frac{dx}{d\vartheta} = \frac{dx}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{d\vartheta} \qquad \text{und} \qquad \frac{d^2x}{d\vartheta^2} = \frac{d^2x}{d\tau^2} \cdot \left(\frac{d\tau}{d\vartheta}\right)^2 + \frac{dx}{d\tau} \cdot \frac{d^2\tau}{d\vartheta^2},$$

und, da eben, weil es sich um das Ruhsystem handelt, $dx = d\xi = 0$ ist:

$$\frac{dx}{d\tau} = 0 \qquad \text{und ferner} \qquad \frac{d\tau}{d\vartheta} = 1 \quad \text{[vgl. (15a) S. 107]},$$

und daher:

$$\frac{d^2x}{d\vartheta^2} = \frac{d^2x}{d\tau^2} \qquad \text{und analog} \qquad \frac{d^2y}{d\vartheta^2} = \frac{d^2y}{d\tau^2}, \qquad \frac{d^2z}{d\vartheta^2} = \frac{d^2z}{d\tau^2},$$

und weiter nach (2):

$$3) \qquad X = \mu \frac{d^2x}{d\tau^2}, \qquad Y = \mu \frac{d^2y}{d\tau^2}, \qquad Z = \mu \frac{d^2z}{d\tau^2},$$

immer zunächst noch mit der Einschränkung, daß eine Bewegung aus dem Zustande der Ruhe heraus vorliegt. Aber in dieser Form (3), nicht in der Form (1), überträgt nun Minkowski die Kraftdefinition auch auf den Fall beliebiger Bewegungen. Also auch, wenn der Massenpunkt schon gewisse Geschwindigkeiten besitzt, mißt Minkowski die diesen Geschwindigkeiten und den äußeren Versuchs-

bedingungen entsprechenden Kräfte X, Y, Z (abgesehen von einem Massenfaktor) nicht durch die Beschleunigungen im gewöhnlichen Sinne $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$, sondern durch die sogenannten „Eigenbeschleunigungen“ $\frac{d^2x}{d\tau^2}, \frac{d^2y}{d\tau^2}, \frac{d^2z}{d\tau^2}$*).

Allgemeine Definition der Kräfte im Lorentzschen Grundsystem; Minkowskische Grundgleichungen. — *Man definiert die gewissen Versuchsanordnungen (d. h. äußeren Versuchsbedingungen und Geschwindigkeiten) zugehörigen Kräfte X, Y, Z von einem bestimmten Lorentzschen Raumzeitsysteme (x, y, z, t), dem Grundsysteme, aus, durch die Produkte aus der Ruhmasse μ und den Eigenbeschleunigungen (zweite Differentialquotienten der Raumkoordinaten nach der Eigenzeit)*:

$$(3) \qquad X = \mu \frac{d^2x}{d\tau^2}, \qquad Y = \mu \frac{d^2y}{d\tau^2}, \qquad Z = \mu \frac{d^2z}{d\tau^2}.$$

*Es sind dies die „Minkowskischen Grundgleichungen“ der Mechanik***).

Es verlohnt wohl der Mühe, jetzt auch einmal das Hauptproblem der Mechanik, eine Bewegung aus gegebenen Kräften zu bestimmen, unter Zugrundelegung des Lorentzschen Grundsystems analytisch zu formulieren. — Eine Bewegung bestimmen, heißt immer die Raumkoordinaten x, y, z als Funktionen der Zeit t ermitteln. Die Form der Gleichungen (3) legt es nun sehr nahe, als unabhängige Variable anstatt t die Eigenzeit τ einzuführen. Dann geht allerdings durch die nach unseren obigen Ausführungen in X, Y, Z vorkommenden Geschwindigkeiten

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\frac{dx}{d\tau}}{\frac{dt}{d\tau}}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{\frac{dy}{d\tau}}{\frac{dt}{d\tau}}, \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{\frac{dz}{d\tau}}{\frac{dt}{d\tau}}$$

auch noch der erste Differentialquotient der weiteren Variablen t nach τ in die Gleichungen ein, und dann handelt es sich also darum, die vier Größen x, y, z, t als Funktionen von τ zu bestimmen. Dazu bedarf es natürlich noch einer vierten Bestimmungsgleichung, und diese haben wir in der ganz allgemeinen Gleichung (14) des vorigen Paragraphen vor uns, so daß wir sagen können:

Zusatz. — *Sind nach den Gleichungen (3) die Kräfte X, Y, Z in ihrer Abhängigkeit von den Koordinaten x, y, z und den Geschwindigkeiten $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ etwa durch Vorversuche ermittelt, so stellt sich das Problem,*

---

*) Es kommt das darauf hinaus, daß er X, Y, Z gewissen linearen homogenen Funktionen der gewöhnlichen Beschleunigungen $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$ proportional setzt, wie das spätere Formeln leicht erkennen lassen [vgl. unten (13)]. — Es geschieht also auch bei dieser Art des Vorgehens, deren Vorteile bald zutage treten werden, der Grundforderung Genüge, daß fehlenden Kräften verschwindende Beschleunigungen, d. h. eine geradlinig gleichförmige Bewegung im Grundsystem entspricht.

**) Ueber ihre doppelte Bedeutung für die Mechanik, einmal als Definitionsgleichungen für die Kräfte, andererseits als Bestimmungsgleichungen für die Bewegung bei gegebenen Kräften vgl. die ausführlichen Darlegungen über die „Newtonschen Grundgleichungen“ der klassischen Mechanik in § 2, S. 13.

eine Bewegung in bezug auf das Lorentzsche Grundsystem unter dem Einfluß dieser Kräfte zu bestimmen, analytisch folgendermaßen dar: Es sind x, y, z und t als Funktionen von τ aus den 3 Gleichungen (3) *und der vierten Gleichung*

$$4) \qquad \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2\right] = 1$$

zu bestimmen.

In dieser Formulierung kommt das Problem darauf hinaus, die Gleichungen der „Weltlinie" des betrachteten Massenpunktes mit der Eigenzeit τ als Parameter zu bestimmen:

$$5) \qquad x = x(\tau), \qquad y = y(\tau), \qquad z = z(\tau), \qquad t = t(\tau),$$

also diese nach unseren früheren Ausführungen ausgezeichnete Parameterdarstellung zu ermitteln [vgl. S. 106]. —

Da hier die Zeit t den Raumkoordinaten x, y, z gegenüber, ihre Sonderstellung eingebüßt hat, empfiehlt es sich neben X, Y, Z auch noch eine Größe T einzuführen, die wir in voller Analogie mit X, Y, Z [vgl. (3)] bei einem gegebenen Bewegungsvorgange definieren durch die Gleichung:

$$3\,a) \qquad T = \mu \frac{d^2 t}{d\tau^2}.$$

Diese Größe T ist dann allerdings nicht unabhängig von X, Y, Z; es besteht vielmehr, wie durch Differentiation der Gleichung (4) folgt, zwischen den 4 zusammengehörigen Größen X, Y, Z, T die Beziehung:

$$6) \qquad c^2 T \frac{dt}{d\tau} - \left(X \frac{dx}{d\tau} + Y \frac{dy}{d\tau} + Z \frac{dz}{d\tau}\right) = 0,^{*})$$

und diese beiden Gleichungen (3a) und (6) zusammen hätten dann bei der obigen Formulierung des Bewegungsproblemes an die Stelle der ihnen gleichwertigen Gleichung (4) treten können**). —

Wir wollen jetzt darangehen, zu den oben nur vom Grundsystem aus definierten Kräften „äquivalente Kräfte" in anderen Lorentzschen Systemen einzuführen, und zwar wollen wir uns dabei, ganz ähnlich wie früher, von dem Prinzipe leiten lassen, die Festsetzungen so zu wählen, daß die Minkowskischen Grundgleichungen möglichst auch in den anderen Systemen gültig bleiben, d. h. eben, daß die Gesetze der Mechanik invariant bleiben beim Uebergang zu anderen Lorentzschen Systemen oder gegenüber allen Lorentz-Transformationen.

Der Zusammenhang zwischen den Raumzeitkoordinaten desselben Ereignisses in dem Grundsysteme (x, y, z, t) und einem daneben betrachteten zweiten Lorentzschen Systeme (x', y', z', t') wird durch lineare Gleichungen (Lorentz-Transformationen) dargestellt [vgl. Satz 1, S. 88]; also bestehen Beziehungen von der folgenden Form:

---

*) Da X, Y, Z, wie wir eben feststellten, Funktionen der Koordinaten x, y, z und der Geschwindigkeiten $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ sind, so lehrt diese Gleichung (6), daß das gleiche auch von der Größe T gilt, daß diese also von genau derselben Art ist.

**) Daß hier zwei Gleichungen an die Stelle einer treten sollen, ist darin begründet, daß durch sie auch eine neue Unbekannte (T) eingeführt wird.

$$
\begin{aligned}
x' &= \alpha_0 t + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \mathfrak{a} \\
y' &= \beta_0 t + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z + \mathfrak{b} \\
z' &= \gamma_0 t + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z + \mathfrak{c} \\
t' &= \delta_0 t + \delta_1 x + \delta_2 y + \delta_3 z + \mathfrak{d},
\end{aligned} \tag{7}
$$

wo die Größen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ nach gewissen aus der Invarianzforderung (3) S. 88 entspringenden Bedingungen unterworfen sind (ähnlich den Orthogonalitätsbedingungen bei gewöhnlichen Raumtransformationen) [vgl. auch unten S. 122] — doch interessieren uns hier diese Nebenbedingungen nicht weiter.

Aus diesen Gleichungen (7) folgt nun durch zweimalige Differentiation nach τ, jenem von der Wahl des Systems ganz unabhängigen Parameter, und darauffolgende Multiplikation mit μ unter Rücksicht auf (3) und (3a):

$$
\begin{aligned}
\mu \frac{d^2 x'}{d\tau^2} &= \alpha_0 T + \alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z \\
\mu \frac{d^2 y'}{d\tau^2} &= \beta_0 T + \beta_1 X + \beta_2 Y + \beta_3 Z \\
\mu \frac{d^2 z'}{d\tau^2} &= \gamma_0 T + \gamma_1 X + \gamma_2 Y + \gamma_3 Z \\
\mu \frac{d^2 t'}{d\tau^2} &= \delta_0 T + \delta_1 X + \delta_2 Y + \delta_3 Z .
\end{aligned}
$$

Wenn also in dem zweiten LORENTZ-Systeme den Grundgleichungen (3) und (3a) völlig analoge Gleichungen bestehen sollen:

$$
\mu \frac{d^2 x'}{d\tau^2} = X', \qquad \mu \frac{d^2 y'}{d\tau^2} = Y', \qquad \mu \frac{d^2 z'}{d\tau^2} = Z', \qquad \mu \frac{d^2 t'}{d\tau^2} = T',
$$

so müssen wir in diesem neuen Bezugssysteme die „äquivalenten Kräfte X', Y', Z'" und die Hilfsgröße T' folgendermaßen ansetzen:

$$
\begin{aligned}
X' &= \alpha_0 T + \alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z \\
Y' &= \beta_0 T + \beta_1 X + \beta_2 Y + \beta_3 Z \\
Z' &= \gamma_0 T + \gamma_1 X + \gamma_2 Y + \gamma_3 Z \\
T' &= \delta_0 T + \delta_1 X + \delta_2 Y + \delta_3 Z,
\end{aligned} \tag{8}
$$

wir müssen also diese 4 Größen X, Y, Z, und T nicht derselben Transformation unterwerfen wie die Raumzeit k o o r d i n a t e n [vgl. (7)], sondern nur der entsprechenden h o m o g e n e n LORENTZ-Transformation, oder wir müssen sie transformieren wie Koordinaten d i f f e r e n z e n [vgl. S. 15].

Zur Vereinfachung der Ausdrucksweise wollen wir auch hier eine allgemeine Definition einschalten:

Definition des Vierervektors. — *Von 4 mit Bezug auf die Achsen eines MINKOWSKIschen vierdimensionalen Koordinatensystems definierten Größen (wie hier X, Y, Z, T), die sich beim Uebergang zu einem anderen solchen Bezugssysteme wie R e l a t i v k o o r d i n a t e n (Koordinatendifferenzen) zweier Punkte (also linear und h o m o g e n) transformieren, sagen wir, sie besäßen V e k t o r c h a r a k t e r, oder sie seien die Komponenten eines „Vierervektors". Man kann sie sich dann immer gedeutet denken als die Projektionen einer Strecke im vierdimensionalen Raume auf die 4 gerade betrachteten Systemachsen [vgl. S. 15].*

Unter Benutzung dieser Bezeichnungsweise können wir dann unsere obigen Resultate folgendermaßen aussprechen:

Fundamentalsatz (Definition äquivalenter Kräfte in beliebigen Lorentzschen Raumzeitsystemen). — *Sind im Grundsystem (x, y, z, t) irgendwelche Kräfte X, Y, Z in ihrer Abhängigkeit von den äußeren Versuchsbedingungen und den Geschwindigkeiten $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ gegeben, und ferner irgendeine unter ihrem Einfluß stattfindende Bewegung:*

$$x = x(\tau), \qquad y = y(\tau), \qquad z = z(\tau), \qquad t = t(\tau),$$

so daß also die Gleichungen bestehen:

$$(3) \qquad \mu \frac{d^2x}{d\tau^2} = X, \qquad \mu \frac{d^2y}{d\tau^2} = Y, \qquad \mu \frac{d^2z}{d\tau^2} = Z,$$

so führen wir zunächst, immer noch im Grundsystem, eine vierte Größe T durch die Gleichung:

$$(3\,a) \qquad \mu \frac{d^2t}{d\tau^2} = T$$

ein, die dann mit X, Y, Z durch die Beziehung zusammenhängt:

$$(6) \qquad c^2 T \frac{dt}{d\tau} - X \frac{dx}{d\tau} - Y \frac{dy}{d\tau} - Z \frac{dz}{d\tau} = 0.$$

Sodann legen wir diesen 4 Größen X, Y, Z, T Vektorcharakter bei und definieren in dieser Weise zu ihnen äquivalente Größen X', Y', Z', T' in bezug auf beliebige andere Lorentz-Systeme (x', y', z', t').

Dann gelten in allen diesen Systemen die Gleichungen:

$$3') \quad \mu \frac{d^2x'}{d\tau^2} = X', \qquad \mu \frac{d^2y'}{d\tau^2} = Y', \qquad \mu \frac{d^2z'}{d\tau^2} = Z', \qquad \mu \frac{d^2t'}{d\tau^2} = T',$$

und auch:

$$6') \qquad c^2 T' \frac{dt'}{d\tau} - X' \frac{dx'}{d\tau} - Y' \frac{dy'}{d\tau} - Z' \frac{dz'}{d\tau} = 0.$$

Alle Lorentz-Systeme sind damit also in der Minkowskischen Mechanik als gleichberechtigt anzusehen.

Man nennt X, Y, Z, T (bzw. X', Y', Z', T') die Komponenten des Vektors $\mathfrak{K}$ der „Minkowskischen Kraft".

Mit der Feststellung (3′) haben wir die Invarianz der Minkowskischen Grundgleichungen der Mechanik gegenüber sämtlichen Lorentz-Transformationen nachgewiesen und damit *die Mechanik dem Einsteinschen Relativitätsprinzip unterworfen.*

Wir vermerken noch folgenden

Zusatz I. — *Führt man noch den Vierervektor $\mathfrak{b}\left(\frac{d^2x}{d\tau^2}, \frac{d^2y}{d\tau^2}, \frac{d^2z}{d\tau^2}, \frac{d^2t}{d\tau^2}\right)$ der „Eigenbeschleunigung" ein, so kann man die Minkowskischen Grundgleichungen (3) bzw. (3′) auch vektoriell, d. h. ohne Bezugnahme auf ein spezielles Lorentz-System, folgendermaßen schreiben:*

$$3'') \qquad \mu \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{K} \qquad \text{[vgl. (1′) S. 17].}$$

Bezüglich der *Größe T* sei noch erwähnt, daß sie *im Ruhsystem*

stets den Wert 0 besitzt; das folgt ohne weiteres aus (6), denn in diesem Systeme ist $\frac{dx}{d\tau}=\frac{dy}{d\tau}=\frac{dz}{d\tau}=0$ und $\frac{dt}{d\tau}=1$ [vgl. (15a) S. 107].

Die Bedingungen (6) bzw. (6′), welchen X, Y, Z, T unterworfen sind, kann man auch folgendermaßen formulieren:

Zusatz 2. — *Der Vierervektor X, Y, Z, T der* Minkowskischen *Kraft $\mathfrak{K}$ ist stets „normal" zu dem Vektor dx, dy, dz, dt des Weltlinienelementes. Dabei ist unter „normal" jetzt „konjugiert" in bezug auf die hyperbolischen Grundgebilde*

$$G_3 \equiv c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = \pm 1$$

im vierdimensionalen Minkowskischen *Raume zu verstehen [vgl. S. 102].*

Zum richtigen Verständnis dieses Satzes sei daran erinnert, daß die äußeren Versuchsbedingungen bei gegebenen Geschwindigkeiten im Grunde ja bereits durch Angabe allein der 3 Größen X, Y, Z bestimmt sind, deren Wahl gar keiner Beschränkung unterliegt — erst die Einführung der Hilfsgröße T erfolgt dann immer so, daß jener Bedingung von den zueinander normalen Richtungen der beiden Vektoren Genüge geschieht. —

Bevor wir in unseren allgemeinen Ausführungen fortfahren, wollen wir noch eine spezielle, besonders einfache Bewegung behandeln, nämlich die kräftefreie Bewegung. Zunächst sehen wir, daß die Voraussetzung, daß keine Kräfte wirken, also $X=Y=Z=0$ (und daher nach (6) auch $T=0$) ist, von der Wahl eines speziellen Lorentz-Systems gänzlich unabhängig ist; das folgt aus dem Vektorcharakter von X, Y, Z, T [vgl. (8)]. Wir können also ein ganz beliebiges Lorentz-System (x, y, z, t) zugrunde legen, sicher lauten in ihm dann die Bewegungsgleichungen:

$$\mu\frac{d^2x}{d\tau^2}=0, \qquad \mu\frac{d^2y}{d\tau^2}=0, \qquad \mu\frac{d^2z}{d\tau^2}=0, \qquad \mu\frac{d^2t}{d\tau^2}=0,$$

und daraus ergeben sich x, y, z, t als lineare Funktionen des Parameters τ und durch dessen Elimination weiter auch x, y, z als lineare Funktionen der Zeit t; diesen Sachverhalt können wir folgendermaßen ausdrücken:

Spezialsatz. — *Wirken auf einen Massenpunkt gar keine Kräfte, so ist seine Weltlinie eine Gerade im vierdimensionalen Raume, die in beliebigen* Lorentz*-Systemen durch Gleichungen von folgender Form dargestellt wird:*

$$x=\alpha\tau+\mathfrak{a}, \qquad y=\beta\tau+\mathfrak{b}, \qquad z=\gamma\tau+\mathfrak{c}, \qquad t=\delta\tau+\mathfrak{d}$$

mit $c^2\delta^2-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2=1$ [wegen (4)]. — Ihr entspricht im physikalischen Raume eine geradlinig gleichförmige Bewegung.

In der Sache konnten wir natürlich kein anderes Resultat erwarten, da ja die Definition der Kraft als Ursache einer Abweichung von der geradlinig gleichförmigen Bewegung, wie wir sie aus dem Trägheitsgesetz erschlossen hatten, aus der klassischen Mechanik beibehalten ist. So mußte sich also im Falle des Fehlens von Kräften eine solche geradlinig gleichförmige Bewegung ergeben [vgl. auch die erste Anmerkung S. 110]. —

Um nun unsere allgemeinen Betrachtungen wieder aufzunehmen, wollen wir jetzt die Minkowskischen Grundgleichungen noch einer Umformung unterwerfen, indem wir den Parameter τ der Eigenzeit wieder

eliminieren. Dazu verhilft uns die Schlußformel (15) des vorigen Paragraphen:

$$9) \qquad \frac{dt}{d\tau} = \varkappa \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \qquad \text{wo} \qquad V^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2,$$

derzufolge für jede beliebige Funktion f die Formel gilt:

$$\frac{df}{d\tau} = \varkappa \cdot \frac{df}{dt}.$$

So nimmt denn die erste der Formeln (3):

$$\frac{d}{d\tau}\left(\mu \frac{dx}{d\tau}\right) = X \qquad \text{die Gestalt an:} \qquad \varkappa \frac{d}{dt}\left(\mu \varkappa \frac{dx}{dt}\right) = X,$$

und damit erhalten wir die erste Formel des folgenden Systems:

$$10) \qquad \begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\mu \varkappa \frac{dx}{dt}\right) &= \frac{1}{\varkappa} X, \\ \frac{d}{dt}\left(\mu \varkappa \frac{dy}{dt}\right) &= \frac{1}{\varkappa} Y, \\ \frac{d}{dt}\left(\mu \varkappa \frac{dz}{dt}\right) &= \frac{1}{\varkappa} Z, \\ \frac{d}{dt}(\mu \varkappa) &= \frac{1}{\varkappa} T. \end{aligned}$$

Die 3 ersten dieser Gleichungen entsprechen äußerlich völlig den Newtonschen Grundgleichungen der klassischen Mechanik, zumal wenn wir diese in der als „Impulsgleichungen“ bezeichneten Form schreiben:

$$\frac{d}{dt}\left(m \frac{dx}{dt}\right) = X, \qquad \frac{d}{dt}\left(m \frac{dy}{dt}\right) = Y, \qquad \frac{d}{dt}\left(m \frac{dz}{dt}\right) = Z,$$

und da $\varkappa$ wegen des gegenüber der Lichtgeschwindigkeit c meist sehr kleinen Wertes von V sehr nahe bei 1 liegt [vgl. (9)], so sehen wir, daß die neuen Gleichungen tatsächlich in erster Näherung, wie verlangt, in die Newtonschen Grundgleichungen übergehen.

Wegen dieser engen Verwandtschaft nennt man auch hier in der relativistischen Mechanik die Größen

$$11) \qquad \frac{1}{\varkappa} X = \overline{X}, \qquad \frac{1}{\varkappa} Y = \overline{Y}, \qquad \frac{1}{\varkappa} Z = \overline{Z}$$

zum Unterschiede von den Komponenten der Minkowskischen Kraft (Vektor im vierdimensionalen Raume) die Komponenten der „Newtonschen Kraft“ *). Sie sind nach dieser neuen Auffassung wie X, Y, Z abhängig von den Geschwindigkeiten, die auch noch durch den Faktor

*) Sie besitzen im dreidimensionalen Raume Vektorcharakter bezüglich aller Uebergänge zwischen fest miteinander verbundenen Systemen, d. h. gegenüber bloßen Verschiebungen und Drehungen des räumlichen Achsensystems. Es gilt aber, sowie wir gegeneinander bewegte Systeme betrachten, von diesen Kräften nicht mehr wie früher z. B. der Satz, daß sie in Systemen mit dauernd parallel gerichteten Achsen einander gleich sind [vgl. S. 14]. — Von „augenblicklich koinzidierenden“ Systemen, wie dort bei Voraussetzung der universellen Zeit, darf man hier natürlich nicht mehr sprechen.

$\varkappa$ eingehen [vgl. (9)], und das gleiche gilt auch von der Größe $\mu \cdot \varkappa$, welche an die Stelle der Masse in der NEWTONschen Mechanik tritt*).

Diese 3 ersten Gleichungen (10) gestatten nun für sich allein bereits das Bewegungsproblem zu lösen, d. h. x, y, z als Funktionen von t zu bestimmen; wir sehen aber zugleich auch, daß die strenge Lösung dieser neuen mechanischen Grundgleichungen im allgemeinen eine ungleich schwierigere Aufgabe sein wird als die Auflösung der NEWTONschen Grundgleichungen der klassischen Mechanik, sind doch die linken Seiten der neuen Gleichungen nicht einfach die zweiten Differentialquotienten der unbekannten Funktionen — sie sind vielmehr weit komplizierter gebaut, da sie (durch V^2 in $\varkappa$) auch noch die ersten Differentialquotienten enthalten, und das letztere gilt auch von den rechten Seiten.

Was besagt nun aber die vierte der Gleichungen (10)? — Für das Problem, eine Bewegung zu bestimmen, ist sie, wie wir soeben sahen, belanglos, sie liefert eben nur die Hilfsgröße T, die uns von diesem Gesichtspunkte aus nicht interessiert, und da wir T andererseits auch aus der Gleichung (6) bestimmen können, muß die vierte Gleichung (10) eine bloße Folge der übrigen sein. Aber welche Bedeutung hat sie? — Um das zu erfahren, multiplizieren wir sie mit $c^2 dt$ und schreiben sie dann unter Berücksichtigung von (6) in folgender Form:

$$d(\mu c^2 \varkappa) = \frac{1}{\varkappa}(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz),$$

und hierfür können wir wegen der Konstanz von μc^2 und mit Rücksicht auf (11) auch weiter schreiben:

$$d(\mu c^2(\varkappa - 1)) = \overline{X}\,dx + \overline{Y}\,dy = \overline{Z}\,dz.$$

Nun ist $\varkappa = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{V^2}{c^2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{V^4}{c^4} + \ldots$, also

$$\mu c^2(\varkappa - 1) = \frac{\mu}{2}V^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\mu V^2 \cdot \frac{V^2}{c^2} + \ldots,$$

demnach geht bei kleinen Werten von $\frac{V}{c}$ dieser Ausdruck in erster Näherung über in den bekannten Ausdruck für die kinetische Energie oder lebendige Kraft in der klassischen Mechanik. — Daher übertragen wir jetzt diese Bezeichnung auch bei beliebigen Werten von $\frac{V}{c}$ auf den Ausdruck links und können dann unser Resultat so aussprechen:

Satz — *Die vierte der MINKOWSKIschen Grundgleichungen* (3′), *die man auch in die Form versetzen kann:*

$$12) \qquad d(\mu c^2(\varkappa - 1)) = \frac{1}{\varkappa}(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz),$$

drückt, wenn man noch den sich in erster Näherung auf $\frac{\mu}{2}V^2$ *reduzierenden Ausdruck*

$$\mu c^2(\varkappa - 1) = \mu c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - 1\right) = L$$

*) Vgl. die letzte Anmerkung des Paragraphen S. 118).

als „kinetische Energie" bezeichnet, den Satz von der Erhaltung der Energie aus:

$$dL = dA,$$

weil $dA = \frac{1}{\varkappa}(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$ *als Arbeitsleistung der „Newtonschen Kraft" mit den Komponenten*

$$\overline{X} = \frac{X}{\varkappa}, \qquad \overline{Y} = \frac{Y}{\varkappa}, \qquad \overline{Z} = \frac{Z}{\varkappa} \tag{11}$$

gedeutet werden kann.

Da sonach von den Minkowskischen Grundgleichungen der Mechanik die 3 ersten den Newtonschen Grundgleichungen in der speziellen Form der Impulsgleichungen, die vierte aber dem Energiesatz der klassischen Mechanik entsprechen, nennt man ihren Inhalt zusammenfassend auch den „*Impuls-Energiesatz*".

Zum Schlusse wollen wir noch eine wichtige Folgerung aus den Minkowskischen Formeln ziehen, und, um diese vorzubereiten, zunächst noch den zwischen den Größen $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$, den Beschleunigungen im gewöhnlichen Sinne, und den Kräften in der Minkowskischen Mechanik bestehenden Zusammenhang weiter entwickeln. Da liefert uns die Ausrechnung der linken Seite der ersten Formel (10) unter Berücksichtigung der Werte (9) von $\varkappa$ und V^2:

$$\varkappa\mu\left\{\varkappa\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt}\frac{\varkappa^3}{c^2}\left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}\right)\right\} = X, \tag{13}$$

und analoge Gleichungen liefern die zweite und dritte jener Formeln (10). — Es bestehen also zwischen X, Y, Z und den gewöhnlichen Beschleunigungen gewisse lineare homogene Beziehungen*). Diese Beziehungsgleichungen löse ich nun nach den Beschleunigungen auf; die Einzelheiten der Rechnung übergehe ich. Das Resultat stellt sich unter Benutzung der Hilfsgröße

$$T = \frac{1}{c^2}\left(X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt}\right) \tag{6a}$$

sehr einfach dar und lautet:

$$\mu\varkappa^2\frac{d^2x}{dt^2} = X - \frac{dx}{dt}T, \quad \mu\varkappa^2\frac{d^2y}{dt^2} = Y - \frac{dy}{dt}T, \quad \mu\varkappa^2\frac{d^2z}{dt^2} = Z - \frac{dz}{dt}T. \tag{14}$$

Diese Gleichungen bestätigen zunächst, daß im Ruhsysteme, in dem stets $\varkappa = 1$ und, wie wir bereits oben erwähnten, $T = 0$ ist, zwischen den Komponenten X, Y, Z der Minkowskischen Kraft und den Beschleunigungen genau die gleichen Beziehungen bestehen, wie in der klassischen Mechanik **).

Um sodann von den Gleichungen (14) unsere Hauptanwendung zu machen, fassen wir einmal 2 spezielle Fälle ins Auge:

---

*) Es sind dies die Beziehungen, von denen bereits in der ersten Anmerkung S. 110 die Rede war.

**) Wir hatten das oben bei der Definition der Kräfte so festgesetzt — allerdings nur für den Fall, daß das Ruhsystem gerade mit dem Lorentzschen „Grundsystem" zusammenfällt; doch da wir inzwischen die Gleichberechtigung aller Lorentz-Systeme festgestellt haben, muß es tatsächlich allgemein gelten.

Erster Fall: *Die Richtung der* Newtonschen *Kraft stehe in dem betrachteten Augenblick senkrecht auf der Bewegungsrichtung.*

Dann ist $T = \frac{\varkappa}{c^2}\left(\overline{X}\frac{dx}{dt} + \overline{Y}\frac{dy}{dt} + \overline{Z}\frac{dz}{dt}\right) = 0$ und die Gleichungen (14) nehmen, wenn wir auch in sie die Newtonschen Kräfte $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ einführen, die Gestalt an:

15 a) $$\mu\varkappa\frac{d^2x}{dt^2} = \overline{X}, \qquad \mu\varkappa\frac{d^2y}{dt^2} = \overline{Y}, \qquad \mu\varkappa\frac{d^2z}{dt^2} = \overline{Z},$$

an die Stelle des konstanten Massenfaktors m in der gewöhnlichen Mechanik tritt also hier der von der Geschwindigkeit abhängige Ausdruck $\mu\varkappa = \frac{\mu}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$.

Zweiter Fall. — *Die Bewegungsrichtung falle gerade mit der Richtung der* Newtonschen *Kraft zusammen.*

Dann ist $\frac{dx}{dt}:\frac{dy}{dt}:\frac{dz}{dt} = \overline{X}:\overline{Y}:\overline{Z} = X:Y:Z$ und daher kann man

$$T = \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\frac{X}{\frac{dx}{dt}} + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\frac{Y}{\frac{dy}{dt}} + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\frac{Z}{\frac{dz}{dt}}\right] \qquad \text{[vgl. (6a)]}$$

nach Belieben durch einen der drei folgenden Ausdrücke darstellen:

$$T = \frac{V^2}{c^2}\cdot\frac{X}{\frac{dx}{dt}} = \frac{V^2}{c^2}\cdot\frac{Y}{\frac{dy}{dt}} = \frac{V^2}{c^2}\cdot\frac{Z}{\frac{dz}{dt}},$$

und die Gleichungen (14) lassen sich daher jetzt folgendermaßen schreiben:

$$\mu\varkappa^2\frac{d^2x}{dt^2} = \left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)X, \quad \mu\varkappa^2\frac{d^2y}{dt^2} = \left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)Y, \quad \mu\varkappa^2\frac{dz^2}{dt^2} = \left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)Z,$$

oder, wieder nach Einführung der Newtonschen Kräfte (11), unter Berücksichtigung von $1-\frac{V^2}{c^2} = \frac{1}{\varkappa^2}$:

15 b) $$\mu\varkappa^3\frac{d^2x}{dt^2} = \overline{X}, \qquad \mu\varkappa^3\frac{d^2y}{dt^2} = \overline{Y}, \qquad \mu\varkappa^3\frac{d^2z}{dt^2} = \overline{Z}$$

d. h. in diesem Falle tritt an die Stelle der Masse der gewöhnlichen Mechanik wieder ein variabler Faktor $\mu\varkappa^3$, aber ein anderer als im ersten Falle.

Folgerung aus der Minkowskischen Mechanik. — *Die Masse eines materiellen Punktes, d. i. der Trägheitswiderstand, den er einer Kraft entgegensetzt, oder genauer definiert, der Quotient zwischen* Newtonscher *Kraft und Beschleunigung**), *ist, wenn die Kraft in der augenblicklichen Bewegungsrichtung (longitudinal) wirkt:*

*) Wir gewannen die Ausdrücke (16) für die Masse durch Vergleichung unserer Resultate (15) mit den Newtonschen Grundgleichungen, wenn wir diese in der Form $m\frac{d^2x}{dt^2} = X$, usw. schrieben. Hätten wir sie zuvor in die „Impulsform" $\frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{dt}\right) = X$, usw. versetzt, so hätten wir alle Male $m = \mu\cdot\varkappa$ erhalten [vgl. (10)]. — Beide Arten

$16_l)$ $$m_l = \mu \cdot \varkappa^3 = \frac{\mu}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}^3}$$ *(longitudinale Masse),*

wenn sie dagegen senkrecht zur Bewegungsrichtung (transversal) wirkt:

$16_{tr})$ $$m_{tr} = \mu \cdot \varkappa = \frac{\mu}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$ *(transversale Masse),*

stets also abhängig von der Geschwindigkeit V des Massenpunktes und also auch von dem Bezugssystem, und zwar wächst sie stets mit der Geschwindigkeit.

Bei den im Verhältnis zur Lichtgeschwindigkeit c kleinen Geschwindigkeiten V der Mechanik ist $\varkappa$ allerdings außerordentlich nahe bei 1 gelegen, und daher erhält man dann in beiden Fällen in erster Näherung für die „Masse" denselben, und zwar konstanten, Wert μ; die der klassischen Mechanik zugrunde liegende Annahme der Konstanz der Masse ergibt sich also auch hier in der Minkowskischen Mechanik als erste Näherung. — Sobald wir aber Bewegungen betrachten, bei denen Geschwindigkeiten auftreten, die gegenüber der Lichtgeschwindigkeit nicht mehr als verschwindend klein anzusehen sind, ist nach der Minkowskischen Mechanik die Masse keine Konstante mehr, sie hängt vielmehr noch von der Geschwindigkeit des Massenpunktes ab und ist auch verschieden, je nachdem die augenblickliche Bewegungsrichtung mit der Richtung der Kraft zusammenfällt oder nicht.

Solche hohe Geschwindigkeiten treten nun bei den Kathodenstrahlen und den Strahlen des Radiums auf. Versuche von A. H. Bucherer und von Günther Neumann mit β-Strahlen von Radiumpräparaten haben diese Gesetze bestens bestätigt. Nach einem zusammenfassenden Bericht von Cl. Schaefer (Ann. d. Phys. Bd. 49 (1916) S. 934) sind sie als gesichert zu betrachten bis zu Geschwindigkeiten von ca. 0,85 c, und zwar im Intervalle von 0,3 c bis 0,7 c mit einer Genauigkeit von 1 ‰.

§ 12.

Minkowskis imaginäre Welt.

Außer der in § 10 eingehend behandelten geometrischen Veranschaulichung der Lorentz-Transformationen hat Minkowski noch eine weitere Deutung dieser Transformationen gegeben, allerdings unter Zuhilfenahme des Imaginären. Sie ist für die Folge von ganz besonderer Wichtigkeit geworden, und daher will ich auf diese weiteren Minkowskischen Betrachtungen hier noch kurz eingehen.

Die homogenen Lorentz-Transformationen waren durch die Eigenschaft charakterisiert, daß bei ihnen die quadratische Form

1) $$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \qquad invariant$$

---

des Vorgehens kommen auf dasselbe hinaus, solange m eben eine Konstante ist. Hier, wo das nicht mehr der Fall ist, muß man aber genauer angeben, wie man die Masse definiert.

blieb, und bei den allgemeinen LORENTZ-Transformationen blieb wenigstens die entsprechende Differentialform

1a) $$c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \qquad invariant.$$

Wir verglichen diese Eigenschaften der LORENTZschen Raumzeittransformationen mit denen gewöhnlicher Raumtransformationen, bei denen die Formen

2) $$x^2 + y^2 + z^2 \qquad \text{bzw.} \qquad dx^2 + dy^2 + dz^2 \qquad invariant$$

blieben, und die auch durch diese Eigenschaften völlig charakterisiert waren. — MINKOWSKI führt nun den LORENTZschen Fall der Form (1) bzw. (1a) auf den der Form (2) zurück, indem er

$$ic \cdot t = x_0, \qquad x = x_1, \qquad y = x_2, \qquad z = x_3$$

setzt, wo i die imaginäre Einheit bedeutet. Dann gehen die Invarianzforderungen (1) und (1a) über in die Forderungen, daß

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \qquad \text{bzw.} \qquad dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \qquad invariant$$

sein sollen, und das liefert uns zunächst den

Satz 1. — *Unter Benutzung der imaginären* MINKOWSKIschen *Raumzeitkoordinaten*

3) $$ic \cdot t = x_0, \qquad x = x_1, \qquad y = x_2, \qquad z = x_3$$

läßt sich jede homogene LORENTZ*-Transformation dadurch charakterisieren, daß für sie die quadratische Form*

4) $$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \qquad eine\ Invariante$$

ist. Man kann sie daher als Drehung eines vierdimensionalen Koordinatensytems um den Anfangspunkt deuten — und sodann den

Zusatz. — *Entsprechend läßt sich jede beliebige* LORENTZ*-Transformation ansehen als zusammengesetzt aus einer Drehung und einer Parallelverschiebung des Koordinatensystems. — Bei ihr bleibt wenigstens die quadratische Differentialform*

4a) $$dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \qquad invariant,$$

das „Quadrat des Linienelementes" in dem imaginären vierdimensionalen MINKOWSKIschen *Raume.*

Alle diese Begriffe, wie Drehungen und Verschiebungen eines Koordinatensystems, Linienelement, im vierdimensionalen, noch dazu imaginären Raume entbehren natürlich einer anschaulich greifbaren Bedeutung, und die Berechtigung, von ihnen zu sprechen, nehmen wir wieder nur daher, daß sie analytisch wohldefinierte Aequivalente besitzen, die eben als die natürlichen Verallgemeinerungen von Operationen und Formeln anzusehen sind, die im dreidimensionalen reellen Raume unserer Anschauung den mit diesen Namen belegten Dingen entsprechen. — So werden wir natürlich den Ausdruck einer „Drehung" des Koordinatensystems auch im mehrdimensionalen und gegebenenfalls auch imaginären Raume stets in einer linearen homogenen Koordinatentransformation erblicken. So folgt denn sofort

Satz 2. — *Analytisch stellt sich im imaginären vierdimensionalen* MINKOWSKIschen *Raume jede homogene* LORENTZ*-Transformation durch Gleichungen von folgender Form dar:*

$$5)\qquad \begin{aligned} x_0' &= a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + a_{03}x_3 \\ x_1' &= a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ x_2' &= a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ x_3' &= a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned}$$

Was die hier auftretenden Koeffizienten anlangt, so gilt für sie

Zusatz 1. — *Die Realitätsverhältnisse erfordern, daß die Koeffizienten a_{ix} mit einem Index 0 rein imaginär, alle übrigen aber, also a_{00} und alle ohne einen Index 0, reell angenommen werden.*

Vielleicht beleuchtet den Sachverhalt am besten ein Beispiel direkter Uebertragung von Drehungen ins Imaginäre: Wir wollen die speziellen Lorentz-Transformationen betrachten, welche y und z, also x_2 und x_3, invariant lassen. Dann sind eben nur die Minkowskischen Raumzeitkoordinaten x_0 und x_1 zu transformieren, und zwar so, daß

$$x_0^2 + x_1^2 \qquad invariant$$

bleibt. — Im Reellen kennt man nun die Transformationen, welche $x^2 + y^2$ invariant lassen: Es sind das die den Drehungen eines ebenen rechtwinkligen Systems entsprechenden Substitutionen. So geschieht denn der obigen Invarianzforderung Genüge durch die Transformationen

$$x_0' = x_0 \cos\varphi - x_1 \sin\varphi \equiv \frac{x_0 - x_1 \operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}$$

$$x_1' = x_0 \sin\varphi + x_1 \cos\varphi \equiv \frac{x_0 \operatorname{tg}\varphi + x_1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}},$$

und zwar identisch in φ, d. h. bei ganz beliebiger Verfügung über φ. — Da wir es hier aber mit imaginären Substitutionen zu tun haben, können wir auch φ imaginär wählen, z. B.

$$\varphi = i\cdot\psi \qquad (\psi \text{ reell})$$

setzen, ja die Bemerkung des obigen Zusatzes zwingt uns direkt dazu. Setzen wir dann noch

$$\operatorname{tg}\varphi \equiv \operatorname{tg} i\psi = iq \qquad \left(q = \frac{e^{\psi} - e^{-\psi}}{e^{\psi} + e^{-\psi}} < 1\right),$$

wo dann q wieder reell ist, so nehmen unsere Formeln die Gestalt an:

$$x_0' = \frac{x_0 - iqx_1}{\sqrt{1-q^2}} \qquad x_1' = \frac{x_1 + iqx_0}{\sqrt{1-q^2}},$$

und, wenn wir noch $x_0 = ic\cdot t$, $x_0' = ic\cdot t'$, $x_1 = x$, $x_1' = x'$ setzen, sind das genau unsere alten Gleichungen (18) S. 66:

$$t' = \frac{t - \frac{q}{c}x}{\sqrt{1-q^2}} \qquad \text{und} \qquad x' = \frac{x - q\cdot ct}{\sqrt{1-q^2}},$$

über deren Deutung wir jetzt also sagen können:

Spezialsatz. — *Die speziellen homogenen Lorentz-Transformationen, bei denen y und z ungeändert bleiben, kann man deuten als Drehungen in der x_0, x_1-Ebene im Minkowskischen imaginären vierdimensionalen Raume um einen imaginären Winkel $i\cdot\psi$, der mit der*

Relativgeschwindigkeit v der beiden LORENTZ*-Systeme durch die Beziehung zusammenhängt:*

$$\operatorname{tg} i\psi = i \cdot \frac{v}{c} \cdot \quad —$$

Doch kehren wir zu den allgemeinen homogenen LORENTZtransformationen (5) zurück. Für ihre Koeffizienten ergeben sich über den Zusatz 1 hinaus noch weitere Einschränkungen aus der Invarianzforderung (4):

$$x_0'^2 + x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 \equiv x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

durch Vergleichung entsprechender Glieder auf beiden Seiten, genau wie sich bei Raumtransformationen in dieser Weise die „Orthogonalitätsbedingungen" für die Koeffizienten ergeben [vgl. (2b′) S. 14], deren völliges Analogon hier diese Beziehungen darstellen, weshalb wir auch diesen Namen beibehalten.

Zusatz 2. — *Zwischen den 16 Koeffizienten der homogenen* LORENTZ*-Transformationen* (5) *bestehen die 10 „Orthogonalitätsbedingungen"*

$$6) \qquad \sum_{\lambda=0}^{3} a_{\lambda i}\, a_{\lambda \varkappa} = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq \varkappa \\ 1 & \text{„ } \quad i = \varkappa \end{cases} \qquad (i,\ \varkappa = 0, 1, 2, 3),$$

so daß nur 6 der Größen $a_{i\varkappa}$ unabhängig von einander sind, entsprechend den 6 Freiheitsgraden der LORENTZ*-Systeme mit gemeinsamem Raumzeitanfangspunkt [vgl. S. 104].*

Diese Formeln (6) liefern sogleich geeignete Multiplikatoren für die Gleichungen (5), wenn man diese nach x_0, x_1, x_2, x_3 auflösen will. Die Durchführung der Rechnung liefert uns den folgenden

Satz 3. — *Die Auflösungen der Gleichungen* (5) *nach den Größen x_0, x_1, x_2, x_3 lauten:*

$$5') \qquad \begin{aligned} x_0 &= a_{00}\, x_0' + a_{10}\, x_1' + a_{20}\, x_2' + a_{30}\, x_3' \\ x_1 &= a_{01}\, x_0' + a_{11}\, x_1' + a_{21}\, x_2' + a_{31}\, x_3' \\ x_2 &= a_{02}\, x_0' + a_{12}\, x_1' + a_{22}\, x_2' + a_{32}\, x_3' \\ x_3 &= a_{03}\, x_0' + a_{13}\, x_1' + a_{23}\, x_2' + a_{33}\, x_3', \end{aligned}$$

und es gelten daher wegen (4) *auch die Gleichungen:*

$$6') \qquad \sum_{\lambda=0}^{3} a_{i\lambda}\, a_{\varkappa\lambda} = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq \varkappa \\ 1 & \text{„ } \quad i = \varkappa \end{cases} \qquad (i,\ \varkappa = 0, 1, 2, 3)$$

(*Zweite Form der Orthogonalitätsbedingungen*).

Die Symmetrie, welche zwischen den Gleichungen (5) und (5′) besteht, gestattet uns, sie zusammenzufassen in das folgende Schema:

5″)

	x_0	x_1	x_2	x_3
x_0'	a_{00}	a_{01}	a_{02}	a_{03}
x_1'	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}
x_2'	a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{23}
x_3'	a_{30}	a_{31}	a_{32}	a_{33}

Dieses gestattet uns alle Male, wenn wir eine der Größen x oder x' durch die Größen der anderen Art ausdrücken wollen, die dazu notwendigen Koeffizienten sofort anzugeben. —

Für die Determinante dieses Koeffizientenschemas ergibt sich, immer in voller Analogie mit den Verhältnissen bei einer Drehung im gewöhnlichen dreidimensionalen Raume, nach dem Determinantenmultiplikationssatze unter Benutzung der Gleichungen (6) bzw. (6′):

$$\mathrm{A}^2 = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

und daher folgt der erste Teil des folgenden

Zusatz. — *Die Determinante* A *der Transformationsgleichungen* (5) *oder auch* (5′) *ist:*

$$7) \qquad \mathrm{A} \equiv \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1,$$

wenigstens wenn die Achsenkreuze der beiden Lorentz*-Systeme gleichstimmig sind, und jedes Element* $a_{i\varkappa}$ *von* A *ist identisch mit seiner Unterdeterminante* $A_{i\varkappa}$ *(dritter Ordnung):*

$$8) \qquad a_{i\varkappa} = A_{i\varkappa} \qquad (i, \varkappa = 0, 1, 2, 3).$$

Diese letztere Tatsache ergibt sich leicht, wenn man die Gleichungen (5) nach den bekannten Regeln mittels Determinanten auflöst. Dann folgt nämlich:

$$x_\varkappa = \frac{A_{0\varkappa} x_0' + A_{1\varkappa}' x_1' + A_{2\varkappa}' x_2' + A_{3\varkappa}' x_3'}{\mathrm{A}} \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, 3),$$

und die Vergleichung dieser Auflösungen mit den Gleichungen (5′) liefert unter Rücksicht auf (7) sofort die Beziehungen (8).

Auch in der imaginären Minkowskischen Welt kann man jetzt „Vektoren“ definieren, und zwar geschieht das in voller Analogie mit unserem früheren Vorgehen:

Definition von Vierervektoren. — *In der imaginären vierdimensionalen Welt bezeichnet man als Vierervektor (Vektor erster Art) den Inbegriff von 4 auf ein System* (x_0, x_1, x_2, x_3) *bezogenen Größen* X_0, X_1, X_2, X_3 *(wovon* X_0 *imaginär), die sich beim Uebergang zu anderen Systemen wie Relativkoordinaten transformieren, d. h. nach den Gesetzen homogener* Lorentz*-Transformationen, also nach dem Schema* (5″).

Nicht die Komponenten X, Y, Z, T selber einer Minkowskischen Kraft im früheren Sinne sind jetzt auch die Komponenten eines Vierervektors in diesem neuen Sinne, sondern erst die Größen

$$X_0 = ic \cdot T, \qquad X_1 = X, \qquad X_2 = Y, \qquad X_3 = Z$$

bilden den „imaginären Vektor der Minkowskischen Kraft.“

Nun gibt es im Raume von 4 Dimensionen außer diesen Vierervektoren oder Vektoren erster Art auch noch andere Vektoren. — Um diese einzuführen erinnern wir uns wohlbekannter Dinge im gewöhn-

lichen dreidimensionalen Raume. Es sei dort ein Vektor gegeben, wie wir ihn in § 2 definiert haben, z. B. eine Kraft, bestimmt durch ihre 3 Komponenten X, Y, Z in einem rechtwinkligen Systeme (x, y, z). Alsdann bezeichnet man in der Mechanik den Ausdruck

$$D_{yz} = y\,Z - z\,Y,$$

den man sich auch aus 2 Vektoren gebildet denken kann, nämlich aus $K\,(X, Y, Z)$ und $r\,(x, y, z)$, als das „Drehungsmoment jener Kraft in bezug auf die y, z-Ebene", und entsprechend bei den beiden anderen Koordinatenebenen. Gehen wir dann zu einem gegen jenes gedrehten System (x', y', z') über, mittels einer Substitution, die wir jetzt sogleich in Form eines solchen Schemas analog (5″) schreiben:

9)

	x	y	z
x'	α_1	α_2	α_3
y'	β_1	β_2	β_3
z'	γ_1	γ_2	γ_3

so folgt für das erste der neuen Drehungsmomente, da die Kraftkomponenten infolge des Vektorcharakters sich nach demselben Schema transformieren [vgl. (3b) S. 15]:

$$D'_{y'z'} = (\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z)(\gamma_1 X + \gamma_2 Y + \gamma_3 Z) - (\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z)(\beta_1 X + \beta_2 Y + \beta_3 Z),$$

und das ist:

$$D'_{y'z'} = \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} D_{yz} + \begin{vmatrix} \beta_3 & \beta_1 \\ \gamma_3 & \gamma_1 \end{vmatrix} D_{zx} + \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} D_{xy}.$$

Infolge des bekannten Satzes, daß auch in der Determinante jenes Koeffizientenschemas (9) jedes Element gleich seiner Unterdeterminante ist, können wir dafür auch schreiben:

$$D'_{y'z'} = \alpha_1 D_{yz} + \alpha_2 D_{zx} + \alpha_3 D_{xy},$$

und analog $D'_{z'x'}$ und $D'_{x'y'}$ — also auch die Drehungsmomente transformieren sich bei einer Drehung des Systems genau nach demselben Schema (9) wie die Kräfte und die Koordinaten. Die Drehungsmomente bilden sonach wieder einen Vektor im alten Sinne. Das führt dann in bekannter Weise dazu, auch Drehungsmomente geometrisch durch Linien von bestimmter Länge und Richtung darzustellen. Dann entspricht D_{yz} einer Linie parallel der x-Achse, usw., und so kommt man denn dazu, D_x anstatt D_{yz} zu schreiben und von Drehungsmomenten „in bezug auf eine Achse" anstatt besser „in bezug auf eine Ebene" zu sprechen.

Bilden wir jetzt mit zwei Vierervektoren X_0, X_1, X_2, X_3 und $\Xi_0, \Xi_1, \Xi_2, \Xi_3$ in unserer imaginären vierdimensionalen Welt den Drehungsmomenten analoge Ausdrücke, also z. B.

$$\Delta_{23} = X_2 \Xi_3 - X_3 \Xi_2,$$

so folgt für die entsprechenden Größen in einem anderen Bezugssystem (x'_0, x'_1, x'_2, x'_3), zu dem wir mittels der Gleichungen (5″) übergehen:

$$\Delta'_{23} = (a_{20} X_0 + a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + a_{23} X_3)(a_{30} \Xi_0 + a_{31} \Xi_1 + a_{32} \Xi_2 + a_{33} \Xi_3) - (a_{30} X_0 + a_{31} X_1 + a_{32} X_2 + a_{33} X_3)(a_{20} \Xi_0 + a_{21} \Xi_1 + a_{22} \Xi_2 + a_{23} \Xi_3),$$

und das ist, ausgerechnet:

$$\Delta'_{23} = \begin{vmatrix} a_{20} & a_{21} \\ a_{30} & a_{31} \end{vmatrix} \Delta_{01} + \begin{vmatrix} a_{20} & a_{22} \\ a_{30} & a_{32} \end{vmatrix} \Delta_{02} + \begin{vmatrix} a_{20} & a_{23} \\ a_{30} & a_{33} \end{vmatrix} \Delta_{03} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Delta_{23} + \begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} \Delta_{31} + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \Delta_{12},$$

oder allgemein:

10) $$\Delta'_{ix} = A^{ix}_{01} \Delta_{01} + A^{ix}_{02} \Delta_{02} + A^{ix}_{03} \Delta_{03} + A^{ix}_{23} \Delta_{23} + A^{ix}_{31} \Delta_{31} + A^{ix}_{12} \Delta_{12},$$

wenn diese A mit 4 Indizes die zweireihigen Unterdeterminanten von A sind [vgl. (7)]:

11) $$A^{ix}_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} a_{i\mu} & a_{i\nu} \\ a_{x\mu} & a_{x\nu} \end{vmatrix}$$

Diese Unterdeterminanten sind nun aber nicht gleich Elementen von A selber, es stellt also das in (10) enthaltene Transformationsgesetz der Größen Δ ein neues Gesetz dar, wie das ja auch schon äußerlich dadurch in die Erscheinung tritt, daß hier eben 6 Größen (nicht 4) transformiert werden, entsprechend den 6 Koordinatenebenen im vierdimensionalen Raume. (Mehr als 6 Größen Δ braucht man nicht zu betrachten, da $\Delta_{xi} = -\Delta_{ix}$ ist.)

Größen, welche sich nun nach diesem neuen Gesetz transformieren, nennt man Sechservektoren oder Vektoren zweiter Art. Während also im dreidimensionalen Raume, wie wir sahen, die Vektoren zweiter Art (wie Drehungsmomente) zusammenfielen mit denen erster Art, tun sie das im vierdimensionalen Raume nicht mehr, sondern stellen etwas Neues dar. — Man könnte nun aber nach ähnlichen Prinzipien auch Vektoren dritter Art zu bilden versuchen. Diese würden dann auch im vierdimensionalen Raume wegen (8) mit Vektoren einfacherer Art, nämlich den Vierervektoren, identisch werden, so daß man also in dieser Weise nur zu den Vektoren erster und zweiter Art, den Vierer- und Sechservektoren kommt.

Um das Transformationsgesetz (10) der Sechservektoren noch näher zu untersuchen, wollen wir nach der Auflösung dieser Gleichungen (10) nach den Δ fragen, welche also dem Uebergang umgekehrt von (x'_0, x'_1, x'_2, x'_3) zu (x_0, x_1, x_2, x_3) entsprechen. Bei diesen Uebergange vertauschen sich aber gegen früher nach dem Schema (5′) nur die beiden Indizes bei sämtlichen Koeffizienten a_{ix}, und so erhalten wir fast ohne jede Rechnung:

10′) $$\Delta_{\mu\nu} = A^{01}_{\mu\nu} \Delta'_{01} + A^{02}_{\mu\nu} \Delta'_{02} + A^{03}_{\mu\nu} \Delta'_{03} + A^{23}_{\mu\nu} \Delta'_{23} + A^{31}_{\mu\nu} \Delta_{31} + A^{12}_{\mu\nu} \Delta'_{12},$$

und diese Gleichungen (10) und (10′) kann man dann wieder zusammenfassen in ein Schema von der mehrfach betrachteten Art, und so ergibt sich denn die folgende

Definition von Sechservektoren. — *6 auf ein imaginäres Minkowskisches Weltsystem (x_0, x_1, x_2, x_3) bezügliche Größen $F_{01}, F_{02}, F_{03}, F_{23}, F_{31}, F_{12}$ (von denen die 3 ersten imaginär sind) bezeichnet man als Komponenten*

eines Sechservektors (Vektors zweiter Art), wenn sie sich beim Uebergange zu einem anderen Systeme (x_0', x_1', x_2', x_3') *linear und homogen mit Koeffizienten transformieren, welche die zweireihigen Unterdeterminanten von* A *sind [vgl. (7)], nach folgendem Schema:*

10″)

	F_{01}	F_{02}	F_{03}	F_{23}	F_{31}	F_{12}
F_{01}'	A_{01}^{01}	A_{02}^{01}	A_{03}^{01}	A_{23}^{01}	A_{31}^{01}	A_{12}^{01}
F_{02}'	A_{01}^{02}	A_{02}^{02}	A_{03}^{02}	A_{23}^{02}	A_{31}^{02}	A_{12}^{02}
F_{03}'	A_{01}^{03}	A_{02}^{03}	A_{03}^{03}	A_{23}^{03}	A_{31}^{03}	A_{12}^{03}
F_{23}'	A_{01}^{23}	A_{02}^{23}	A_{03}^{23}	A_{23}^{23}	A_{31}^{23}	A_{12}^{23}
F_{31}'	A_{01}^{31}	A_{02}^{31}	A_{03}^{31}	A_{23}^{31}	A_{31}^{31}	A_{12}^{31}
F_{12}'	A_{01}^{12}	A_{02}^{12}	A_{03}^{12}	A_{23}^{12}	A_{31}^{12}	A_{12}^{12}

$$A_{\mu\nu}^{iz} = \begin{vmatrix} a_{i\mu} & a_{i\nu} \\ a_{z\mu} & a_{z\nu} \end{vmatrix}$$

Wie wir bereits in § 2 das Wesen von Vektoren in der Art erblickten, wie sie sich auf andere Systeme transformierten, so unterscheiden wir auch hier die verschiedenen Arten von Vektoren nach den verschiedenen Arten, wie sie sich bei Uebergängen zu anderen Bezugssystemen transformieren. — Bemerkt sei noch, daß auch von sämtlichen in (10″) auftretenden Größen die Regel gilt, daß die mit einem Index 0 rein imaginär, alle übrigen aber reell sind.

Von diesen hier eingeführten Vektoren wollen wir nun nach Minkowski noch eine Anwendung machen auf die Grundgleichungen der H. A. Lorentzschen Elektronentheorie: Lorentz nimmt das Bestehen der folgenden erweiterten Maxwellschen Gleichungen an:

12 a)
$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \varrho \\ \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{1}{c}\frac{\partial X}{\partial t} + \varrho \cdot u \\ \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{c}\frac{\partial Y}{\partial t} + \varrho \cdot v \\ \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{1}{c}\frac{\partial Z}{\partial t} + \varrho \cdot w \end{cases}$$

12 b)
$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{1}{c}\frac{\partial L}{\partial t} \\ \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{1}{c}\frac{\partial M}{\partial t} \\ \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{1}{c}\frac{\partial N}{\partial t}, \end{cases}$$

wo, wie auch früher [vgl. S. 81], X, Y, Z die Komponenten der elektrischen, L, M, N der magnetischen Feldstärke bedeuten, und u, v, w die Geschwindigkeitskomponenten der geladenen Materie, und ϱ die elektrische Raumdichte bedeutet.

In diese Gleichungen wollen wir zunächst die Minkowskischen imaginären Raumzeitkoordinaten

$$x_0 = ic \cdot t, \qquad x_1 = x, \qquad x_2 = y, \qquad x_3 = z$$

einführen und dann weiter noch neue Bezeichnungen, indem wir

an Stelle von: iX, iY, iZ, L, M, N, $i\varrho$, ϱu, ϱv, ϱw hinfort schreiben: f_{01}, f_{02}, f_{03}, f_{23}, f_{31}, f_{12}, ϱ_0, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3.

Setzen wir dann weiter noch fest, daß allgemein $f_{\varkappa i} = -f_{i\varkappa}$ und $f_{ii} = 0$ sein soll, so nehmen jetzt jene Gleichungen die folgende durch ihre Symmetrie bemerkenswerte Form an:

13a)
$$\begin{cases} \frac{\partial f_{00}}{\partial x_0} + \frac{\partial f_{01}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{02}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{03}}{\partial x_3} = \varrho_0 \\ \frac{\partial f_{10}}{\partial x_0} + \frac{\partial f_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_3} = \varrho_1 \\ \frac{\partial f_{20}}{\partial x_0} + \frac{\partial f_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_3} = \varrho_2 \\ \frac{\partial f_{30}}{\partial x_0} + \frac{\partial f_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{33}}{\partial x_3} = \varrho_3 \end{cases}$$

13b)
$$\begin{cases} 0 + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial f_{23}}{\partial x_0} + 0 + \frac{\partial f_{30}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{02}}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial f_{13}}{\partial x_0} + \frac{\partial f_{30}}{\partial x_1} + 0 + \frac{\partial f_{01}}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial f_{12}}{\partial x_0} + \frac{\partial f_{20}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{01}}{\partial x_2} + 0 = 0 \end{cases}$$

Die Gleichungen jedes dieser beiden Systeme gehen auseinander durch zyklische Vertauschung der Indizes 0, 1, 2, 3 hervor und die einzelnen Glieder z. B. der ersten Gleichungen jedes Systems aus dem ersten Gliede ebenfalls durch zyklische Vertauschung, einmal unter Festhalten des ersten Index 0, das andere Mal unter Uebergehung des Index 0.

Nunmehr denken wir uns neben dem Bezugssystem (x_0, x_1, x_2, x_3) noch ein neues System (x_0', x_1', x_2', x_3') nach dem Schema (5″) eingeführt und sehen also hinfort die Größen f und ϱ als Funktionen dieser neuen Variablen an. Ist dann φ irgendeine der Funktionen f, so ist also

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_0'} a_{0\nu} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1'} a_{1\nu} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2'} a_{2\nu} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3'} a_{3\nu}.$$

Hier setzen wir nun, um zunächst die einzelnen Gleichungen (13 a) zu transformieren, $\varphi = f_{\lambda\nu}$ und summieren die entstehenden Ausdrücke nach ν über die Werte 0, 1, 2, 3. So folgt, wenn wir nach den Differentiationsvariablen ordnen, für $\lambda = 0, 1, 2, 3$:

$$\frac{\partial}{\partial x_0'}\left(\sum_{\nu=0}^{3} a_{0\nu} f_{\lambda\nu}\right) + \frac{\partial}{\partial x_1'}\left(\sum_{\nu=0}^{3} a_{1\nu} f_{\lambda\nu}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2'}\left(\sum_{\nu=0}^{3} a_{2\nu} f_{\lambda\nu}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3'}\left(\sum_{\nu=0}^{3} a_{3\nu} f_{\lambda\nu}\right) = \varrho_\lambda.$$

Wenn wir nun diese Gleichungen mit $a_{i\lambda}$ multiplizieren und dann alle diese Produkte für $\lambda = 0, 1, 2, 3$ addieren, so erhalten wir eine Gleichung von der Form:

14)
$$\frac{\partial f_{i0}'}{\partial x_0'} + \frac{\partial f_{i1}'}{\partial x_1'} + \frac{\partial f_{i2}'}{\partial x_2'} + \frac{\partial f_{i3}'}{\partial x_3'} = \varrho_i' \qquad (i = 0, 1, 2, 3)$$

wo

15)
$$\varrho_i' = a_{i0}\varrho_0 + a_{i1}\varrho_1 + a_{i2}\varrho_2 + a_{i3}\varrho_3$$

und

$$f_{i\varkappa}' = a_{i0}\sum_{\nu=0}^{3} a_{\varkappa\nu} f_{0\nu} + a_{i1}\sum_{\nu=0}^{3} a_{\varkappa\nu} f_{1\nu} + a_{i2}\sum_{\nu=0}^{3} a_{\varkappa\nu} f_{2\nu} + a_{i3}\sum_{\nu=0}^{3} a_{\varkappa\nu} f_{3\nu}.$$

Ordnen wir hier in dem letzten Ausdruck noch nach den Größen $f_{01}, f_{02}, f_{03}, f_{23}, f_{31}, f_{12}$, so folgt unter Rücksicht auf $f_{\varkappa i} = -f_{i\varkappa}$ und $f_{ii} = 0$:

$$f'_{i\varkappa} = \begin{vmatrix} a_{i0} & a_{i1} \\ a_{\varkappa 0} & a_{\varkappa 1} \end{vmatrix} f_{01} + \begin{vmatrix} a_{i0} & a_{i2} \\ a_{\varkappa 0} & a_{\varkappa 2} \end{vmatrix} f_{02} + \begin{vmatrix} a_{i0} & a_{i3} \\ a_{\varkappa 0} & a_{\varkappa 3} \end{vmatrix} f_{03}$$
$$+ \begin{vmatrix} a_{i2} & a_{i3} \\ a_{\varkappa 2} & a_{\varkappa 3} \end{vmatrix} f_{23} + \begin{vmatrix} a_{i3} & a_{i1} \\ a_{\varkappa 3} & a_{\varkappa 1} \end{vmatrix} f_{31} + \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} \\ a_{\varkappa 1} & a_{\varkappa 2} \end{vmatrix} f_{12}$$

oder schließlich:

16) $$f'_{i\varkappa} = A^{i\varkappa}_{01} f_{01} + A^{i\varkappa}_{02} f_{02} + A^{i\varkappa}_{03} f_{03} + A^{i\varkappa}_{23} f_{23} + A^{i\varkappa}_{31} f_{31} + A^{i\varkappa}_{12} f_{12}.$$

Es gelten also wieder in dem neuen imaginären Minkowskischen Bezugssystem den Gleichungen (13 a) völlig entsprechende Gleichungen [siehe (14)], wenn wir die Größen ϱ_i nach Art von Vierervektoren und die Größen $f_{i\varkappa}$ nach Art von Sechservektoren transformieren, denn die Gleichungen (15) und (16) stimmen tatsächlich mit den diesen Vektorenarten charakteristischen Transformationsgleichungen überein [vgl. (5″) und (10″)]. — Ganz entsprechend lassen sich auch die Gleichungen (13 b) behandeln, auch hier ergibt sich, daß, wenn wir die Größen $f_{i\varkappa}$ nach Art von Sechservektoren transformieren, für die transformierten Größen im neuen Bezugssystem die den Gleichungen (13 b) völlig entsprechenden Gleichungen gelten, und daraus ziehen wir denn, wie das in § 9 in einem ähnlichen Falle eingehender begründet ist, den Schluß, daß die transformierten Größen im neuen System auch physikalisch dieselbe Bedeutung haben wie die ursprünglichen im Ausgangssystem.

Resultat. — *Sind in einem Lorentz-System die elektrischen und magnetischen Feldstärken X, Y, Z und L, M, N und ebenso die elektrische Raumdichte ϱ und die Geschwindigkeitskomponenten u, v, w der geladenen Materie bestimmt, und definiert man diese Größen für andere Lorentz-Systeme, indem man die Größen*

$$iX, \quad iY, \quad iZ, \quad L, \quad M, \quad N$$

als die Komponenten eines Sechservektors $(f_{i\varkappa})$ und

$$\varrho, \quad \varrho u, \quad \varrho v, \quad \varrho w$$

als die Komponenten eines Vierervektors (ϱ_i) transformiert, so bestehen in allen diesen Systemen zwischen jenen Größen Gleichungen von genau derselben Form, nämlich die Maxwell-Lorentzschen Gleichungen (13 a) *und* (13 b). — *Diese sind dann also invariant gegenüber allen Lorentz-Transformationen, der Forderung des Einsteinschen Relativitätsprinzips ist Genüge geschehen.*

Wie wir also bereits in der klassischen Mechanik durch passende Wahl der Definitionen, vor allem der Gesetze für die Uebertragung auf andere Systeme, gewissen Invarianzforderungen genügen konnten, genau so ist es uns hier gelungen, die Grundgleichungen der Lorentzschen Elektrodynamik dem Einsteinschen Relativitätsprinzip unterzuordnen, und zwar können wir hier eben diese Uebertragungsregeln in der kurzen Form aussprechen, daß wir sagen, gewisse Größen sollen wie Vierervektoren oder aber wie Sechservektoren transformiert werden.

Auf einen charakteristischen Unterschied, der hier in der Elektrodynamik gegenüber der Minkowskischen Mechanik besteht, sei noch hingewiesen. Dort wie hier handelt es sich darum, die dreidimensionale Physik der relativistischen Betrachtungsweise anzupassen, die in dem

vierdimensionalen Raume operiert. Das geschieht in der Minkowskischen Mechanik dadurch, daß man die 3-Zahl der Komponenten (X, Y, Z) noch durch Hinzunahme einer vierten Größe (T) auf die 4-Zahl ergänzte und so aus ihr einen Vierervektor machte. — Hier in der Elektrodynamik hat man dagegen die 6 Komponenten der elektrischen und magnetischen Feldstärke zu einem Sechservektor zusammengefaßt, und in dieser Zusammenfassung in eine höhere Einheit kommt wieder zum Ausdruck, was schon am Schluß von § 9 besprochen wurde, daß die Unterscheidung zwischen elektrischen und magnetischen Kräften keine ein für allemal feststehende ist, es kommt vielmehr auf das Bezugssystem an, von dem wir den „Sechservektor der elektrischen und magnetischen Kraft" betrachten, ob er mehr seine elektrische oder seine magnetische Seite zeigt.

Aehnlich ist auch durch die Vereinigung von elektrischer Raumdichte und Geschwindigkeitskomponenten u, v, w in einen Vierervektor (der sogenannten „Viererdichte") die Raumdichte in Abhängigkeit gesetzt von dem Bewegungszustande des Bezugssystems.

Zweiter Teil.

Die allgemeine Relativitätstheorie.

§ 1.

Vorbemerkungen. Das EINSTEINsche Aequivalenzprinzip.

In der Einleitung haben wir das Relativitätsprinzip in seiner allgemeinsten Form ausgesprochen: Bewegung ist etwas Relatives, nichts Absolutes — nur von der Bewegung von Körpern gegeneinander hat es einen Sinn zu sprechen — ob wir einen der Körper und welchen wir als ruhend ansehen, ist völlig in unser Belieben gestellt — es gibt keine Erscheinung, die uns ein größeres Recht verliehe, den einen wie einen anderen als ruhend anzusehen. — Aus diesem Prinzipe folgerten wir, daß die Naturgesetze invariant sein müßten gegenüber beliebigen Bewegungen der Bezugssysteme gegeneinander.

In dem ersten Teile haben wir nun die sich daraus ergebende Aufgabe, solche invarianten Naturgesetze aufzustellen, wesentlich eingeschränkt, indem wir nur Invarianz gegenüber geradlinig gleichförmigen Bewegungen forderten und außerdem alle Gravitationswirkungen zunächst ausschlossen. — Um dieses so eingeschränkte Problem zu lösen, brachte, wie oben näher ausgeführt wurde, EINSTEIN die Vorstellung von der universellen Zeit zum Opfer und es gelang ihm dann unter Zuhilfenahme zweier weiterer Prinzipien, nämlich erstlich des Prinzips von der Homogenität des Raumes und der Zeit und sodann des Prinzips von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit, das gesteckte Ziel zu erreichen. Doch da die alten Gesetze der klassischen Mechanik bereits bei Uebergängen zu geradlinig gleichförmig bewegten Systemen invariant waren (GALILEIsches Relativitätsprinzip, S. 19), so war durch die EINSTEINsche spezielle Relativitätstheorie in der angegebenen Richtung ein Fortschritt nur in der Elektrodynamik erreicht, diese war dem speziellen Relativitätsprinzip neu unterworfen, was allerdings eine Revision des Relativitätsprinzips der klassischen Mechanik und seine Anpassung an die neuen Vorstellungen bedingte [vgl. oben § 11]. — Der Hauptschritt blieb aber noch zu tun, die Ausdehnung der Untersuchungen auf beliebig gegeneinander bewegte Bezugssysteme und die Einbeziehung der Gravitationswirkungen in die Betrachtungen.

Diese Ausdehnung der Theorie führte EINSTEIN zu dem überraschenden Ergebnis, daß sich die obige Forderung der Invarianz der

Naturgesetze nicht voll aufrecht erhalten ließe, und daß das starre Invarianzprinzip durch ein anderes weniger forderndes Prinzip ersetzt werden müsse. — Das soll nun im folgenden auseinandergesetzt werden.

Wenn es sich um die Erweiterung der im ersten Teile auseinandergesetzten Theorie auf beliebig gegeneinander bewegte Systeme handelt, liegt nun zunächst der Gedanke sehr nahe, die Invarianz wieder dadurch zu erreichen zu suchen, daß man die Systeme mit geeigneten Maßstäben und Uhren ausstattet. Da nun auch jede beschleunigte und eventuell auf gekrümmter Bahn erfolgende Bewegung, wenn man sich auf kleine Zeiträume und kleine Raumgebiete beschränkt, als gleichförmig und geradlinig angesehen werden kann, könnte man auf die Vermutung kommen, daß sich diese Instrumentarien vielleicht so einrichten ließen, daß wenigstens in solchen kleinen Raumzeitgebieten die spezielle Relativitätstheorie gilt, d. h. der von ihr geforderte Zusammenhang zwischen Längen- und Zeitmessungen in beiden Systemen besteht.

Um diesen Gedanken auf seine Zulässigkeit zu prüfen, wollen wir ihn einmal bei zwei Systemen durchzuführen suchen, die um ihre gemeinsame z- bzw. z'-Achse gegeneinander, etwa mit gleichförmiger Geschwindigkeit ω, rotieren. Zur Unterscheidung nennen wir das eine (x, y, z, t) das „ruhende", das andere (x', y', z', t') das „rotierende" System; letzteres (oder richtiger seine x', y'-Ebene) wollen wir uns etwa durch eine rotierende Glasplatte dargestellt denken. Nun sei in der x, y-Ebene des festen Systems ein Kreis um den Anfangspunkt beschrieben, etwa mit dem Radius 1, und diesen Kreis betrachte nun ein Beobachter im rotierenden System durch die Glasplatte hindurch. Unstreitig wird auch er einen Kreis wahrnehmen — das folgt aus Symmetriegründen. Aber wie groß erscheint ihm der Umfang dieses Kreises, wenn er ihn ausmißt, als wenn in kleinen Raumzeitgebieten die Gesetze der speziellen Relativitätstheorie gültig wären? Zur Entscheidung dieser Frage denken wir uns den Kreis ersetzt durch einen Polygonzug, oder, konkreter ausgedrückt, aus lauter Stäbchen gelegt, sagen wir von je der Länge $s = \frac{1}{100}$ der zugrundegelegten Längeneinheit. Dann werden wir angenähert $200\,\pi$ solcher Stäbchen brauchen. Sehen wir nun, während z. B. die x'-Achse eines dieser Stäbchen überstreicht, die Bewegung des kleinen in Betracht kommenden Bezirks auf der Glasplatte als geradlinig gleichförmig in der Stäbchenrichtung an, so wird das Stäbchen, gemessen nach den früher auseinandergesetzten Prinzipien vom rotierenden Systeme aus, eine Länge $s' < s$ besitzen [vgl. S. 69], der Kreisumfang, der angenähert durch jene $200\,\pi$ Stäbchen dargestellt wird, erscheint ihm also angenähert gleich

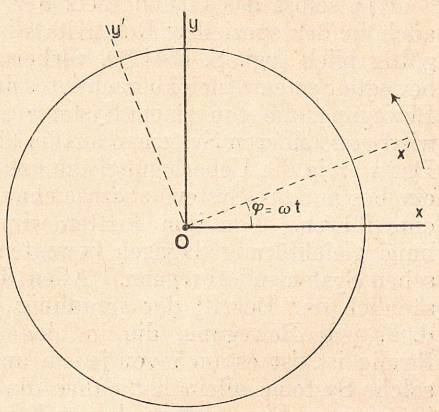


Fig. 20.

$$200\,\pi \cdot s' < 200\,\pi \cdot s = 2\,\pi.$$

Indem wir die hier willkürlich bevorzugte Zahl 100 durch immer größere ersetzen, können wir diese Schlußweise beliebig verschärfen und kommen so zu dem Resultate, daß der Beobachter im rotierenden System einen Kreis von einem *Umfange kleiner als* 2π wahrnimmt*), dagegen wird der Radius, nach denselben Prinzipien gemessen, auch für ihn *die Länge* 1 besitzen, denn er verläuft ja senkrecht zur Fortbewegungsrichtung der betreffenden Stelle der Glasplatte gegen das ruhende System [vgl. den Satz S. 69]. — Ein Kreis mit dem Radius 1 und einem Umfange kleiner als 2π ist aber unmöglich nach den uns geläufigen Vorstellungen der euklidischen Geometrie, und so lehrt dieses eine Beispiel bereits den folgenden

Satz I. — *Die Annahme, daß man beliebig bewegte, z. B. rotierende Systeme so mit Maßstäben und Uhren ausstatten kann, daß in kurzen Zeiten in jedem Teile die Gesetze der speziellen Relativitätstheorie gelten (weil die Bewegung als geradlinig gleichförmig angesehen werden kann), führt auf einen Widerspruch mit bekannten Tatsachen der euklidischen Geometrie.*

Wir sehen also, daß eine derartig einfache Uebertragung der Prinzipien der speziellen Relativitätstheorie auf den Fall gegeneinander beschleunigter Systeme nicht möglich ist, und daß man in diesem allgemeineren Falle einen vollständigen Neuaufbau der Theorie vornehmen muß.

Ja selbst das Grundgesetz der Mechanik, das Trägheitsgesetz, das auch in der speziellen Relativitätstheorie im wesentlichen unverändert gültig blieb [vgl. S. 114]**), verliert, wenn ganz beliebig gegeneinander bewegte Systeme gleichberechtigt sein sollen, jede Bedeutung, denn eine Bewegung, die von einem Systeme aus geradlinig gleichförmig erscheint, wird von anderen Systemen aus im allgemeinen nicht mehr so erscheinen. Das war ja die Ueberlegung, die uns zwang, dem Trägheitsgesetz zuliebe ein bestimmtes System auszuzeichnen, das „Galileische Grundsystem" einzuführen. Von ihm durften wir dann höchstens zu anderen geradlinig gleichförmig dagegen bewegten Systemen, den übrigen „Galileischen Systemen" übergehn. Allen diesen Systemen gegenüber ist tatsächlich der Begriff der geradlinig gleichförmigen Bewegung invariant, d. h. jede Bewegung, die in einem dieser Systeme geradlinig gleichförmig ist, ist es auch von jedem anderen dieser Systeme aus***). Für solche Systeme allein hat daher die Aussage des Trägheitsgesetzes einen bestimmten Sinn und auch nur bei Anwendung auf diese Galileischen

---

*) Die wahrgenommene Länge beträgt genauer $2\pi\sqrt{1-\frac{\omega^2}{c^2}}$, da die Winkelgeschwindigkeit ω zugleich die lineare Geschwindigkeit (v) der Punkte des Einheitskreises ist.

**) Nur der Begriff der Geschwindigkeit erfuhr eine Aenderung [vgl. S. 44]. Sie entsprang der neuen Einsteinschen Auffassung von der Zeit.

***) Analytisch kommt diese Tatsache darin zum Ausdruck, daß die Transformationsgleichungen zwischen solchen Systemen (Galilei-Transformationen, vgl. (5) S. 19) die Zeit t nur linear enthalten, so daß die Bewegung der Systeme auf die Beschleunigungen (zweiten Differentialquotienten) ohne Einfluß ist. Nehmen wir z. B. eine gleichförmige Bewegung längs der x- oder x'-Achse an, so daß

$x' = x - vt$, $y' = y$, $z' = z$ ist, so folgt: $\frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y'}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z'}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2}$;

mit den Beschleunigungen in dem einen System verschwinden also auch die im anderen. — Das wird aber sofort anders, sobald beschleunigte Bewegungen der Systeme gegeneinander vorliegen, und die Transformationsgleichungen daher auch Glieder zweiter oder höherer Ordnung in t enthalten.

Systeme konnten wir daher dieses Gesetz, wie oben ausgeführt wurde, zur Definition der „Kräfte“ benutzen, wenigstens wenn wir den Kräften eine selbständige Existenz zuschreiben, in ihnen etwas den Versuchsbedingungen Eigentümliches und daher begrifflich vom Bezugssystem Unabhängiges erblicken wollen. Wir haben ja oben gesehen, wie die Anwendung der Newtonschen Prinzipien auf ein gegen ein Galileisches System rotierendes System auf falsche Kräfte führte; außer den „wirklichen“ traten noch die sogenannten Zentrifugal-Kräfte, fiktive Kräfte, auf [vgl. Satz 5, S. 24]. Wenn wir an der Vorstellung von der selbständigen, objektiven Existenz der Kräfte festhalten, so müssen wir also die aus dem Trägheitsgesetz abgeleitete Newtonsche Kraftdefinition auf die speziellen Galileischen Bezugssysteme beschränken, wir müssen uns vor der Anwendung auf falsche Systeme hüten. — Das widerspricht aber einer Auffassung, derzufolge alle Systeme gleichberechtigt sein sollen, „falsche“ Systeme also überhaupt nicht existieren.

Erheben wir aber diese Gleichberechtigung aller Systeme zum höchsten Prinzipe und halten an der Newtonschen Definition der Kräfte als Produkte aus der Masse und den Beschleunigungen fest, so verlieren die Kräfte damit jede objektive Bedeutung, sie werden zu bloßen Attributen der Bewegung, die noch dazu von der Wahl des Bezugssystemes abhängen. Ja es ist unschwer einzusehen, daß wir bei passender Wahl des Bezugssystems die so definierten Kräfte stets zum Verschwinden bringen können: Betrachten wir einmal von irgendeinem Systeme aus eine ganz beliebige (evtl. krummlinige) beschleunigte Bewegung eines Massenpunktes m, so daß also von jenem Systeme aus „Kräfte“ vorhanden zu sein scheinen. Dann kann man doch augenscheinlich immer andere Bezugssysteme einführen, von denen aus jene Bewegung geradlinig gleichförmig erscheint; lassen wir z. B. ein System mit dem betrachteten Massenpunkt mitgehen, so ruht er in diesem Systeme sogar (etwa im Anfangspunkt), und von diesem Systeme aus betrachtet, werden dann keine Kräfte auf m einzuwirken scheinen, wohl aber wird, wenn wir jetzt dieses System als ruhend ansehen, das ursprüngliche System bewegt erscheinen. Daher können wir sagen:

Satz 2. — *Es sei gegeben irgendein Bezugssystem* $\mathfrak{L}$ *und eine in Bezug auf dasselbe beliebig beschleunigte Bewegung eines Massenpunktes* m. *Aldann können wir diese Bewegung nach Belieben ansehen als eine Bewegung in einem Kraftfelde bei ruhendem System* $\mathfrak{L}$ *oder aber als kräftefreie Bewegung bei bewegtem Systeme* $\mathfrak{L}$. — *Kräfte immer im ruhenden System nach Newtonscher Art definiert gedacht.*

So sehen wir also, daß dann tatsächlich der Begriff der Kraft jede objektive Bedeutung verliert; ob Kräfte vorhanden sind oder nicht, hängt ganz davon ab, welches System wir als „ruhend“ ansehen, und nach dem allgemeinen Relativitätsprinzip soll das ja ganz gleichgültig sein.

Um weiterzugehen, wollen wir zunächst diese Dinge noch an spezielleren Beispielen etwas eingehender verfolgen, und zu diesem Zwecke jetzt zwei Systeme $\mathfrak{L}\,(x, y, z)$ und $\mathfrak{L}'\,(x', y', z')$ betrachten*), deren z- bzw. z'-Achse dauernd zusammenfallen, und von denen das zweite eine konstante Beschleunigung γ gegenüber dem ersten in Richtung der z-Achse besitzt. Nun führe ein Massenpunkt m in $\mathfrak{L}$ eine Trägheitsbewegung

*) Wir dürfen bei den ganz allgemeinen Betrachtungen dieses Paragraphen an bloße Raumsysteme denken und bezüglich der Zeit die alte Auffassung von ihrem universellen Charakter zugrunde legen.

im alten Sinne, also eine geradlinig gleichförmige Bewegung aus — am einfachsten kann man ihn sich ruhend denken. — Vom Systeme $\mathfrak{L}'$ aus betrachtet wird dann m eine konstante Beschleunigung γ in Richtung der negativen z'-Achse besitzen, ein Beobachter im zweiten Laboratorium wird also, wenn er die Newtonsche Kraftdefinition benutzt, zu dem Resultate kommen, daß auf m die konstante Kraft $m \cdot \gamma$ in Richtung der negativen z'-Achse wirkt; für ihn wird sich m genau so bewegen wie in einem Schwerefelde mit der Schwerebeschleunigung γ. — So wird also diesem Beobachter in $\mathfrak{L}'$ durch die Bewegung seines Systems ein Schwerefeld vorgetäuscht — wieder eine Bestätigung dessen, daß die Newtonsche Kraftdefinition bei Anwendung auf verschiedene Systeme zu verschiedenen Resultaten führt.

Umgekehrt aber kann man auch die Wirkung eines homogenen Schwerefeldes durch Bewegung des Bezugssystems zum Verschwinden bringen. Wir brauchen nur unsere obige Schlußweise umzukehren, vom System $\mathfrak{L}'$ auszugehen und in ihm die Bewegung eines Massenpunktes m unter dem Einfluß eines Schwerefeldes (Beschleunigung γ in Richtung der negativen z'-Achse) zu betrachten, dann wird diese Bewegung von dem System $\mathfrak{L}$ aus geradlinig gleichförmig erscheinen (bzw. m wird sich in Ruhe befinden), jedenfalls wird von $\mathfrak{L}$ aus eine Trägheitsbewegung vorzuliegen scheinen, von der Wirkung des Schwerefeldes ist nichts mehr zu merken. Wir werden dafür sagen, durch Einführung des Systems $\mathfrak{L}$ hätten wir „das Schwerefeld wegtransformiert", und wir sehen, daß sich nach diesen Prinzipien *jedes homogene Gravitationsfeld wegtransformieren läßt.*

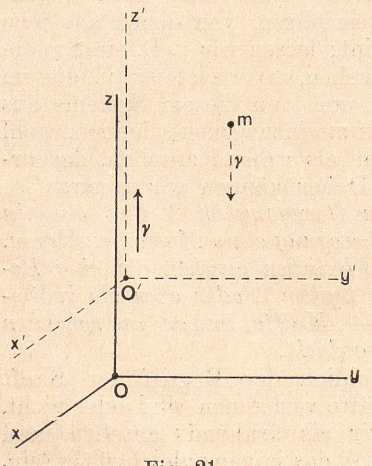


Fig. 21.

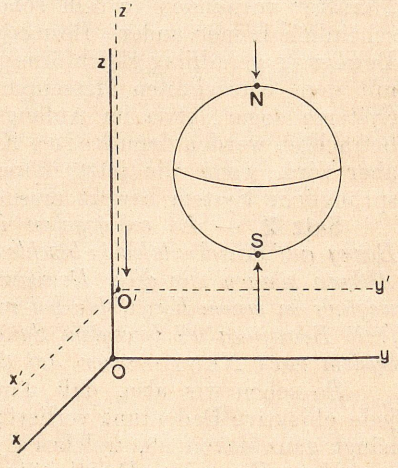


Fig. 22.

Die Beschränkung auf homogene Felder ist durchaus notwendig; denn betrachten wir einmal als Beispiel eines inhomogenen Feldes das Gravitationsfeld der Erde, so läßt sich dieses in seiner gesamten Ausdehnung mit seinen verschieden großen und vor allem verschieden gerichteten Beschleunigungen nicht wegtransformieren. Führen wir z. B. ein neues Bezugssystem ein, durch dessen Bewegungszustand gerade die am Nordpol wirkende Schwerebeschleunigung aufgehoben wird, so wird die am Südpol vorhandene dadurch augenscheinlich gerade verdoppelt; also durch Transformation auf ein und dasselbe System die Wirkung

des Schwerefeldes der Erde überall gleichzeitig zum Verschwinden zu bringen, ist unmöglich. Wir können ein Schwerefeld nur in solchen Bezirken wegtransformieren, in denen wir es als homogen ansehen, d. h. in denen wir die Schwerebeschleunigung als konstant betrachten nach Größe und Richtung.

Weshalb aber sprechen wir gerade von Gravitationsfeldern, nicht auch von anderen homogenen Kraftfeldern, wenn wir doch nach Satz 2 jede beliebige Bewegung durch Einführung eines geeigneten Bezugssystems in eine scheinbar kräftefreie, also in eine Trägheitsbewegung verwandeln können?

Um uns darüber klar zu werden, betrachten wir einmal eine an einem Ende festgehaltene etwas gedehnte Spiralfeder. Sie setzt Körper, die wir an sie hängen, in Bewegung, sie übt eine Kraft auf sie aus und zwar können wir diese Kraft in einem Gebiete, das klein ist im Verhältnis zur Länge der Feder, sowohl nach Größe wie nach Richtung als konstant ansehen; die Feder repräsentiert uns also in einem solchen kleinen Gebiete $\mathfrak{R}$ ein homogenes Kraftfeld. — Wenn wir nun einen Körper $\mathfrak{K}$ innerhalb dieses Feldes von der Feder in Bewegung setzen lassen, so können wir natürlich diese Bewegung, wie jede beliebige, durch Einführung eines neuen Bezugssystems einer Trägheitsbewegung gleich machen, also die Wirkung des Feldes auf den Körper $\mathfrak{K}$ scheinbar zum Verschwinden bringen. Wiederholen wir jetzt aber diesen Versuch mit einem anderen Körper, so wird dieser durch die Feder eine andere Beschleunigung erhalten. Um also seine Bewegung als geradlinig gleichförmig erscheinen zu lassen, wird man daher ein anderes Bezugssystem einführen müssen. — So können wir also auch bei diesem von der Spiralfeder erzeugten Kraftfelde in jedem einzelnen Falle durch Einführung eines neuen Systems eine scheinbare Trägheitsbewegung erzeugt denken, nicht aber können wir durch Einführung ein und desselben Bezugssystems ein für allemal die Wirkung des Kraftfeldes wegtransformieren, oder, wie wir dafür kürzer sagen werden, „das Kraftfeld selber wegtransformieren".

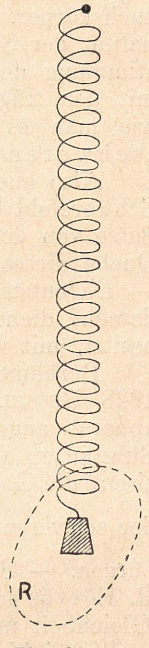


Fig. 23.

Darin besteht eben der Unterschied gegenüber einem Gravitationsfelde. Dieses erteilt allen Körpern dieselbe Beschleunigung, und daher können wir im obigen Sinne, wenn es homogen ist, *das ganze Feld wegtransformieren*, d. h. seine Wirkung unabhängig von den gerade benutzten Versuchskörpern kompensieren.

So beruht also dieser Satz, der nun den Angelpunkt der weiteren Einsteinschen Betrachtungen bildet, im wesentlichen auf der Tatsache, daß im Gravitationsfelde alle Körper gleiche Beschleunigung erhalten, oder, wie man sich beim Schwerefelde der Erde meist auszudrücken pflegt, daß alle Körper gleich schnell fallen.

In den üblichen Darstellungen der theoretischen Mechanik wird diese Tatsache meist folgendermaßen eingeführt: Nachdem die Kräfte ähnlich, wie wir das oben eingehend besprochen haben [vgl. S. 12], definiert sind als Produkte der Beschleunigungen mit einem dem Körper eigentümlichen Faktor, seiner Masse, oder besser gesagt, seiner „trägen"

Masse, so daß also für jede in der Richtung der z-Achse wirkende Kraft die Gleichung gilt:

1) $$Z = m\frac{d^2z}{dt^2},$$

nimmt man speziell über die Schwerkraft S die Erfahrungstatsache zu Hilfe, daß sie proportional der trägen Masse sei, also

2) $$Z = S = m \cdot g,$$

wo g ein reiner Zahlenfaktor ist, woraus sich dann

$$\frac{d^2z}{dt^2} = g$$

ergibt, und damit die Unabhängigkeit der Beschleunigung vom Versuchskörper. Es beruht diese Unabhängigkeit also auf der Proportionalitat der Schwerkraft mit der trägen Masse, oder auf der Uebereinstimmung des im Gesetz der Schwere (2) auftretenden Massenfaktors mit der trägen Masse in der Newtonschen Kraftdefinition (1), oder, wie man es auch auszudrücken pflegt, auf der Gleichheit der „schweren" und der „trägen" Masse.

Also auch die Einsteinsche Behauptung, daß man jedes homogene Schwerefeld wegtransformieren kann, beruht letzten Endes auf diesem Satze von der Gleichheit der schweren und der trägen Masse, und die Quelle dieses Satzes wieder ist, wie schon erwähnt, die Erfahrung. — Da entsteht denn, wenn dieser Satz einer neuen Theorie als Fundament dienen soll, die Frage, welchen Grad der Zuverlässigkeit er besitzt, mit welchem Grade der Genauigkeit er verbürgt werden kann.

Berühmte Versuche zur Untersuchung dieser Frage hat im Jahre 1828 Bessel auf der Königsberger Sternwarte mit seinem Pendelapparat angestellt. Er konnte für die verschiedensten untersuchten Substanzen (mehrere Metalle, Marmor, Ton, Quarz, Wasser, Meteoreisen) die Gleichheit von g, oder was dasselbe ist, die Uebereinstimmung der schweren mit der trägen Masse bis auf $\frac{1}{60\,000}$ ihres Wertes verbürgen. — Später (1890) sind dann von dem ungarischen Physiker R. Eötvös in Budapest Versuche mit der Drehwage zur Prüfung dieser Gleichheit unternommen. Wegen der großen Wichtigkeit dieser Versuche sei hier kurz auf das Prinzip, auf dem sie beruhen, eingegangen:

Auf einen Körper an der Erdoberfläche wirkt außer der Gravitationskraft, wenigstens von Standpunkte eines mit der rotierenden Erde mitgehenden Beobachters [vgl. S. 24], noch die Zentrifugalkraft. Die Lotrichtung, d. i. die Richtung, die ein langer Faden annimmt, an dem ein schwerer Körper hängt, ist also die Richtung der Resultanten aus der Gravitationskraft und der Zentrifugalkraft. Die Gravitationskraft (Schwerkraft S) hängt aber von der schweren Masse, die wir jetzt mit μ bezeichnen wollen, ab:

3_s) $$S = \mu \cdot g,$$

die Zentrifugalkraft (Fliehkraft F) hingegen von der trägen Masse, für die wir den Buchstaben m beibehalten — haben wir doch die Größe der Zentrifugalkraft (im engeren Sinne)

3_f) $$F = m \cdot \omega^2 r \qquad \begin{pmatrix} \omega = \text{Rotationsgeschwindigkeit} \\ r = \text{senkrechter Achsenabstand} \end{pmatrix}$$

auf S. 21 abgeleitet lediglich dadurch, daß wir die Newtonschen

Gleichungen, in denen nur die träge Masse auftrat, auf ein rotierendes System transformierten. Wenn nun das Verhältnis

4) $$q = \frac{m}{\mu}$$

bei verschiedenen Körpern verschieden wäre, so würde auch die Lotrichtung bei Aufhängung verschiedener Körper verschieden sein, denn für die Abweichung δ der Lotrichtung von der Radialrichtung*) ergibt sich aus der Figur:

$$\frac{\sin\delta}{\sin(\varphi+\delta)} = \frac{F}{S} = \frac{m\omega^2 r}{\mu \cdot g} = \left(\frac{\omega^2 r}{g}\right)\cdot\frac{m}{\mu} \qquad \text{oder} \qquad \frac{\sin\delta}{\sin(\varphi+\delta)} = C\cdot q,$$

wo C eine Konstante, und φ die geographische Breite des Beobachtungsortes bedeutet. Tatsächlich ist also die durch δ bestimmte Lotrichtung abhängig von q.

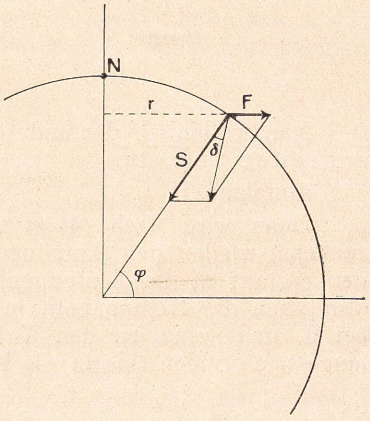


Fig. 24.

Um nun q, oder, was dasselbe ist, die Lotrichtung auf ihre Abhängigkeit von dem Material der verwendeten Körper zu prüfen, hing Eötvös zwei möglichst verschiedenartige Körper wie z. B. eine Messing- und eine Elfenbeinkugel an den beiden Enden der Nadel einer empfindlichen Drehwage auf und drehte den Kopf so lange, bis die Nadel in genau west-östlicher Richtung stand. Wir denken uns der Einfachheit halber die *schweren* Massen μ und μ' der beiden Kugeln einander gleich gemacht, und machen nun zunächst die folgende

Annahme I $$q = q'$$

Dann sind also auch die *trägen* Massen m und m' einandergleich, und daher nach (3_f) auch die auf die beiden Kugeln wirkenden Zentrifugalkräfte. Wenn wir uns also zunächst einmal den Aufhänger draht in radialer Richtung (zum Erdmittelpunkt) festgehalten (etwa am unteren Ende festgeklemmt) denken, werden auf die beiden Kugeln gleiche Komponenten der Zentrifugalkräfte südwärts wirken, und, wenn wir daher jetzt den Aufhängedraht unten frei lassen, wird sich sein unteres Ende im Meridian nach Süden bewegen, bis in der Lotrichtung diese beiden Südkomponenten verschwinden, (d. h. die Zentrifugalkräfte mit der Schwere zusammen eine Resultante in der Richtung des Aufhängedrahtes bilden, also kompensiert werden). Unsere Fig. 25 zeigt uns den Torsionskopf und die Nadel der Drehwage mit den 2 Kugeln in den beiden Situationen, mit radial und lotrecht gerichtetem Aufhängedraht, von oben gesehen. — Da nun in der letzteren Situation (die natürlich beim eigentlichen Versuche allein vorlag) überhaupt keine Komponenten in der Drehungsebene auftreten, wird die Nadel einer Drehung des Torsionskopfes um 180° frei folgen, und

*) Von der Abplattung der Erde sehen wir hier ab, nehmen also auch die Gravitationskraft S radial zum Mittelpunkt der Erde gerichtet an.

es ist also, wenn unsere Annahme I zutrifft, bei einer solchen Drehung um 180° *keine Richtungsänderung zwischen Torsionskopf und Nadel zu erwarten.*

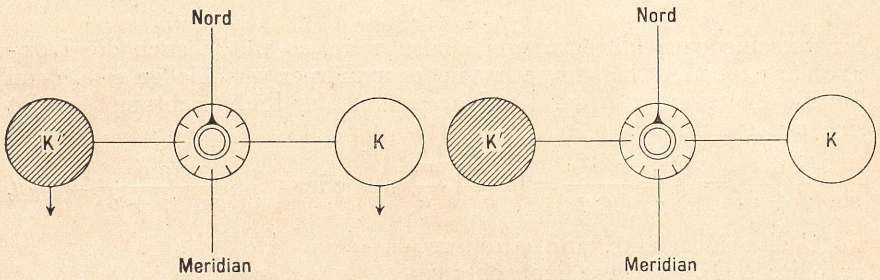


Fig. 25.

Nun wollen wir den anderen Fall untersuchen, daß q und q' verschieden sind, etwa

Annahme II $\qquad q' > q$

Dann wird nach (4) $m' > m$ sein, und es wird daher, wenn wir zunächst wieder den Aufhängedraht in radialer Richtung festgehalten denken, auf $\mathfrak{K}'$ die Zentrifugalkraft stärker wirken als auf $\mathfrak{K}$, es wird also auch die Komponente in der Südrichtung bei $\mathfrak{K}'$ größer sein als bei $\mathfrak{K}$, und wenn wir den Aufhängedraht unten freilassen, wird er so lange nach Süden (bis in die Lotrichtung) schwingen, bis die jetzt vom

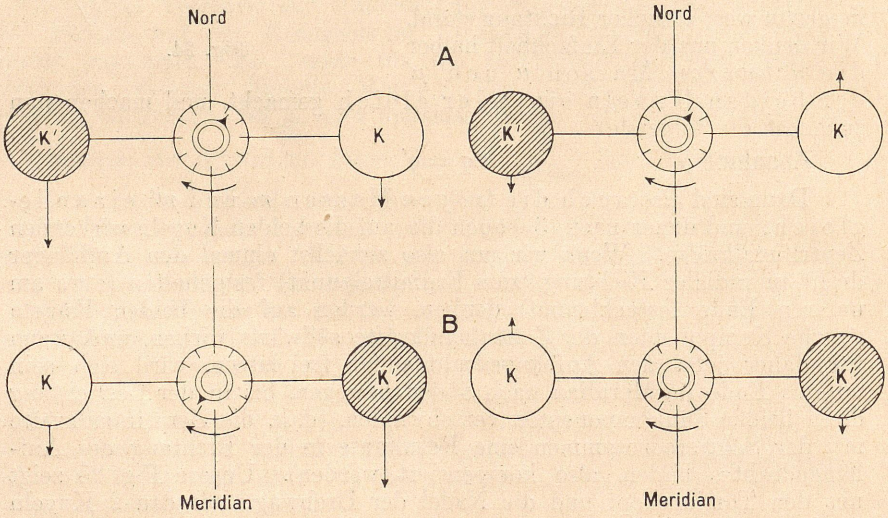


Fig. 26.

Draht nicht mehr kompensierte Nordkompenente der Schwere die früher ungleichen Südkomponenten der Zentrifugalkraft zu zwei entgegengesetzt gleichen, also einer Nord- und einer Südkomponente, ergänzt haben. Das von diesen ausgeübte Drehmoment muß dann durch Torsion des Drahtes in Richtung des Pfeiles (Fig. 26 A) aufgehoben werden. In diesem Falle II würde die Nadel also in der Westostrichtung nicht

mehr wie früher an einem torsionslosen Drahte hängen, und wenn man jetzt wieder den Torsionskopf um 180° drehen würde, so würde jetzt diese Drahttorsion das Drehmoment der übrigen Kräfte noch verstärken (vgl. Fig. 26 B). Daher würde die Nadel aus ihrer Westostrichtung abgelenkt werden, und *es würde also, wenn die Annahme II zutrifft, bei einer solchen Drehung um 180° eine Richtungsänderung zwischen Torsionskopf und Nadel eintreten*, die sich durch Spiegelablesung mit großer Genauigkeit feststellen ließe.

Die Versuche haben nun ergeben, daß keine solche gegenseitige Richtungsänderung eintritt, die Versuche haben damit für die Annahme I entschieden, daß *das Verhältnis zwischen träger und schwerer Masse bei allen Körpern dasselbe ist*, und zwar läßt sich bei der außerordentlichen Empfindlichkeit der Methode diese Konstanz des Verhältnisses q bis auf den $2 \cdot 10^7$ten Teil seines Wertes verbürgen: bei allen untersuchten Körpern $\mathfrak{K}'$ lag also

$$q' \quad \text{zwischen} \quad q\left(1+\frac{1}{2\cdot 10^7}\right) \quad \text{und} \quad q\left(1-\frac{1}{2\cdot 10^7}\right)$$

Die Konstanz von q ist also nach diesen Eötvösschen Versuchen mit einer auf anderen Gebieten kaum erreichten Genauigkeit festgestellt. — Ist aber q konstant, stehen träge und schwere Masse m und μ in einem konstanten Verhältnis zueinander, so kann man sie auch als gleich ansehen, indem man den Proportionalitätsfaktor mit zu dem Faktor g in (3_8) rechnet. — So können wir sagen, daß *der Satz von der Gleichheit der schweren und der trägen Masse zu den experimentell bestfundierten Sätzen der Physik gehört.*

Wenn aber dieser Satz richtig ist, so gilt nach unseren früheren Ueberlegungen auch der folgende

Satz 3. — *Durch Einführung eines neuen Bezugssystems lassen sich gleichzeitig die Bewegungen aller Körper in homogenen Gravitationsfeldern in scheinbare Trägheitsbewegungen d. h. in geradlinig gleichförmige Bewegungen verwandeln, also alle Wirkungen des Gravitationsfeldes aufheben (das Feld „wegtransformieren") und umgekehrt läßt sich auch jede Trägheitsbewegung in eine scheinbare Bewegung in einem homogenen Gravitationsfelde verwandeln (ein Feld „vortäuschen").* —

Während wir bisher der Aussage, ein Gravitationsfeld existiert oder es existiert nicht, eine objektive Bedeutung beilegten, und dann sagten, im ersten Falle könne man es „scheinbar" beseitigen, und im zweiten Falle könne man sich ein Feld „vortäuschen", so behauptet nun Einstein, daß es schlechterdings unmöglich sei, zwischen „wirklichen" und „vorgetäuschten" solchen Feldern zu unterscheiden, also eine Entscheidung zu treffen, ob ein homogenes Gravitationsfeld bei ruhendem System vorliegt, oder aber ob das System sich bewegt und kein Feld vorhanden ist. — Das ist der einfachste Fall des berühmten Einsteinschen Aequivalenzprinzips, des eigentlichen Fundamentes seiner allgemeinen Relativitäts- und Gravitationstheorie. Es leugnet, wie man sieht, wie das ursprüngliche Relativitätsprinzip die Möglichkeit, eine absolute Bewegung des Bezugssystemes festzustellen, oder die Berechtigung, auch von zwei gegeneinander beschleunigten Systemen das eine mit größerem Rechte als ruhend zu bezeichnen als das andere — aber es behauptet nicht mehr, daß alles völlig unverändert bleibt, wenn man von einem dieser Systeme zu dem anderen übergeht, sondern es behauptet, daß mit diesem

Uebergang sehr wohl eine Aenderung verbunden sein darf, nämlich eine Aenderung der wahrgenommenen Gravitationsfelder (die in der speziellen Relativitätstheorie ausgeschlossen waren). —

Wir sprachen oben nur vom „einfachsten Falle“ des Aequivalenzprinzipes, weil dabei nur homogene Gravitationsfelder in Betracht gezogen wurden; die letztere Formulierung aber gilt auch bereits im allgemeinen Falle beliebiger Gravitationsfelder. Diese können wir, wie früher am Beispiele des Erdfeldes ausgeführt wurde [vgl. S. 134], zwar nicht völlig wegtransformieren, wir können also nicht von ihrem „Verschwinden“ oder „Entstehen“ sprechen, wohl aber von ihrer „Aenderung“, und da behauptet eben das **allgemeine Aquivalenzprinzip,** *daß man beim Uebergange zu beliebigen anderen Bezugssystemen höchstens eine Aenderung der Gravitationsfelder festzustellen imstande ist.*

Daraus ergibt sich dann, daß, wenn wir hier im Gegensatz zur speziellen Relativitätstheorie die Gravitationswirkungen berücksichtigen, zwei in gegeneinander bewegten Laboratorien angestellte gleiche Versuche nicht mehr gleich abzulaufen brauchen, und daß daher auch die Forderung der Invarianz der Naturgesetze beim Uebergang zu beliebig gegeneinander bewegten Systemen nicht mehr aufrecht erhalten werden kann (vgl. die Begründung dieser Invarianzforderung auf S. 6). Wohl aber ergibt sich jetzt als

Folgerung aus dem Aequivalenzprinzip: *Die Naturgesetze können sich beim Uebergang zu beliebigen anderen Systemen nur insoweit ändern, als sich das Gravitationsfeld bei diesem Uebergange ändert.*

Wir werden für diesen Satz später eine präzisere analytische Formulierung kennen lernen. Hier sei zunächst an einem einfachen Beispiele erläutert, daß tatsächlich in beschleunigt gegeneinander bewegten Systemen gleiche Parallelversuche*) nicht gleich ablaufen: Nehmen wir an, in Figur 21, S. 134 sei das System $\mathfrak{L}\,(x, y, z)$ ein Galileisches System der Mechanik [vgl. S. 19], und es sei nach den älteren Vorstellungen kein Gravitationsfeld vorhanden; das System $\mathfrak{L}'\,(x', y', z')$ bewege sich ohne Drehung genau so wie ein aufwärts geworfener Stein im Erdfelde, also mit einer abwärts gerichteten Beschleunigung g, so daß es zunächst in die Höhe geht und dann später wieder zurücksinkt. Nunmehr denke ich mir zwei Parallelversuche in den beiden Laboratorien $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$ angestellt, darin bestehend, daß je ein Beobachter an der Stelle, die in dem betreffenden Systeme die Koordinaten a, b, c besitzt, einen Körper ohne ihm eine Geschwindigkeit zu erteilen, losläßt. Dann wird der Körper in dem Systeme $\mathfrak{L}$, einem Galileischen Systeme, in Ruhe bleiben, sein Zustand wird also durch die Gleichungen

$$5) \qquad x = a, \qquad y = b, \qquad z = c$$

beschrieben werden; und was den Parallelversuch in $\mathfrak{L}'$ anlangt, so wollen wir uns diesen angestellt denken in dem Augenblicke, wenn $\mathfrak{L}'$ gerade seinen höchsten Punkt (gegenüber $\mathfrak{L}$) erreicht hat, wenn also $\mathfrak{L}'$ und damit auch der losgelassene Körper gegen das Galilei-System $\mathfrak{L}$ in Ruhe ist. Dann wird auch er gegen $\mathfrak{L}$ weiter in Ruhe bleiben, aber von dem mit der Beschleunigung g abwärts bewegten Systeme $\mathfrak{L}'\,(x', y', z')$ aus mit dieser Beschleunigung aufwärts bewegt erscheinen, so daß seine endlichen Bewegungsgleichungen lauten:

*) Es sei hier noch ausdrücklich darauf hingewiesen, daß wir bisher in diesem Paragraphen immer nur dieselbe Bewegung von verschiedenen Systemen aus betrachtet haben, also immer nur „interlaboratorielle“ Versuche.

$$5') \qquad x' = a, \qquad y' = b, \qquad z' = c + g\frac{t^2}{2}.$$

Ein Vergleich von (5) und (5') lehrt, daß diese beiden unstreitig als gleich zu bezeichnenden Parallelversuche *in beiden Systemen verschieden* ablaufen. — Sie bestätigen aber auch die Tatsache, daß man die ganze Aenderung im Ablauf als Wirkung eines Schwerefeldes ansehen kann (mit der Beschleunigung g aufwärts).

Bei allen diesen bisherigen Betrachtungen haben wir nur geradlinig beschleunigte Bewegungen ins Auge gefaßt, weil sich bei ihnen die Verhältnisse am leichtesten übersehen lassen. Wir wollen jetzt auch noch kurz auf gegeneinander rotierende Systeme eingehen. Mit ihnen haben wir uns schon früher in dem § 2 des ersten Teiles (über die Grundlagen der klassischen Mechanik) beschäftigt. Nach den dortigen Auffassungen war — im Gegensatz zu geradlinig gleichförmigen Bewegungen gegen ein Grundsystem — eine rotierende Bewegung eines Systems gegenüber einem Galilei-Systeme etwas Absolutes, was sich beim Festhalten an der Newtonschen Kraftdefinition durch das scheinbare Auftreten neuer Kräfte, der Zentrifugalkräfte, bemerkbar machte, so daß man, auch wenn ein ewig bedeckter Himmel dem Erdbewohner den Anblick anderer Himmelskörper verwehren würde, durch irdische Versuche die „Drehung" der Erde feststellen könnte. — Um diesen absoluten Charakter der Rotation, d. h. die Tatsache anschaulich zu machen, daß man von einem einzelnen Körper ohne Rücksicht auf andere feststellen könne, er drehe sich, oder er drehe sich nicht, hat C. Neumann im Jahre 1870 in seiner schon auf S. 3 erwähnten Schrift „Ueber die Prinzipien der Galilei-Newtonschen Theorie" (daselbst S. 27—28) folgende Ueberlegung angestellt: er denkt sich einen aus flüssiger oder wenigstens elastisch deformierbarer Masse bestehenden Himmelskörper ganz allein im Weltall. Nimmt dieser dann infolge der zwischen seinen eigenen Teilchen wirkenden Attraktionskräfte Kugelgestalt an, so wird man nach den Vorstellungen der klassischen Mechanik sagen, daß er „ruhe" oder sich wenigstens „nicht drehe" — wenn er sich hingegen abplattet (wie die Erde), wird man sagen, „er drehe sich", denn die Zentrifugalkräfte, welche allein die Abplattung bewirken können, treten nur bei einer Drehung auf, d. h. natürlich bei einer Drehung gegen den durch das Galileische System repräsentierten absoluten Raum. — Weil es also zur Entscheidung zwischen Ruhe und Drehung keiner Bezugnahme auf andere reale Körper bedarf, sah man im Sinne der alten Theorie als bewiesen an, daß Drehungen nichts Relatives sind, sondern etwas Absolutes darstellen.

An ähnliche Ueberlegungen knüpft nun auch Einstein an: Er denkt sich nicht einen einzelnen, sondern zwei Himmelskörper allein im ganzen Weltall, doch in so weiter Entfernung, daß ihre gegenseitige Attraktion vernachlässigt werden kann. Diese beiden Körper sollen sich um ihre Verbindungslinie gegeneinander drehen*), und nun setzt Einstein den Fall, daß man beobachtete, daß der eine Körper Kugelgestalt annähme, der andere sich aber abplatte, und frägt dann, wie man diese Erscheinung erklären könne. — Nach der Auffassung der klassischen Mechanik, derzufolge eine Drehung etwas Absolutes ist, liegt die Erklärung auf der Hand: man wird eben sagen, der eine

*) Eine solche bloße Relativbewegung ist ja leicht konstatierbar.

(kugelförmige) Körper ruhe, und nur der andere (abgeplattete) rotiere. Doch wenn wir, wie das die Relativitätstheorie fordert, jede Bewegung, also auch die Rotation, als etwas nur Relatives auffassen, so ist die Erscheinung allerdings nicht zu erklären, denn die Relativbewegung des einen Körpers gegen den anderen ist genau die gleiche wie die des zweiten gegen den ersten; wenn also nur diese Relativbewegung von Einfluß sein darf, muß der eine Körper genau dasselbe Verhalten zeigen wie der andere, die Erscheinung wäre schlechterdings unmöglich. Wenn wirklich einmal ein solches Verhalten zweier Körper beobachtet werden sollte, so schließt Einstein weiter, so müssen nach der Relativitätstheorie die Voraussetzungen andere sein, es müssen noch andere Körper im Spiele sein, und tatsächlich hat auch noch Niemand einen Körper beobachtet, der sich allein im Weltall befindet, wie ihn C. Neumann annimmt, oder auch ein derartiges Körperpaar, wie es Einstein fingiert. Es handelt sich demnach hier um irreale Gedankenexperimente, denen eine wirkliche Beweiskraft für das Vorhandensein einer absoluten Bewegung und damit auch des absoluten Raumes nicht innewohnt, worauf Mach in seiner „Mechanik“ *) bereits längst vor den Anfängen der heutigen Relativitätstheorie hingewiesen hat.

Berücksichtigen wir also jetzt bei der von Einstein angenommenen Erscheinung das Vorhandensein noch anderer Himmelskörper! Zusammenfassend will ich sie kurz den „Fixsternhimmel“ nennen. — Da die Erscheinung nicht durch die Relativbewegung der beiden Körper gegeneinander zu erklären ist, muß sie also begründet sein in ihrer Bewegung gegen den Fixsternhimmel. Weil der eine Körper gegen diesen ruht, nimmt er Kugelgestalt an, und weil sich der andere gegen den Fixsternhimmel bewegt, plattet er sich ab.

Wenn wir uns diese Vorstellung bilden, so fordert das Relativitätsprinzip, demzufolge wir ja mit gleichem Recht jeden Körper als ruhend ansehen können, daß auch umgekehrt der um den (jetzt als ruhend angenommenen) zweiten Körper rotierende Fixsternhimmel auf diesen Körper solche zentrifugale, abplattende Kräfte ausübt. — So führen diese Ueberlegungen mit einer gewissen Notwendigkeit zur Annahme einer, von der Newtonschen Gravitation verschiedenen, neuen Art von Wirkung zwischen ponderablen Massen, einer Wirkung, die sie infolge ihrer Rotation umeinander ausüben. Ich will diese Wirkung daher kurz als „Rotationsgravitation“ bezeichnen.

Darauf, daß sich als die notwendige Folge aus der Auffassung von der Relativität aller Bewegungen die Annahme einer solchen neuen Art von Gravitationswirkung ergibt, ist schon von Ernst Mach in seiner „Mechanik“ (1883) hingewiesen und dann später (1896) sehr nachdrücklich in einem kleinen Schriftchen „Absolute oder relative Bewegung?“ **) von den Brüdern Benedict und Immanuel Friedlaender. Ja, der erstgenannte dieser Brüder hat sogar einen Versuch angegeben und auszuführen unternommen, mittels dessen er diese Rotationsgravitation mit irdischen Massen experimentell nachweisen wollte. Er hing in unmittelbarer Nähe eines Schwungrades in einem Walzwerke, als wohl der größten zur Verfügung stehenden rotierenden irdischen Masse, eine Drehwage auf, deren Nadelmitte genau in der Verlängerung der Radachse lag, und stellte die Nadel unter einem kleinen Winkel

*) Leipzig, bei F. A. Brockhaus, erste Auflage 1883, siebente 1912.
**) Berlin 1896, bei Leonhard Simion.

geneigt gegen die Radebene, wie es die Figur 27 zeigt, welche die Anordnung von oben gesehen darstellt. — Wenn nun wirklich rotierende Massen auf ruhende Körper zentrifugal wirkende Kräfte ausüben, muß sich unter deren Einfluß die Nadel parallel zur Radebene stellen. — Leider hat der Versuch wegen technischer Schwierigkeiten zu keinem abschließenden Ergebnis geführt. Er wäre sonst ein Analogon zu den bekannten Untersuchungen, z. B. von Richarz und Krigar-Menzel, geworden, welche die Newtonsche Gravitation durch Versuche mit irdischen Massen nachwiesen und sogar maßen.

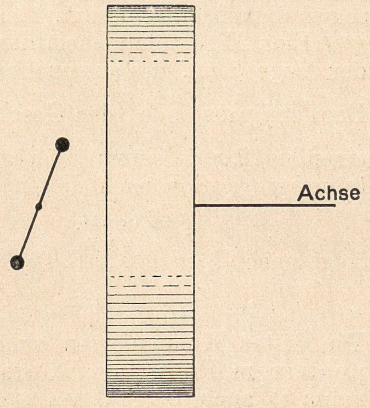


Fig. 27.

Aber, obwohl ein direkter Nachweis auf obigem Wege nicht geglückt ist, neigt man heute doch der Vorstellung von einer solchen besonderen „Rotationsgravitation“ zu und erkennt die Ueberlegungen, die dem Friedlaenderschen Versuche zugrunde liegen, als richtig an, und man sieht demnach z. B. die Abplattung der Erde oder den Foucaultschen Pendelversuch nicht mehr als Beweis dafür an, daß die Erde „sich dreht“, sondern nur dafür, daß sie „sich gegen den Fixsternhimmel dreht“, d. h. gegenüber der Gesamtheit der übrigen im Weltall befindlichen Körper, oder, was nach dem Relativitätsprinzip dasselbe ist, daß sich diese übrigen Körper um die Erde drehen.

Mit dieser Auffassung steht auch die schon früher (S. 25) erwähnte Tatsache im Einklang, daß sich als Grundsystem der Mechanik, also als das absolute Galileische Grundsystem, dessen Annahme die klassische Mechanik fordert [vgl. S. 8], praktisch am besten ein System bewährt hat, das gegen den (mittleren) Fixsternhimmel ruht, oder höchstens in geradlinig gleichförmiger Bewegung gegen ihn begriffen ist, und die früher (S. 24) eingehend besprochenen Abweichungen von den Grundgleichungen der Mechanik, die Scheinkräfte, die auftreten, wenn man von Galileischen Systemen (x, y, z) zu einem gegen sie rotierenden Bezugssysteme (ξ, η, ζ) übergeht, erklärt man dann eben als Wirkungen der Rotationsgravitation, herrührend von den gegen das neue System rotierenden Massen der übrigen Weltkörper.

Sieht man die Formeln der klassischen Mechanik als richtig an — und mit großer Annäherung dürfen wir das sicher —, so können wir die Größe dieser Rotationsgravitation, wie sie von der Gesamtheit aller Weltkörper hervorgebracht wird, sofort angeben. Wir müssen ihr nämlich, wenn die Massen mit der Geschwindigkeit ω gegen das System (ξ, η, ζ) rotieren*), und die Rotationsachse (ζ-Achse) ihre Richtung gegen den Fixsternhimmel nicht ändert, die Komponenten

$$6) \quad G_\xi = -2m\omega\frac{d\eta}{dt} + m\omega^2\xi, \qquad G_\eta = 2m\omega\frac{d\xi}{dt} + m\omega^2\eta, \qquad G_\xi = 0$$

*) Als positiv ist immer der Drehungssinn bezeichnet, in dem die positive ξ-Achse auf kürzestem Wege in die positive η-Achse übergeführt werden kann [vgl. Figur 1, S. 20].

zuschreiben, denn dies sind ja nach den Formeln (8) S. 23 die Scheinkräfte, die noch neben den „wirklichen", wie wir früher sagten, auftreten — nur ist ω mit $-\omega$ vertauscht, weil eben jetzt das System (ξ, η, ζ) gegen das Galileische System (Fixsternhimmel) nicht die Rotationsgeschwindigkeit ω, wie dort, sondern die entgegengesetzte Geschwindigkeit $-\omega$ besitzt.

Eine Eigentümlichkeit dieser Kräfte (6) ist es, daß sie außer von der Lage ξ, η, ζ des angegriffenen Massenpunktes auch noch von seinem Bewegungszustande $\left(\text{den Geschwindigkeiten } \frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}\right)$ abhängen: Auf einen im ξ, η, ζ-System ruhenden Massenpunkt m wirkt die Rotationsgravitation nach diesen Formeln (6) *zentrifugal*, denn aus

$$\xi = \text{const}, \qquad \eta = \text{const}, \qquad \zeta = \text{const},$$

folgt nach (6):

$$G_\xi = m\,\omega^2\xi, \qquad G_\eta = m\,\omega^2\eta, \qquad G_\zeta = 0.$$

Die ersten Komponenten sind also proportional den Koordinaten mit positivem Proportionalitätsfaktor. — Solch eine zentrifugale Wirkung nahm ja auch B. Friedlaender an.

Betrachten wir jetzt aber einen Massenpunkt, welcher der Rotation der äußeren Massen folgt, sich also gegen das jetzt betrachtete Koordinatensystem (ξ, η, ζ) auf einem Kreise (r) mit der konstanten Zentrigeschwindigkeit ω bewegt, so daß seine Bewegungsgleichungen:

$$\xi = r\cos(\omega t + \alpha), \qquad \eta = r\sin(\omega t + \alpha), \qquad \zeta = \text{const}$$

sind, so folgt wegen der Beziehungen $\frac{d\xi}{dt} = -\omega\eta$ und $\frac{d\eta}{dt} = \omega\xi$ aus (6) für die Komponenten der Rotationsgravitation:

$$G_\xi = -m\,\omega^2\xi, \qquad G_\eta = -m\,\omega^2\eta, \qquad G_\zeta = 0,$$

die ersten Komponenten unterscheiden sich also durch negative Faktoren von den Koordinaten, die Resultante ist demnach jetzt *zentripetal* gerichtet, wie es ja bekanntlich auch, um einen Massenpunkt in gleichförmiger Bewegung auf einem Kreise zu erhalten, stets der Anbringung einer Zentripetalkraft bedarf.

Dieses letztere Beispiel lehrt nun in einem speziellen Falle die Richtigkeit des Satzes, daß eine Trägheitsbewegung, von einem rotierenden Systeme aus betrachtet, als Bewegung in einem Rotationsgravitationsfelde erscheint; denn ein Massenpunkt, der der Drehung des Fixsternhimmels folgt, ruht in einem Galileischen Systeme, führt also eine ganz spezielle Trägheitsbewegung aus. — Unschwer läßt sich dieser Satz nun auch auf beliebige Trägheitsbewegungen übertragen. — Aber auch die Umkehrung gilt, daß man jede Bewegung in dem durch gleichförmige Drehung der Massen des Weltalls erzeugten Gravitationsfelde (bei Ausschluß anderer Kräfte) durch Einführung eines neuen Bezugssystems in eine scheinbare Trägheitsbewegung überführen kann*).

---

*) Die allgemeinen Integrale der Differentialgleichungen

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2} = G_\xi, \qquad m\frac{d^2\eta}{dt^2} = G_\eta, \qquad m\frac{d^2\zeta}{dt^2} = G_\zeta$$

So sehen wir, daß bei solchen Rotationsgravitationsfeldern die Verhältnisse genau so liegen wie sie früher für homogene gewöhnliche (Newtonsche) Gravitationsfelder auseinandergesetzt wurden: Die Felder können durch Bewegung des Bezugssystems „vorgetäuscht", aber ebenso auch bestehende Felder „wegtransformiert" werden. — Auch für sie behauptet Einstein, daß kein Unterschied zwischen „wirklichen" solchen Rotationsgravitationsfeldern und nur „scheinbaren" besteht, er *dehnt also sein Aequivalenzprinzip auch auf solche Felder aus.*

Wenn wir also den Begriff der Gravitation durch Hinzunahme dieser von uns als Rotationsgravitation bezeichneten Wirkung erweitern, so fallen die Unterschiede zwischen Trägheitsbewegungen und Bewegungen in einem Gravitationsfelde bis zu einem gewissen Grade fort; ja, wenn die Gravitationsfelder homogen sind, verschwinden diese Unterschiede vollständig. Beide Arten von Bewegungen sind in diesem Falle identisch, beide müssen daher von ein und demselben Gesetze beherrscht werden, derart, daß dieses Gesetz, ausgedrückt in den Raumzeitkoordinaten eines Systems, z. B. eine Trägheitsbewegung, und nach bloßem Umrechnen auf ein anderes System eine Bewegung in einem Gravitationsfelde darstellt. — Gerade die Umrechnung der Newtonschen Grundgleichungen (1) S. 13 der Mechanik auf rotierende Systeme [vgl. (7) S. 21] im Falle $X = Y = Z = 0$ und daher auch $\Xi = H = Z = 0$ bildet nach den soeben auseinandergesetzten neuen Auffassungen ein treffendes Beispiel dafür.

Die Beschränkung auf homogene Felder ist allerdings — wenigstens nach unseren bisherigen Betrachtungen — durchaus notwendig; inhomogene Felder kann man, wie oben S. 134 am Beispiel des Erdfeldes ausgeführt wurde, nicht wegtransformieren, nicht als nur durch die Bewegung des Bezugssystemes „vorgetäuscht" ansehen. Es behält danach also der Begriff des Gravitationsfeldes durchaus immer noch eine gewisse Realität. —

Bezüglich der Ausnahmestellung, welche aber nach diesen Betrachtungen die Gravitation gegenüber anderen Kräften einnimmt, sei noch bemerkt, daß sie in bester Uebereinstimmung mit früheren Ueberlegungen steht. Wir haben bei der Einführung der „Kräfte" diese als etwas den „Versuchsbedingungen" Eigentümliches bezeichnet [vgl. S. 12]; darin liegt doch enthalten, daß wir die Kräfte als etwas variables ansehen, als etwas, was wir selber in der Hand haben, beliebig abändern können. Das trifft auf die Schwere (Gravitation) sicher nicht zu; gerade nach der Auffassung der klassischen Mechanik ist sie überall vorhanden, und wir haben keinen Einfluß auf sie. Also auch dort nimmt sie schon eine Ausnahmestellung gegenüber anderen Kräften ein — durch unsere letzten Betrachtungen wird sie in gewisser Hinsicht mit der Trägheit auf gleiche Stufe gestellt.

---

für die Bewegung in dem durch (6) beschriebenen Kraftfelde lauten nämlich, wie man leicht bestätigt:

$$\xi = A\cos(\omega t+\alpha)+Bt\sin(\omega t+\beta),\quad \eta = A\sin(\omega t+\alpha)-Bt\cos(\omega t+\beta),\quad \zeta=\gamma t+c,$$

und ihre Umrechnung auf das System (x,y,z) mittels der Formeln

$$x=\xi\cos\omega t+\eta\sin\omega t,\qquad y=-\xi\sin\omega t+\eta\cos\omega t,\qquad z=\zeta,$$

liefert:

$$x=(A\cos\alpha)+(B\sin\beta)t,\qquad y=(A\sin\alpha)-(B\cos\beta)t,\qquad z=\gamma t+c,$$

also tatsächlich eine geradlinig gleichförmige Bewegung in diesem Systeme.

Das Aequivalenzprinzip wirft nun bereits neuartiges Licht auf die spezielle Relativitätstheorie:

Bei dieser, sagten wir, sollten alle Gravitationswirkungen ausgeschlossen sein. Nach dem Aequivalenzprinzipe ist aber das Fehlen eines Gravitationsfeldes nicht eine Eigenschaft eines gewissen raum-zeitlichen Gebietes an sich, sondern die Entscheidung, ob ein Gravitationsfeld vorhanden ist, oder nicht, hängt noch wesentlich von dem Bezugssysteme ab; wenn überhaupt, so gibt es nur eine ausgezeichnete Klasse von Bezugssystemen (die alle gegeneinander geradlinig gleichförmig bewegt sind), von denen aus keine Gravitationswirkungen wahrzunehmen sind — von anderen Systemen aus scheinen auch in solchen Gebieten Gravitationsfelder vorhanden zu sein. So zwingen uns denn die neuen Auffassungen dazu, *die Gültigkeit der speziellen Relativitätstheorie auf solche Raum-zeitgebiete einzuschränken, in welchen sich die Gravitationsfelder wegtransformieren lassen, und innerhalb dieser Gebiete als die der speziellen Relativitätstheorie zugrunde gelegten Bezugssysteme speziell diejenigen Systeme anzusehen, durch deren Einführung wir die Gravitationsfelder gerade zum Verschwinden bringen.*

Wir wollen solche Gebiete, in denen die spezielle Relativitätstheorie gilt, „*Lorentz-Gebiete*“ nennen, wie wir früher schon die speziellen der Theorie zugrunde gelegten Systeme als „*Lorentz-Systeme*“ bezeichneten. Diese Lorentz-Systeme, die im Rahmen der im ersten Teile entwickelten Theorie noch etwas Absolutes darstellten, in denen noch die alten Auffassungen vom absoluten Raume und der absoluten Zeit enthalten waren [vgl. S. 55], werden also nach diesen neuen Auffassungen, wo wir sie überhaupt einführen können, abhängig von der Natur der Gravitationsfelder, oder letzten Endes von der Verteilung der sie erzeugenden Massen in der Welt, so daß im Grunde genommen *Bewegung gegen ein Lorentz-System Bewegung gegen andere materielle Körper, also Relativbewegung ist.*

Aus diesen Ueberlegungen können wir sofort noch einen wichtigen Schluß ziehen: Früher waren die Lorentz-Systeme dadurch ausgezeichnet, daß sich in ihnen das Licht geradlinig fortpflanzte — führten wir sie doch gerade dem Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit zuliebe ein — jetzt sehen wir, daß ein System, von dem aus Gravitationswirkungen wahrgenommen werden, kein Lorentz-System ist; in ihm wird sich daher das Licht im allgemeinen nicht mehr geradlinig gleichförmig fortpflanzen, und so kommen wir zu dem Resultate, daß *ein Lichtstrahl im allgemeinen durch ein Gravitationsfeld aus seiner geradlinigen Bahn abgelenkt wird.*

§ 2.

Graphische Darstellungen. Exkurs in die Flächentheorie. Invarianz und Kovarianz.

Zur Vorbereitung unserer späteren Ueberlegungen wollen wir uns hier einmal mit der graphischen Darstellung des Ueberganges von einem Bezugssystem zu einem anderen beschäftigen, so daß sich diese ersten Betrachtungen eng berühren mit dem Thema, das wir in § 10 des ersten Teiles behandelt haben.

Wie dort anfänglich, wollen wir uns auch hier auf räumlich eindimensionale Systeme beschränken, also nur Bewegungen in einer Geraden betrachten, so daß wir bei Hinzunahme der Zeit mit zweidimensionalen Diagrammen auskommen. Doch während wir uns früher des weiteren auf gleichförmig gegeneinander bewegte Bezugssysteme beschränkten, mögen jetzt auch Uebergänge zu beliebig beschleunigten Systemen mit in den Bereich unserer Betrachtungen gezogen werden. Dafür aber wollen wir eine Vereinfachung insofern eintreten lassen, als wir jetzt, wie auch schon im letzten Paragraphen, an der Vorstellung von der universellen Zeit und von der vom Bewegungszustand des Systems unabhängigen Längeneinheit, also an den der klassischen Mechanik zugrunde liegenden Vorstellungen festhalten wollen.

Wir betrachten also jetzt ein solches räumlich eindimensionales System, bestehend aus einer einzigen Koordinatenachse (x-Achse) und tragen dann die in ihr von einem Anfangspunkte O aus gemessenen Abszissen und die Zeit t als rechtwinklige Koordinaten in ein ebenes Schema ein, so daß den Vertikalen die Linien konstanten x, den Horizontalen die Linien gleichen t entsprechen. Dann können wir jede beliebige Bewegung eines Massenpunktes in jener Geraden als Kurve in diesem Schema darstellen [vgl. Fig. 28]; wir nennen sie in Analogie zu unseren früheren Bezeichnungen seine „Weltlinie". — Fassen wir nun neben diesem Systeme noch ein zweites zunächst geradlinig gleichförmig gegen dieses erstere bewegtes System (x'-Achse) ins Auge, so ist speziell die Weltlinie des Anfangspunktes O' dieses zweiten Systems eine Gerade, die durch den Nullpunkt unseres Schemas geht — wenigstens, wenn, wie wir annehmen, die beiden Anfangspunkte zur Zeit 0 aneinander vorübergehen. Ferner sind dann die Weltlinien der einzelnen Punkte der x'-Achse, also die Linien konstanten x', Parallelen zu jener Geraden. Die Linien konstanter Zeit bleiben dagegen dieselben wie früher (Parallelen zur x-Achse des Schemas), da wir ja eine vom Bezugssystem unabhängige Zeitrechnung angenommen haben. — Dies festgestellt, ist es jetzt leicht, wenn die Bewegung eines Massenpunktes durch dessen Weltlinie gegeben ist, in jedem Augenblick (d. h. für jeden Punkt der Weltlinie) seine Lage in bezug auf das zweite System zu bestimmen, d. h. den Punkt der x'-Achse, mit dem er gerade zusammenfällt. Es ist das der Punkt, dessen Weltlinie gerade die Weltlinie des Massenpunktes in jenem Punkte schneidet. Danach sind also die zusammengehörigen Werte von x' und von t immer die horizontal bzw. vertikal gemessenen Abstände der Weltlinienpunkte von den Geraden $x' = 0$ bzw. $t = 0$. — Sprechen wir in diesem Sinne von schiefwinkligen Koordinaten, so können wir sagen, die Uebergänge von einem System zu einem zweiten würden in unserem Schema dargestellt durch den Uebergang von einem rechtwinkligen zu einem schiefwinkligen Koordinatensystem, und dieselbe Weltlinie stellte den Verlauf einer Bewegung von dem einen wie von dem anderen Systeme aus dar*).

Wählen wir nun als zweites System (x') nicht ein mit gleichförmiger Geschwindigkeit, sondern mit gleichförmiger Beschleunigung (γ) bewegtes System, so ist, bei sonst gleichen Annahmen

*) Es liegen die Verhältnisse also ganz entsprechend wie bei der Minkowskischen Darstellung S. 92, nur daß dort, weil eben keine universelle Zeit angenommen ist, die Linie $t' = \text{const}$ nicht mit den Linien $t = \text{const}$ zusammenfallen, und daher auch die x'-Achse ($t' = 0$) im Diagramm geneigt ist.

wie oben, die Weltlinie seines Anfangspunktes O' die Parabel $x = \gamma \cdot \frac{t^2}{2}$ und die Weltlinien der einzelnen Punkte der neuen x'-Achse, z. B. der Punkte $x' = 1, 2, 3 \ldots$, sind in der x-Richtung parallel verschobene Parabeln. Diese Parabeln treten an die Stelle des Systems geneigter Geraden der Fig. 28, sonst bleibt in prinzipieller Hinsicht alles beim

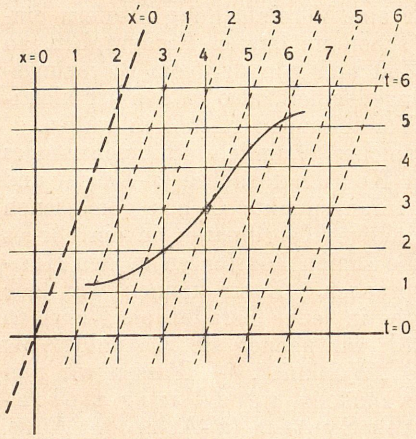


Fig. 28.

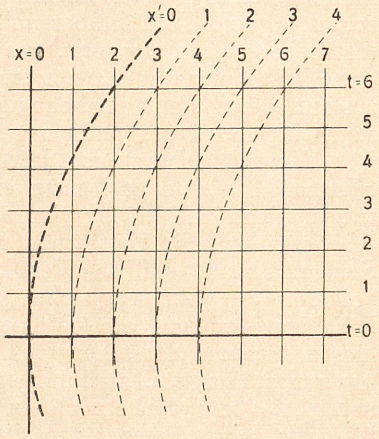


Fig. 29.

Alten, und wenn wir nicht ein gleichförmig, sondern ein beliebig beschleunigtes System annehmen, treten an die Stelle der Parabeln andere Kurven, die aber wieder sämtlich durch Parallelverschiebung aus einer entstehen, und so können wir denn allgemein sagen:

Satz I. — *Betrachtet man nur Bewegungsvorgänge in einer Geraden (x-Achse), also Beziehungen zwischen x und t, so kann man den Uebergang zu einem beliebigen anderen Bezugssystem mit koinzidierender x'-Achse graphisch deuten als Uebergang von rechtwinkligen Koordinaten x, t zu im allgemeinen krummlinigen Koordinaten x', t'.*

Bei Aussprache dieses Satzes haben wir die Möglichkeit, daß t' nicht mit t übereinstimmt, offen gelassen, obwohl wir bei unseren obigen Ausführungen immer an einer universellen Zeit festgehalten haben. Man sieht aber leicht, daß ein Fallenlassen dieser Annahme keine wesentliche Aenderung der Schlußweise bedingt [vgl. die letzte Anmerkung].

So bewähren sich also graphische Methoden auf das beste auch bei der Darstellung des Ueberganges zu beliebigen Bezugssystemen, und wir wollen uns daher auch weiter noch mit graphischen Darstellungen von Bewegungsvorgängen (raum-zeitlicher Beziehungen) freilich unter zunächst etwas fremdartig berührenden Voraussetzungen beschäftigen:

Da wollen wir uns einmal mit Poincaré in ein Zauberland versetzt denken: wir schliefen abends ein, und wenn wir morgens aufwachten, hätten sich die Dimensionen aller Körper verdoppelt. Was würden wir von dieser Veränderung merken? Augenscheinlich überhaupt nichts, denn die Maßstäbe, unser eigener Körper, und alles, was wir zum Vergleich heranziehen könnten, hat dieselbe Aenderung erfahren; also muß uns der ganze Vorgang verborgen bleiben, wenigstens wenn wir, wie wir annehmen wollen, nur geometrische Methoden zur Prüfung

anwenden*). — Wenn wir aber von einer solchen Veränderung überhaupt nichts merken, so können wir die Möglichkeit nicht von der Hand weisen, daß tatsächlich derartiges vorkommen kann.

Natürlich kann hier die Frage aufgeworfen werden, welche Realität denn einer solchen Aussage innewohnt, wenn die behauptete Tatsache ja doch von niemand wahrgenommen werden kann. Doch wir wollen uns jetzt bei diesen nur allgemein orientierenden Bemerkungen hieran nicht stoßen, und annehmen, daß etwa ein andersgeartetes Wesen existiere, welches diese Verdoppelung aller Dimensionen wahrzunehmen imstande wäre, und wollen vom Standpunkte dieses Wesens aus von „wahren" Längen sprechen, d. h. Längen, wie sie sich bei Messung mit dem ursprünglichen, unveränderten Maßstabe ergeben würden.

Wie wir nun bisher nach POINCARÉ diese Veränderung aller Dimensionen über Nacht, also in einer gewissen Zeit, vor sich gegangen dachten, so können wir sie auch örtlich bedingt annehmen, etwa derart, daß bei Annäherung an eine bestimmte Stelle a der x-Achse — auf Vorgänge allein in dieser wollen wir uns wieder beschränken — alle Längen allmählich wachsen, um bei Entfernung wieder zur Ausgangsgröße zurückzukehren. Auch von einer solchen Aenderung wird man, da sich ja alle Maßstäbe mit ausdehnen und zusammenziehen, nichts wahrnehmen. — Wollen wir nun wieder einen Bewegungsvorgang in der x-Achse graphisch darstellen, so können wir natürlich wieder die in jenen Maßstäben gemessenen Längen und die Zeiten als rechtwinklige Koordinaten auftragen. Wir kommen dann zu einem Schema, das völlig dem (quadratischen) Grundschema der Fig. 28 gleicht und nichts von dem eigentümlichen Verhalten der Körper in der Umgebung der Stelle a verrät. Wollen wir aber diesem Verhalten auch bei unseren graphischen Darstellungen Rechnung tragen und etwa verlangen, daß der Abstand zweier Vertikalen im Schema zugleich die „wahre" Entfernung der durch sie dargestellten Punkte angeben soll, so müssen wir augenscheinlich die Vertikalen in der Umgebung dieser Stelle auseinanderziehen, das Koordinatennetz horizontal dehnen [vgl. Fig. 30].

Nun wollen wir noch die weitere Annahme machen, daß diese Aenderung der Dimensionen keine dauernde sei, sondern nur auf einen gewissen Zeitraum von t_1 bis t_2 beschränkt wäre, und ebenso auch nur ein bestimmtes Gebiet der x-Achse, sagen wir von x_1 bis x_2, beträfe. Auch von einer solchen zeitlich *und* örtlich begrenzten Aenderung aller Dimensionen würde man nichts merken können, wir können also die Möglichkeit solcher Vorgänge nicht mit Sicherheit in Abrede stellen. Dann werden also bei einer graphischen Darstellung außerhalb des von den 4 Geraden $x = x_1$, $x = x_2$, $t = t_1$ und $t = t_2$ begrenzten Raum-Zeitgebietes in Fig 31 ganz die normalen Verhältnisse herrschen, wie sie am naturgemäßesten durch ein quadratisches Koordinatenschema dargestellt werden. Wollen wir aber auch graphische Darstellungen innerhalb jenes Raumzeitgebietes geben und dabei wieder verlangen, daß der Abstand der Linien $x = \text{const}$ immer die „wahre Entfernung" der betreffenden Punkte darstellen soll, so müssen wir die Vertikalen bei Eintritt in jenes Rechteck auseinanderziehen, eine Dehnung des Netzes

*) Ob uns nicht physikalische Methoden, z. B. die Anstellung von Pendelversuchen, den Sachverhalt erkennen lassen könnten, mag hier dahingestellt bleiben. Das hängt natürlich davon ab, ob und was für Annahmen wir über eine eventuell gleichzeitige Aenderung der Naturgesetze machen.

vornehmen, ohne daß dafür an einer anderen Stelle ein Zusammendrängen, eine Verengerung des Netzes, stattfinden dürfte. Das ist aber natürlich unmöglich — wenigstens solange wir in der Ebene bleiben. So werden wir denn durch diese Ueberlegungen ganz von selber dazu geführt, mit unseren graphischen Darstellungen auch schon eindimensionaler Bewegungsvorgänge aus der Ebene herauszutreten und unsere Zuflucht zu Darstellungen auf gekrümmten Flächen zu nehmen.

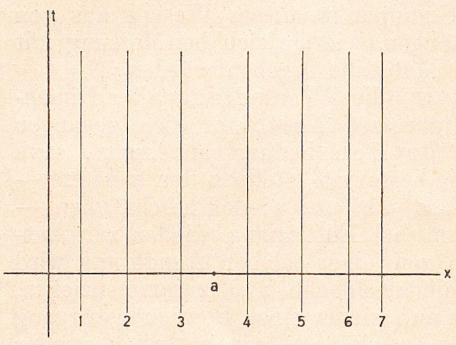


Fig. 30.

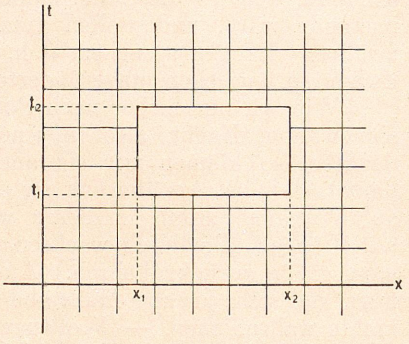


Fig. 31.

Satz 2. — *Es sind Fälle denkbar, in denen es zweckmäßig ist, die graphische Darstellung eines eindimensionalen Bewegungsvorganges auf einer gekrümmten Fläche vorzunehmen.*

Wir sehen in diesem Falle die Raumzeitmannigfaltigkeit nicht mehr als eine „ebene", sondern als eine „gekrümmte Mannigfaltigkeit" an. — Solche gekrümmte Mannigfaltigkeiten spielen nun in der Einstein'schen Theorie eine große Rolle. Hier bei eindimensionalen Bewegungsvorgängen, wo die Raumzeitmannigfaltigkeit zweidimensional ist, kann man sie sich noch mittels krummer Flächen veranschaulichen. Betrachten wir aber Bewegungen im mehrdimensionalen Raume (etwa im zwei- oder dreidimensionalen), so sind die in Betracht kommenden Raumzeitmannigfaltigkeiten mehr als zweidimensional, und uns fehlt dann, falls sie gekrümmt sind, ein ähnliches Veranschaulichungsmittel für sie. Gleichwohl werden wir, wie oben von gekrümmten Flächen, auch in diesen Fällen von „gekrümmten Räumen" sprechen, ein Begriff, der allerdings noch einer genaueren analytischen Definition bedarf, die erst später gegeben werden soll.

Vor allem sei aber bereits hier darauf hingewiesen, daß wir *bei derartigen Betrachtungen das Prinzip der Homogenität von Raum und Zeit aufgeben:* Innerhalb des Raumzeitgebietes, das in der Fig. 31 durch das freigebliebene Rechteck dargestellt wird, herrschen andere Maßverhältnisse: die dortigen Raumzeitpunkte sind nicht gleichwertig den durch die äußeren Punkte dargestellten, und zwar kommt der Unterschied zum Ausdruck in der verschiedenen Krümmung der Raumzeitmannigfaltigkeit. In den äußeren Punkten ist die Mannigfaltigkeit „eben", sie besitzt die Krümmung 0, im Innern jenes Rechteckes hingegen ist sie „gekrümmt", besitzt also eine von 0 verschiedene Krümmung. — Derartige Vorstellungen werden nun im folgenden eine wichtige Rolle für uns spielen.

Zur Vorbereitung auf diese ausführlicheren Darlegungen wollen wir hier noch auf den Begriff der Krümmung (bei zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten) näher eingehen, auf den uns die letzten Betrachtungen führten. Wir machen deshalb einen kleinen **Exkurs in die Flächentheorie***), den ich auch dazu benutzen will, den Leser auch noch mit einem weiteren für die allgemeine Relativitätstheorie grundlegenden Begriffe, nämlich dem Begriffe der Kovarianz, vertraut zu machen.

Wir erinnern zunächst an die Definition der Krümmung einer ebenen Kurve als Quotient aus der Aenderung $d\alpha$ des Tangenten- (oder Normalen-)Neigungswinkels und dem zugehörigen Bogenelement ds der Kurve:

$$1) \qquad \varkappa = \frac{d\alpha}{ds}.$$

Diese Winkelgröße $d\alpha$, also den Winkel zwischen den beiden Normalen in den Endpunkten von ds, kann man nun ebenfalls als ein Bogenelement deuten, nämlich als das Element des Einheitskreises, das von Radien begrenzt wird, die jenen Kurvennormalen parallel sind. Daher sagt man auch, *die Krümmung $\varkappa$ sei das Verhältnis entsprechender Elemente des Einheitskreises und der Kurve, wenn man sich beide nach dem Gesetz der parallelen Normalen aufeinander abgebildet denkt*, d. h. als „entsprechende" Punkte immer solche ansieht, in denen die Normalen beider Kurven einander parallel sind.

In dieser Form läßt sich dann die Definition der Krümmung leicht von ebenen Kurven auf krumme Flächen im dreidimensionalen Raume übertragen: Wir bilden die betrachtete Fläche „mittels paralleler Normalen" auf die Einheitskugel ab, d. h. wir ordnen jedem Flächenpunkte den Kugelpunkt zu, dessen Radius der Normalen im Flächenpunkte parallel ist. Alsdann betrachten wir zwei einander nach diesem Gesetze entsprechende Elemente auf der krummen Fläche ($d\sigma$) und auf der Einheitskugel ($d\omega$) und definieren die Krümmung K der Fläche als den Quotienten dieser beiden Elemente:

$$2) \qquad K = \frac{d\omega}{d\sigma},$$

was natürlich so zu verstehen ist: als den Grenzwert dieses Quotienten bei fortgesetzter Verkleinerung der Elemente, wenn sich also $d\sigma$ auf einen Flächenpunkt zusammenzieht, so daß also K *eine Funktion der Lage eines Punktes auf der Fläche* ist.

Wie nun die Krümmung $\varkappa$ einer ebenen Kurve bekanntlich das Reziproke des Krümmungsradius ϱ der Kurve an der betreffenden Stelle ist,

$$1') \qquad \varkappa = \frac{1}{\varrho},$$

so hängt das von Gauss eingeführte Krümmungsmaß K einer krummen Fläche eng mit den Krümmungsradien der Normalschnitte der Fläche an der betreffenden Stelle zusammen: Legt man durch die Flächen-

*) Vieles wird ohne näheren Beweis angegeben, gleichsam nur rekapituliert werden. — Außerdem sei auch sogleich festgesetzt, daß wir nur reguläre Flächenpunkte betrachten, vor allem also absehen von Unstetigkeiten der zur Darstellung der Flächen benutzten Funktionen und ihrer Differentialquotienten, soweit wir von ihnen Gebrauch machen.

normale dieses Punktes verschiedene Ebenen, so gilt für den Krümmungsradius ϱ_φ eines Normalschnittes, dessen Ebene den Winkel φ gegen eine passend gewählte solche Normalebene bildet, die bekannte Eulersche Formel:

$$\frac{1}{\varrho_\varphi} = \frac{\cos^2\varphi}{P_1} + \frac{\sin^2\varphi}{P_2},$$

wenn P_1 und P_2 die sogenannten „Hauptkrümmungsradien" bedeuten, d. s. der größte und kleinste Normalschnittkrümmungsradius, die in zwei zueinander senkrechten Schnitten $\left(\varphi = 0 \text{ und } \varphi = \frac{\pi}{2}\right)$ anzutreffen sind. — Mit diesen Hauptkrümmungsradien hängt die Gausssche Krümmung K an der betreffenden Stelle dann durch folgende Formel zusammen:

2′) $$K = \frac{1}{P_1 P_2}. \quad —$$

Wie schon erwähnt wurde, ist K eine Funktion des Ortes auf der Fläche, und um zu ihrer analytischen Darstellung überzugehen, müssen wir zunächst Koordinaten auf der Fläche einführen. Zu diesem Zwecke denken wir uns die Fläche im folgenden stets nach Gauss dargestellt in Parameterform, d. h. die rechtwinkligen Koordinaten der Punkte der Fläche, als einer zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit, ausgedrückt durch 2 Parameter u und v:

3) $$x = \xi(u, v), \qquad y = \eta(u, v), \qquad z = \zeta(u, v).$$

Dann entspricht jedem Wertepaar u, v ein Punkt der Fläche, ebenso wie in der Ebene jedem Wertepaar x, y ein Punkt entspricht, und wir können daher u und v geradezu als Koordinaten auf der Fläche benutzen. — Alle Punkte, in denen u denselben Wert hat, bilden eine Kurve auf der Fläche, und wenn wir den konstanten Wert ändern, erhalten wir andere und andere Kurven, also eine einfache Kurvenschar, die Schar der Kurven $u = \text{const}$, und ebenso erhält man eine zweite Schar von Kurven $v = \text{const}$. Diese beiden Scharen von „Parameterlinien" $u = \text{const}$ und $v = \text{const}$ treten dann auf der Fläche an die Stelle der Parallelen zu den Koordinatenachsen in der Ebene [vgl. Fig. 28, S. 148].

Am geläufigsten sind uns diese Verhältnisse auf der Kugel, für welche die Parameterdarstellung:

3a) $$x = R \sin v \cdot \cos u, \qquad y = R \sin v \cdot \sin u, \qquad z = R \cos v$$

gilt. Darin sind augenscheinlich u und v, die Koordinaten auf der Kugel, wie üblich die geographische Länge und Breite (oder genauer das Komplement der letzteren) und die Parameterlinien sind also die Meridiane und Parallelkreise.

Führen wir nun auf einer Fläche solche Gausssche krummlinige Koordinaten u und v ein, so ist die Krümmung K eine Funktion derselben:

4) $$K = K(u, v).$$

Nun ist es aber klar, daß man auf ein und derselben Fläche auf sehr verschiedene Arten solche krummlinige Koordinaten einführen kann. So kann man z. B. die oben durch die Gleichungen (3a) dargestellte Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ auch mit Hilfe zweier anderer Parameter u' und v' folgendermaßen darstellen:

$$x = \frac{Ru'}{\sqrt{1+u'^2+v'^2}}, \qquad y = \frac{Rv'}{\sqrt{1+u'^2+v'^2}}, \qquad z = \frac{R}{\sqrt{1+u'^2+v'^2}},$$

und dann natürlich auch diese Größen u' und v' als Koordinaten auf der Kugelfläche benutzen. Ja man sieht sofort, daß man an Stelle von u und v in im wesentlichen willkürlicher Weise neue Parameter u' und v' einführen kann durch Gleichungen von der Form:

5) $$u = \lambda(u', v'), \qquad v = \mu(u', v').$$

Die Gleichungen müssen nur unabhängig voneinander sein (also die Funktionaldeterminante der Funktionen λ und μ muß von 0 verschieden sein), man muß die Gleichungen nach u' und v' auflösen, jedes Wertepaar u, v durch ein Wertepaar u', v' ausdrücken können. Dann können wir tatsächlich die Lage eines Punktes auf der Fläche ebensogut durch Angabe der zugehörigen Werte von u', v' wie von u, v bestimmen, und das heißt ja u' und v' als Koordinaten auf der Fläche benutzen.

Dann verwandelt sich augenscheinlich die Krümmung K in eine Funktion von u' und v':

6) $$K = K(\lambda(u', v'), \mu(u', v')) \equiv K'(u', v').$$

Im allgemeinen wird natürlich diese Abhängigkeit der Krümmung K von den neuen Parametern u' und v' eine ganz andere sein als die von u und v. Numerisch hat K selbstverständlich in einem bestimmten Flächenpunkte denselben Wert, ob wir diesen Punkt betrachten im u, v- oder im u', v'-System, aber formal wird es sich durch die Koordinaten u', v' im allgemeinen ganz anders darstellen als durch u, v; es sind eben die „Funktionen" K' und K nicht identisch. Wir werden daher unter Benutzung einer früher von uns benutzten Bezeichnungsweise sagen:

Satz 3. — *Die Krümmung K verhält sich beim Uebergang von einem Koordinatensystem auf der Fläche zu einem anderen im allgemeinen nicht invariant* — oder noch deutlicher: Man erhält den Ausdruck für K in u' und v' nicht etwa einfach dadurch, daß man K zunächst durch u und v ausdrückt und dann diesen Größen überall einen Akzent beilegt. — Und doch kann man für die Transformation von K von einem System auf ein anderes einfache Regeln angeben; denn wenn die Größe K auch nicht invariant ist, so kann man vielleicht doch sagen, es hänge ihr noch ein gewisser Rest von Invarianz an.

Um das näher auseinanderzusetzen, müssen wir genauer auf die analytische Darstellung von K eingehen: Da spielen die sogenannten Fundamentalgrößen erster und zweiter Ordnung der Flächentheorie eine große Rolle. Für die durch (3) gegebene Parameterdarstellung der Fläche sind die Fundamentalgrößen erster Ordnung E, F, G folgendermaßen definiert:

7_1)
$$\begin{cases} E = \left(\frac{\partial\xi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial u}\right)^2, \qquad G = \left(\frac{\partial\xi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial v}\right)^2, \\ F = \frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial v} + \frac{\partial\eta}{\partial u}\frac{\partial\eta}{\partial v} + \frac{\partial\zeta}{\partial u}\frac{\partial\zeta}{\partial v}. \end{cases}$$

Fügen wir diesen noch die vierte Größe D hinzu, für welche die Gleichung

$7_1'$) $$D^2 = EG - F^2 \qquad (>0)$$

gilt, so sind die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung folgendermaßen darstellbar:

$$L = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2\xi}{\partial u^2} & \frac{\partial^2\eta}{\partial u^2} & \frac{\partial^2\zeta}{\partial u^2} \\ \frac{\partial\xi}{\partial u} & \frac{\partial\eta}{\partial u} & \frac{\partial\zeta}{\partial u} \\ \frac{\partial\xi}{\partial v} & \frac{\partial\eta}{\partial v} & \frac{\partial\zeta}{\partial v} \end{vmatrix}, \qquad N = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2\xi}{\partial v^2} & \frac{\partial^2\eta}{\partial v^2} & \frac{\partial^2\zeta}{\partial v^2} \\ \frac{\partial\xi}{\partial u} & \frac{\partial\eta}{\partial u} & \frac{\partial\zeta}{\partial u} \\ \frac{\partial\xi}{\partial v} & \frac{\partial\eta}{\partial v} & \frac{\partial\zeta}{\partial v} \end{vmatrix}$$

7_2)

$$M = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2\xi}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2\eta}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2\zeta}{\partial u\,\partial v} \\ \frac{\partial\xi}{\partial u} & \frac{\partial\eta}{\partial u} & \frac{\partial\zeta}{\partial u} \\ \frac{\partial\xi}{\partial v} & \frac{\partial\eta}{\partial v} & \frac{\partial\zeta}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Mittels dieser 6 Größen E, F, G, L, M, N läßt sich dann die Gausssche Krümmung K leicht darstellen, es gilt die Formel:

8) $$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

Um also K von einem Koordinatensystem u, v auf ein anderes u', v' umzurechnen, braucht man hiernach nur die 6 Fundamentalgrößen von neuem für die neue Parameterdarstellung mittels u', v' zu bestimmen. — Diese Regel läßt sich sogar noch weiter vereinfachen: In Wahrheit braucht man nur die 3 Fundamentalgrößen *erster* Ordnung neu zu bestimmen, denn wenn sich auch nicht L, M, N einzeln durch E, F, G und ihre Ableitungen ausdrücken lassen, so gilt dies doch von der Verbindung $LN - M^2$. Es ist nämlich nach dem Determinantenmultiplikationssatz

$$L \cdot N = \frac{1}{D^2}\begin{vmatrix} \sum_{\xi,\eta,\zeta} \frac{\partial^2\xi}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial v^2} & \left\{\cdots\right\} & \left\{\cdots\right\} \\ \left\{\cdots\right\} & E & F \\ \left\{\cdots\right\} & F & G \end{vmatrix},$$

wo an allen Stellen, an denen $\left\{\cdots\right\}$ steht, Produktsummen aus ersten *und* zweiten Differentialquotienten von ξ, η, ζ eingerückt zu denken sind. Derartige Produktsummen lassen sich aber leicht durch die Differentialquotienten von E, F, G ausdrücken, z. B. ist

$$\sum_{\xi,\eta,\zeta} \frac{\partial\xi}{\partial u}\,\frac{\partial^2\xi}{\partial u^2} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial E}{\partial u} \qquad \sum_{\xi,\eta,\zeta} \frac{\partial\xi}{\partial v}\,\frac{\partial^2\xi}{\partial u^2} = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial E}{\partial v}.$$

Bilden wir nun analog wie oben $L \cdot N$ auch noch M^2, so erhalten wir einen ganz entsprechenden Ausdruck, nur daß das erste Glied der

Determinante jetzt $\sum_{\xi,\eta,\zeta}\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial u\,\partial v}\right)^2$ ist, so daß unter Rücksicht auf $(7_1')$ folgt:

$$LN - M^2 = \sum_{\xi,\eta,\zeta}\left[\frac{\partial^2\xi}{\partial u^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2\xi}{\partial u\,\partial v}\right)^2\right] + \left\{E, F, G, \frac{\partial E}{\partial u}, \ldots \frac{\partial G}{\partial v}\right\},$$

wo die geschweifte Klammer einen von den angedeuteten Größen nach bestimmten Gesetzen abhängigen Ausdruck darstellt, auf dessen Bau es uns hier aber nicht weiter ankommt. —

Für die Summe rechterhand läßt sich nun aber unschwer die Darstellung errechnen:

$$\sum_{\xi,\eta,\zeta}\left[\frac{\partial^2\xi}{\partial u^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2\xi}{\partial u\,\partial v}\right)^2\right] = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\right),$$

so daß sich schließlich nach (8) das Resultat ergibt:

$$9)\qquad K = -\frac{1}{2D^2}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\right) + \left\{E, F, G, \frac{\partial E}{\partial u}, \ldots \frac{\partial G}{\partial v}\right\},$$

und damit ist unsere Behauptung erwiesen, daß *sich K allein durch die Fundamentalgrößen erster Ordnung E, F, G und ihre Differentialquotienten darstellen läßt.*

Um also die Krümmung $K(u, v)$ in andere Koordinaten u', v' umzurechnen, kann man so vorgehen, daß man nach (7_1) die Fundamentalgrößen erster Ordnung für die neuen Koordinaten bestimmt. Dann hängt K von diesen neuen Fundamentalgrößen E', F', G' und den neuen Koordinaten u', v' in genau derselben Weise ab wie früher von E, F, G und den alten Koordinaten u, v. — Man kann also auch sagen: Beim Uebergang zu neuen Koordinaten ändert sich der Ausdruck für K nur insoweit, wie sich die Ausdrücke für die Fundamentalgrößen erster Ordnung ändern — und dafür gebraucht man auch die kürzere Ausdrucksweise:

Satz 4a. — *Die Krümmung K ist eine „Kovariante" der Fundamentalgrößen erster Ordnung.*

Diese Kovarianz zu den Fundamentalgrößen erster Ordnung ist das, was wir oben als letzten Rest der Invarianz bezeichneten.

Was nun die Fundamentalgrößen erster Ordnung E, F, G anlangt, die durch diese Ueberlegungen so an Bedeutung gewinnen, so definiert man sie am bequemsten als die Koeffizienten in dem Ausdruck für das Quadrat des Linienelementes

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

durch die Inkremente du und dv:

$$10)\qquad ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

und sagt dann auch kürzer:

Satz 4b. — *K ist eine Kovariante dieser quadratischen Differentialform* (10), *und das bedeutet also: Um den Ausdruck für das Krümmungsmaß K in einem neuen Koordinatensystem u', v' zu erhalten, braucht man nur jene Differentialform in das neue System umzurechnen:*

$$11)\quad E(u,v)\,du^2 + 2F(u,v)\,du\,dv + G(u,v)\,dv^2 = E'(u',v')\,du'^2 + 2F'(u',v')\,du'\,dv' + G'(u',v')\,dv'^2$$

Alsdann hängt das Krümmungsmaß in den neuen Variablen u', v' ebenso von den Koeffizienten E', F', G' der neuen Form ab, wie in den alten Koordinaten u, v von den Koeffizienten E, F, G der ursprünglichen Form.

In diesem Satze ist zugleich das Gesetz zur Transformation der „Fundamentalgrößen erster Ordnung" auf andere krummlinige Koordinatensysteme enthalten, d. h. das Gesetz, nach welchem man die Fundamentalgrößen in einem neuen Systeme erhält, wenn sie in einem anderen gegeben sind. Denn ist die Beziehung zwischen den Koordinaten u, v und u', v' beider Systeme z. B. durch die Gleichungen (5) gegeben, so erhält man nicht etwa $E'(u', v')$ einfach durch „Umrechnen" von $E(u, v)$ in u', v', also etwa gleich $E(\lambda(u', v'), \mu(u', v'))$, sondern „umrechnen" muß man eben die quadratische Differentialform (10) in die Inkremente du' und dv' der neuen Koordinaten unter Berücksichtigung der Beziehungsgleichungen

$$5') \qquad du = \frac{\partial\lambda}{\partial u'}du' + \frac{\partial\lambda}{\partial v'}dv', \qquad dv = \frac{\partial\mu}{\partial u'}du' + \frac{\partial\mu}{\partial v'}dv'.$$

So ergeben sich denn, wie man leicht sieht, für die Koeffizienten E', F', G' der neuen quadratischen Form von du' und dv':

$$11') \begin{cases} E'(u',v') = E(\lambda,\mu)\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u'}\right)^2 + 2F(\lambda,\mu)\frac{\partial\lambda}{\partial u'}\frac{\partial\mu}{\partial u'} + G(\lambda,\mu)\left(\frac{\partial\mu}{\partial u'}\right)^2 \\ F'(u',v') = E(\lambda,\mu)\frac{\partial\lambda}{\partial u'}\frac{\partial\lambda}{\partial v'} + F(\lambda,\mu)\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u'}\frac{\partial\mu}{\partial v'} + \frac{\partial\mu}{\partial u'}\frac{\partial\lambda}{\partial v'}\right) + G(\lambda,\mu)\frac{\partial\mu}{\partial u'}\frac{\partial\mu}{\partial v'} \\ G'(u',v') = E(\lambda,\mu)\left(\frac{\partial\lambda}{\partial v'}\right)^2 + 2F(\lambda,\mu)\frac{\partial\lambda}{\partial v'}\frac{\partial\mu}{\partial v'} + G(\lambda,\mu)\left(\frac{\partial\mu}{\partial v'}\right)^2, \end{cases}$$

wo als Argumente von λ und μ immer u' und v' zu denken sind. —

Wenn wir oben sagten, die Gausssche Krümmung K sei „kovariant" zu der quadratischen Differentialform $E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$, weil sie sich bei Uebergängen zu anderen Systemen nur insoweit ändert wie sich diese Form (ihre Koeffizienten) ändert, so liegt hierin bereits enthalten, daß, wenn die Differentialform ungeändert bleibt, dasselbe auch die Größe K tut, daß also *in der Kovarianz als Spezialfall die Invarianz enthalten ist.*

Diesen Spezialfall wollen wir nun noch etwas näher auseinandersetzen: Wir nehmen also einmal an, wir könnten anstelle von u, v auf der betrachteten Fläche andere Koordinaten u', v' derart einführen, daß die Fundamentalgrößen E', F', G' sich in den neuen Koordinaten formal genau so darstellen, wie E, F, G in u und v, daß also

$$E'(u', v') \equiv E(u', v'), \qquad F'(u', v') \equiv F(u', v'), \qquad G'(u'\,v') \equiv G(u', v')$$

sei, oder, daß sich die Funktionen E, F, G bei den Transformationen (11′) gleichsam selber reproduzierten. Diese Annahme können wir auch dahin aussprechen, daß wir sagen: Beim Uebergange zu diesen neuen Koordinaten solle die Differentialform

$$E(u,v)\,du^2 + 2F(u,v)\,du\,dv + G(u,v)\,dv^2 \qquad \textit{invariant}$$

sein, d. h. das Resultat ihrer Umrechnung auf die neuen Koordinaten solle darin bestehen, daß einfach überall an die Stelle von u, v die gestrichelten Größen u', v' getreten sind. Dann folgt nach Formel (9), daß

das Gleiche auch von dem Ausdruck für das Krümmungsmaß gilt; es wird dann auch

$$K'(u', v') \equiv K(u', v'),$$

wir erhalten die Darstellung in den neuen Koordinaten, indem wir in der Darstellung durch die alten Koordinaten diese einfach überall mit einem Akzent versehen, oder kurz gesagt: es ist dann auch $K(u, v)$ invariant. — Somit erhalten wir denn den folgenden

Satz 5. — *Gegenüber Koordinatentransformationen, welche die quadratische Differentialform (Quadrat des Linienelementes)*

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \qquad invariant$$

lassen, verhält sich auch das Gaussssche *Krümmungsmaß*

$$K(u, v) \qquad invariant,$$

wofür wir auch kürzer sagen: Es ist

12) $K(u, v)$ *invariant zugleich mit* $E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$.

Es artet in diesem Falle also die Kovarianz aus in die „gleichzeitige Invarianz" — wir haben demnach in der Kovarianz eine gewisse Verallgemeinerung des Begriffes der Invarianz zu erblicken, und wir waren daher oben tatsächlich berechtigt, die Kovarianz der Krümmung zu den Fundamentalgrößen erster Ordnung als „Rest der Invarianz" zu bezeichnen. —

Nachdem wir so am Beispiele der Gaussschen Krümmung den Begriff der Kovarianz und ihren Zusammenhang mit der Invarianz auseinandergesetzt haben, kehren wir jetzt am Schlusse des Paragraphen zur Relativitätstheorie zurück: Wir haben oben S. 140 als eine Folgerung aus dem Einsteinschen Aequivalenzprinzip gefunden, daß die Naturgesetze beim Uebergange zu beliebigen anderen Bezugssystemen sich nur insoweit ändern dürften, als sich die wahrgenommenen Gravitationsfelder änderten. Dieser Satz klingt nun sehr stark an unser obiges Resultat bezüglich des Krümmungsmaßes an, das sich beim Uebergang zu einem anderen Bezugssystem nur insoweit ändern sollte, als sich die Koeffizienten der quadratischen Differentialform (10) ändern. Wie wir nun auf Grund dieser Feststellung sagten, K sei kovariant zu jener Differentialform, so werden wir in demselben Sinne also auch sagen können:

Satz 6. — *Die Naturgesetze sind kovariant zu den Gravitationsfeldern.*

In dieser Fassung ist das Resultat freilich noch wenig präzise, da wir ja noch gar keinen analytischen Ausdruck für „Gravitationsfelder" besitzen. Einen solchen zu ermitteln, wird also unsere nächste Aufgabe sein müssen.

§ 3.

Der analytische Ausdruck für das Gravitationsfeld. Das allgemeine Relativitätsprinzip.

Wir suchen nun nach einer analytischen Beschreibung von Gravitationsfeldern, also nach einem Ausdruck, zu dem nach unseren letzten Ueberlegungen die Naturgesetze kovariant sein sollen. Einen Finger-

zeig, wie wir da vorzugehen haben, gibt uns die spezielle Relativitätstheorie, die zwar nicht von „Kovarianz" spricht, wohl aber in unserer jetzigen Ausdrucksweise einen Fall „gleichzeitiger Invarianz" behauptet. Ja, den Hauptsatz der speziellen Relativitätstheorie können wir geradezu so aussprechen: *Wenn keine Gravitationsfelder vorhanden sind, sind die Naturgesetze*

$$\mathfrak{N}\{x, y, z, t\} \text{ invariant zugleich mit } c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2,$$

denn die Transformationen, welche diese letztere quadratische Differentialform invariant ließen, waren ja gerade die LORENTZ-Transformationen" [vgl. S. 105], denen gegenüber tatsächlich auch die Naturgesetze invariant sein sollten [vgl. S. 54].

Die Einschränkung „wenn keine Gravitationsfelder vorhanden sind" bedeutet nun nach unseren Ausführungen auf S. 146 ein Doppeltes: erstlich, daß sich in den betrachteten Gebieten durch passende Wahl von Bezugssystemen die Gravitationswirkungen überhaupt beseitigen lassen („LORENTZ-Gebiete"), und zweitens, daß wir dann auch gerade diese speziellen Bezugssysteme zugrunde legen („LORENTZ-Systeme").

Wir halten nun zunächst einmal an der Betrachtung von LORENTZ-*Gebieten* fest, gehen in ihnen aber von einem LORENTZ-System zu einem beliebigen anderen (nicht LORENTZschen) Bezugssysteme über. Dann wird bei diesem Uebergange die Differentialform $c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ ihre Gestalt ändern, also schon diese nicht mehr invariant sein — von einer gleichzeitigen Invarianz der Naturgesetze kann also keine Rede mehr sein. — Da legt denn die Analogie mit dem Krümmungsmaß K den Schluß sehr nahe, *daß die Naturgesetze zu der Form* $c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ *wenigstens noch kovariant bleiben.* Dann würden wir also in der transformierten quadratischen Differentialform (d. h. natürlich in ihren Koeffizienten) den analytischen Ausdruck für das Gravitationsfeld zu erblicken haben, das jetzt ein Beobachter von dem neuen Bezugssysteme aus tatsächlich auch in dem LORENTZ-Gebiete wahrzunehmen glaubt.

Der Einfachheit halber wollen wir uns zunächst immer wieder auf eine räumlich eindimensionale Welt (x-Achse) beschränken, so daß also die „Fundamentalform", wie wir sie von jetzt an nennen werden, bei Zugrundelegung eines LORENTZ-Systems die einfache Gestalt annimmt:

$$1) \qquad c^2\,dt^2 - dx^2$$

Denken wir uns nun in der x-Achse ein gegen dieses LORENTZ-System irgendwie beschleunigtes anderes Raumzeitsystem (u, v) eingeführt, so nimmt die Form die Gestalt an:

$$1') \qquad e(u, v)\,du^2 + 2f(u, v)\,du\,dv + g(u, v)\,dv^2,$$

und nach unserem obigen Schlusse würde dann das von diesem neuen System aus wahrzunehmende Gravitationsfeld seinen analytischen Ausdruck in den Koeffizientenfunktionen e, f, g finden, und die Naturgesetze, dargestellt in diesem neuen Systeme, würden von diesen Funktionen e, f, g formal genau so abhängen, wie im LORENTZ-System von den entsprechenden Koeffizienten c^2, 0, -1 — denn das ist ja eben die Forderung der Kovarianz.

Das alles bezieht sich bisher nur auf LORENTZ-Gebiete, Gebiete, in denen bei passender Wahl der Bezugssysteme die spezielle Relativitätstheorie gilt, Gebiete, in denen wir die Gravitationsfelder weg-

transformieren können, in denen also in unserer früheren Ausdrucksweise die Gravitationsfelder als nur „vorgetäuscht" angesehen werden dürfen. Solche vorgetäuschten Gravitationsfelder werden also durch die Koeffizienten einer quadratischen Differentialform beschrieben. Da nun aber zwischen vorgetäuschten und wirklichen (nicht wegzutransformierenden) Gravitationsfeldern nach dem Aequivalenzprinzipe kein prinzipieller Unterschied besteht, so liegt es nun weiter nahe, diese Art der Beschreibung von Gravitationsfeldern von den vorgetäuschten auch auf beliebige Felder auszudehnen, also jedem (eindimensionalen) Gravitationsfelde, gleichgültig, auf was für ein Raumzeitsystem (u, v) wir es beziehen, *eine gewisse quadratische Differentialform zuzuordnen:*

$$2) \qquad e\,(u, v)\,du^2 + 2f\,(u, v)\,du\,dv + g\,(u, v)\,dv^2,$$

es gleichsam durch die Koeffizienten e, f, g dieser Form zu beschreiben. — Wir bezeichnen daher e, f, g als die „Komponenten des Gravitationsfeldes" in dem zugrunde gelegten Raumzeitbezugssystem, und bilden uns damit also die Vorstellung, daß sie abhängen von der Verteilung der das Feld erzeugenden Massen — und dann verlangen wir also auch hier, daß *bei Uebergängen zu anderen Bezugssystemen die Naturgesetze kovariant zu dieser Differentialform sind.*

Darin liegt bereits enthalten, daß bei Umrechnung der Form auf neue Raumzeitkoordinaten (u', v') die Koeffizienten der umgerechneten Form

$$2') \qquad e'(u', v')\,du'^2 + 2f'(u', v')\,du'\,dv' + g'(u', v')\,dv'^2$$

die Komponenten des Gravitationsfeldes in dem neuen Systeme darstellen, und von ihnen hängt dann die Darstellung der Naturgesetze in diesem neuen Systeme genau so ab, wie die im alten Systeme von den Koeffizienten e, f, g der ursprünglichen Form. — Alles nehmen wir also ganz genau so an wie oben in den Lorentz-Gebieten, der einzige Unterschied besteht darin, daß sich jetzt eben das Gravitationsfeld nicht wegtransformieren, oder, was dasselbe, die Fundamentalform (2) sich nicht durch Einführung neuer Koordinaten auf die spezielle Gestalt (1) bringen läßt.

Zusammenfassung. — *Es erscheint als eine naturgemäße Verallgemeinerung der (räumlich eindimensionalen) speziellen Relativitätstheorie, die Naturgesetze beim Uebergang zu anderen Raumzeitsystemen kovariant zu einer bestimmten quadratischen Differentialform*

$$(2) \qquad e\,(u, v)\,du^2 + 2f\,(u, v)\,du\,dv + g\,(u, v)\,dv^2$$

anzunehmen („Fundamentalform" in den Raumzeitkoordinaten u, v). — Da die Naturgesetze aber beim Uebergang zu neuen Bezugssystemen sich nur insoweit ändern sollten, als die wahrgenommenen Gravitationsfelder sich ändern (da sie „kovariant zu den Gravitationsfeldern" sein sollten), so liegt in dieser Annahme enthalten, daß in den Koeffizienten e, f, g der Fundamentalform die Gravitationsfelder ihren analytischen Ausdruck finden, und daß diese Koeffizienten also abhängen von der Verteilung der die Felder erzeugenden Massen. Man bezeichnet diese Koeffizienten daher als die „Komponenten des Gravitationsfeldes" im Raumzeitsystem (u, v).

Soweit das allgemeine — im einzelnen wäre noch folgendes hinzuzufügen:

Zusatz I. — *In Lorentz-Gebieten, d. h. in Raumzeitgebieten von endlicher Ausdehnung, in denen man Bezugssysteme einführen kann, von*

denen aus keine Gravitationswirkungen wahrzunehmen sind, gilt mit bezug auf diese „LORENTZ-Systeme" die spezielle Relativitätstheorie, und die Fundamentalform (2) *nimmt in diesen Systemen die spezielle Gestalt*

$$(1) \qquad c^2\,dt^2 - dx^2$$

an. — Die in solchen Gebieten von anderen Raumzeitsystemen (u, v) *aus wahrgenommenen Gravitationsfelder sind dann also als analytisch charakterisiert anzusehen durch die Koeffizienten der durch Umrechnung aus dieser entstehenden neuen Form*

$$(1') \qquad e\,(u, v)\,du^2 + 2f\,(u, v)\,du\,dv + g\,(u, v)\,dv^2,$$

während in wirklichen Gravitationsfeldern, d. h. solchen, die sich nicht in endlicher Ausdehnung wegtransformieren lassen, sich die Fundamentalform (2) *nicht durch die Einführung neuer Variablen auf die spezielle Form* (1) *umrechnen läßt.*

In welcher Weise die „Komponenten eines Gravitationsfeldes" von den es erzeugenden Massen abhängen, darüber weiß man bisher nur in wenigen Spezialfällen genauer Bescheid, und auf diese Frage können wir hier einstweilen noch nicht eingehen. Wir denken uns daher im folgenden immer von einem Gravitationsfelde direkt seine Komponenten e, f, g oder die zugehörige Fundamentalform (2) gegeben, sehen also direkt e, f, g als gegebene Funktionen der Variablen u, v an. — Dann entsteht die Frage, ob das so gegebene Gravitationsfeld ein wirkliches ist oder nur ein in einem LORENTZ-Gebiete vorgetäuschtes. Die Entscheidung dieser Frage kommt nach obigem analytisch auf die andere hinaus, ob wir die gegebene Form (2) durch Einführung neuer Variablen auf die spezielle Form (1) bringen können oder nicht. Auch die Beantwortung dieser Frage in ihrer vollen Allgemeinheit müssen wir auf später verschieben [vgl. unten S. 172 u. 218].

Nur unter gewissen Voraussetzungen können wir die Antwort bereits hier geben. Wir wollen uns nämlich auf so kleine Raumzeitgebiete beschränken, daß wir e, f, g als Konstanten ansehen dürfen. Es handele sich um die Nachbarschaft des durch die Werte u_0, v_0 charakterisierten Raumzeitpunktes. Dann setzen wir also

$$e = e\,(u_0, v_0) \equiv e_0, \qquad f = f\,(u_0, v_0) \equiv f_0, \qquad g = g\,(u_0, v_0) \equiv g_0,$$

und nun handle es sich um die Transformation der quadratischen Differentialform mit *konstanten* Koeffizienten

$$2\,a) \qquad e_0\,du^2 + 2f_0\,du\,dv + g_0\,dv^2.$$

In dieser können wir, wie aus der Transformationstheorie der Kurven zweiter Ordnung bekannt ist, stets durch lineare Substitutionen zwischen den Inkrementen (oder auch, was hier dasselbe, den Variablen):

$$3) \qquad du' = \alpha\,du + \beta\,dv, \qquad dv' = \gamma\,du + \delta\,dv$$

das Produktglied in (2a) zum Verschwinden bringen, also der Form die Gestalt geben:

$$A\,du'^2 + B\,dv'^2,$$

und damit ist ja im wesentlichen die Reduktion auf die Form (1) erreicht. Wir brauchen nur noch weiter

$$3') \quad \sqrt{A}\,du' = c\cdot dt, \quad \sqrt{-B}\,dv' = dx \quad (\text{bzw. } \sqrt{-A}\,du' = dx, \ \sqrt{B}\,dv' = c\cdot dt)$$

zu setzen, um direkt die Form (1) zu erhalten, und damit wäre analytisch bewiesen, daß wir in unendlich kleinen Gebieten stets „LORENTZ-

Systeme" einführen oder das Gravitationsfeld wegtransformieren können, oder daß wir sie stets als LORENTZ-Gebiete ansehen dürfen, oder daß in ihnen stets die spezielle Relativitätstheorie gilt — alles nur verschiedene Ausdrücke für dieselbe Tatsache. Diese steht in bestem Einklang mit der früher angestellten, mehr physikalischen Ueberlegung, nach der man Gravitationsfelder in kleinen Bezirken, nämlich soweit man sie als homogen ansehen darf, stets wegtransformieren kann. — Allerdings muß man, wenn die Transformationen (3′) im reellen durchführbar sein sollen, annehmen, daß von den beiden Größen A und B die eine positiv und die andere negativ ist, und das erfordert, wie bekannt, die Erfüllung der Bedingung

$$e_0 g_0 - f_0^2 < 0$$

durch die Koeffizienten der ursprünglichen Form (2a). Um also den analytischen Beweis des Satzes von der „Wegtransformierbarkeit jedes Gravitationsfeldes im Kleinen" aufrecht erhalten zu können, müssen wir, und zwar für ganz beliebige Argumentwerte u_0, v_0 diese letztere Bedingung als erfüllt ansehen. — Das wollen wir im folgenden immer tun; dann erhalten wir folgenden

Zusatz 2. — *Wir nehmen an, daß die Funktionen e, f, g, die Komponenten des Gravitationsfeldes, in beliebigen Raumzeitpunkten u, v der Bedingung*

4) $$eg - f^2 < 0$$

genügen. Alsdann gilt in kleinen Bezirken („im Unendlichkleinen") die spezielle Relativitätstheorie, denn in ihnen kann man dann stets durch Einführung neuer Raumzeitkoordinaten die wahrgenommenen Gravitationsfelder wegtransformieren und die Fundamentalform in die spezielle Gestalt

(1) $$c^2 dt^2 - dx^2$$

versetzen).*

Die Beschränkung auf (unendlich) kleine Gebiete ist durchaus notwendig, denn nur solange wir die Koeffizienten e, f, g als konstant ansehen, wie oben in (2a), sind die angegebenen Transformationen durchführbar. Zwar können wir auch ganz allgemein bei unbestimmten u, v solche linearen Substitutionen (3) der Inkremente angeben, durch die das Produktglied in der quadratischen Form (2) beseitigt wird, doch hängen dann naturgemäß die Substitutionskoeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ noch von u und v ab, und dann ist es fraglich, ob $\alpha\,du + \beta\,dv$ und $\gamma\,du + \delta\,dv$ totale Differentiale, ob also die Gleichungen (3) integrabel sind, und daher dazu dienen können, auch neue Variable u' und v' (nicht nur Inkremente du' und dv') einzuführen. — So sehen wir, daß das obige Verfahren, die allgemeine Form (2) auf die spezielle Gestalt (1) zu bringen, tatsächlich auf infinitesimale Gebiete beschränkt ist, und daß im allgemeinen diese Reduktion in Gebieten von endlicher Ausdehnung nicht möglich sein wird.

Also für Gebiete von endlicher Ausdehnung, aber auch nur für solche, bedeutet die Annahme der Reduzierbarkeit der Fundamentalform auf die Gestalt (1) eine Einschränkung. Wenn diese Reduzierbarkeit vorliegt, sprechen wir von einem „LORENTZ-Gebiete", anderenfalls von einem „wirklichen Gravitationsfelde". Darum defi-

*) Auf dieses Resultat werde ich noch mehrfach zurückkommen [vgl. z. B. den Zusatz 2, S. 172], speziell auch auf sein Verhältnis zu dem ihm scheinbar widersprechenden Satz 1, S. 132.

nierten wir auch schon oben (S. 159) ein LORENTZ-Gebiet ausdrücklich als ein Raumzeitgebiet „von endlicher Ausdehnung", in dem sich die Gravitationswirkungen wegtransformieren lassen.

Die analytischen Kriterien, wann wir die Fundamentalform in solchen endlich ausgedehnten Gebieten („im Großen") auf die spezielle Form (1) bringen können, werden wir, wie gesagt, erst später kennen lernen — nur einen Fall lehren uns schon unsere obigen Betrachtungen kennen, in dem diese Reduktion sicher durchführbar ist, nämlich wenn die Koeffizienten e, f, g der Fundamentalform (2) von vornherein (auch in Gebieten von endlicher Ausdehnung) konstant sind. — So ergibt sich folgender

Spezialsatz. — *Sind die Koeffizienten der Fundamentalform* (2) *konstant, so liegt sicher ein LORENTZ-Gebiet vor.*

Danach können wir also die Frage, wann eine Fundamentalform einem LORENTZ-Gebiete entspricht, allgemeiner als früher, dahin beantworten: wenn sie sich durch Einführung neuer Variablen in eine Form mit konstanten Koeffizienten überführen läßt. —

Wir haben hier immer von der Einführung neuer Bezugssysteme oder der Einführung neuer Raumzeitkoordinaten gesprochen. Was sind das denn nun für Transformationen, die wir so als „Einführung neuer Raumzeitkoordinaten" deuten können? — Da wollen wir uns denn zwei beliebige (im allgemeinen also auch beschleunigt) gegeneinander bewegte eindimensionale Raumzeitsysteme denken. Diese bestehen also zunächst aus zwei sich in derselben Geraden verschiebenden Achsen (x- bzw. x'-Achse), ferner gewissen dazu gehörigen Maßstäben oder besser gesagt, bestimmten Festsetzungen zur Messung von Längen (Abszissen) in jedem Systeme, denn wir wollen Möglichkeiten wie z. B. die früher erörterte, daß sich alle Längen bei Annäherung an eine Stelle vergrößern oder verkleinern, nicht ausschließen; und endlich ist jedes der beiden Systeme noch versehen zu denken mit lauter Uhren, die jetzt aber durchaus nicht im EINSTEINschen Sinne „synchron" zu sein brauchen, sondern beliebig reguliert und gegeneinander gestellt sein dürfen. Es kommt eben nur darauf an, daß man mittels der Instrumente in beiden Systemen jedes Ereignis in der x- bzw. x'-Achse räumlich und zeitlich zu werten imstande ist; dann können wir auch die entsprechenden Raum- und Zeitwerte als „Raumzeitkoordinaten" in dem betreffenden Systeme ansehen.

Betrachten wir nun dasselbe Ereignis von diesen beiden sehr allgemeinen Systemen aus: seine Raumzeitkoordinaten seien x, t bzw. x', t'. Dann müssen sich diese eindeutig entsprechen, zu dem Wertepaar x, t gehört ein bestimmtes x' und ebenso ein bestimmtes t', es ist also:

$$5) \qquad x' = \xi(x, t) \qquad \text{und} \qquad t' = \tau(x, t).$$

Jeder Uebergang von irgendeinem Raumzeitsystem zu einem anderen läßt sich also durch Transformationsformeln dieser Art mit eindeutigen und auch eindeutig umkehrbaren Funktionen ξ und τ darstellen, und läßt sich demnach, ähnlich wie wir das schon früher auseinandersetzten, geometrisch veranschaulichen durch den Uebergang von einem ebenen Koordinatensystem zu einem anderen, z. B. von einem rechtwinkligen zu einem krummlinigen. Diesem Falle entsprechen unsere beiden Figuren 32 a und b. In der ersteren sind speziell x und t, in der zweiten x' und t' als rechtwinklige Koordinaten gedeutet.

Die beiden Funktionen ξ und τ können natürlich bei der großen

Willkür, die bei der Festlegung der beiden durch sie verbundenen Raumzeitsysteme herrschte, sehr verschieden aussehen, und da entsteht denn die Frage, ob wir diese Funktionen wirklich ganz beliebig wählen dürfen, oder ob wir, wenn wir durch beliebige Gleichungen von der Form (5):

6) $$u = \xi(x, t) \qquad \text{und} \qquad v = \tau(x, t)$$

irgend zwei Funktionen u und v von x und t einführen, diese wieder als Raum- und Zeitkoordinaten in einem neuen Bezugssysteme deuten können. — Die Beantwortung dieser Frage hängt natürlich davon ab, wie weite Konzessionen wir bei der Definition der „Zeit" zu machen bereit sind. Ich möchte meinen, daß wir die Frage in dieser Allgemeinheit doch verneinen müssen.

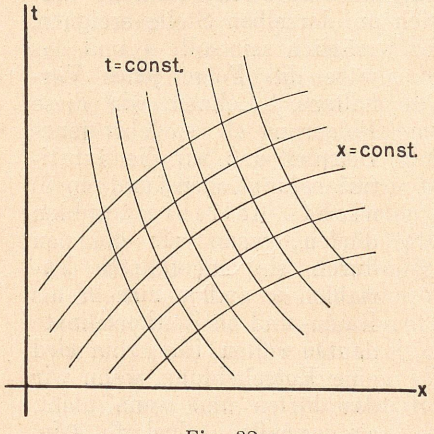


Fig. 32a.

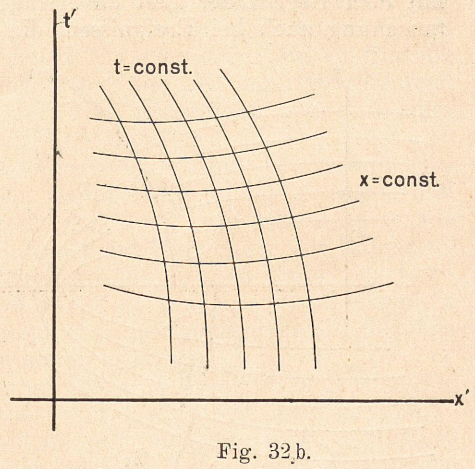


Fig. 32b.

Setzen wir z. B.

6a) $$u = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \cos x \qquad \text{und} \qquad v = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \sin x$$

und legen uns nun die Frage vor, ob wir jetzt u und v als Raum- und Zeitkoordinaten in einem neuen Bezugssystem deuten können, etwa u als Abszisse und v als Zeit. Bei graphischer Darstellung, wenn wir u und v als rechtwinklige Koordinaten auftragen, stellen die Linien $t = \text{const.}$ und $x = \text{const.}$ die bekannten Systeme konfokaler Ellipsen und Hyperbeln mit den Brennpunkten $u = \pm 1$ dar, und zwar nimmt der Wert von t zu, wenn wir die Reihe der Ellipsen von innen nach außen durchlaufen, wenigstens bei passender Beschränkung des Raumzeitgebietes ($t > 0$, $-\pi < x < \pi$), und solche Beschränkungen müssen wir vornehmen, um die verlangte Eindeutigkeit der Abbildung zu gewährleisten.

Betrachten wir nun ein Raumzeitgebiet speziell wie das in der Figur 33 mit $\mathfrak{A}_1$ bezeichnete, und in ihm einen Punkt x_1 mit seiner Uhr $\mathfrak{U}_1$ im x, t-Systeme. Diesem Punkte $x = \text{const} = x_1$ entspricht als Weltlinie ein Stück eines Hyperbelzweiges, und wenn wir diesen im Sinne wachsenden t durchlaufen, so wächst auch v, es steht also von diesen Ueberlegungen her nichts im Wege, v zu deuten als die Zeitangabe von augenblicklich koinzidierenden Uhren eines bewegten Systems;

wachsender Zeit an $\mathfrak{U}_1$ entspricht auch wachsende Zeit an diesen Uhren. — Anders wird es aber, sowie wir ein Raumzeitgebiet wie das Gebiet $\mathfrak{A}_2$ unserer Figur zugrunde legen und entsprechende Ueberlegungen anstellen. Dann nehmen für einen Punkt x_2 dieses Gebietes mit zunehmendem t die zugehörigen Werte von v ab. Das würde aber besagen, daß, während an derselben Stelle die Uhren des einen Systems vorwärtsgingen, die vorübergehenden Uhren des anderen Systems rückwärtsgingen — und ein solches Verhalten von „Uhren" wird man doch wohl nicht mehr zulassen dürfen. Wenn wir auch früher zugelassen haben, daß Ereignisse an verschiedenen Orten unter Umständen durch Einführung neuer Bezugssysteme in ihrer zeitlichen Aufeinanderfolge vertauscht erscheinen durften, so scheint es mir doch mit dem Begriff der Zeit unverträglich, daß eine solche zeitliche Vertauschung auch bei Ereignissen, die sich an derselben Stelle ereignen, möglich sein soll — und das wäre die Folge jenes Verhaltens. Lehnen wir diese Folgerung ab, so lehrt jenes Beispiel, daß wir die Substitutionsfunktionen ξ und τ in (6) nicht beliebig wählen dürfen, wenn wir die neu durch sie eingeführten Variablen u und v einzeln als Raum- und als Zeitkoordinate deuten wollen. Immerhin wird eine Entscheidung, wann wir das dürfen und wann nicht, einigermaßen schwierig sein, und das subjektive Moment spielt bei dieser Entscheidung augenscheinlich eine große Rolle; damit wird auch fraglich, gegenüber welchen Substitutionen man denn nun Kovarianz der Naturgesetze mit der Fundamentalform verlangen soll. — Da behauptet nun Einstein: gegenüber allen! — ganz gleichgültig, ob man die neu eingeführten Variablen einzeln als Raum- und als Zeitkoordinate zu deuten imstande ist oder nicht. Ganz unabhängig von einer solchen Deutungsmöglichkeit nennt er daher auch jedes Paar von Größen, durch das sich Raumzeitpunkte, Punkte im Raumzeitgebiete, charakterisieren lassen, im weiteren Sinne „Raumzeitkoordinaten", also in der räumlich eindimensionalen Welt je zwei aus einer Raum- und einer Zeitgröße zusammengesetzte Ausdrücke, sofern die Beziehung nur umkehrbar eindeutig ist. In diesem Sinne sind dann also auch die durch die Gleichungen (6 a) eingeführten Größen u und v „Raumzeitkoordinaten". Einstein fordert dann also Kovarianz der Naturgesetze zu der Fundamentalform auch noch bei Uebergängen z. B. von einem Lorentz-System (x, t) zu diesem u, v-System. Im Grunde genommen fordert damit die allgemeine Relativitätstheorie weit mehr als die Kovarianz der Naturgesetze beim Uebergang von einem Laboratorium zu einem anderen.

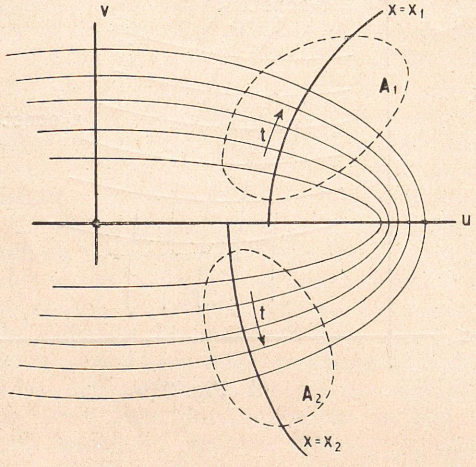


Fig. 33.

Einstein rechtfertigt diese weitergehende Forderung der Kovarianz zur Fundamentalform auch gegenüber solchen allgemeineren Substitu-

tionen damit, daß er bemerkt, daß das Einzige, was wir bei allen physikalischen Beobachtungen feststellen können, lediglich raumzeitliche Koinzidenzen sind. Wenn wir ein Ereignis örtlich werten wollen, ist das von vornherein klar: man stellt fest, mit welchem Teilstrich eines Maßstabes der Ort des Ereignisses zusammenfällt, und auch bei zeitlicher Wertung eines Ereignisses liegen die Verhältnisse nicht wesentlich anders: es wird festgestellt, mit welcher Stellung des Zeigers einer Uhr oder mit der wievielten Schwingung eines Pendels das Ereignis zusammenfällt. Stets handelt es sich also nur um die Beobachtung eines Zusammenfallens, einer Koinzidenz, und, um die Koinzidenz zweier Ereignisse festzustellen, sind allerdings solche Raumzeitkoordinaten im weiteren Sinne ebenso geeignet, wie gewöhnliche Raum- und Zeitgrößen; ich kann, wenn ich an die Beziehungsgleichungen (6a) denke, die Koinzidenz zweier Ereignisse E_1 und E_2 ebensogut durch die Gleichungen $u_1 = u_2$ und $v_1 = v_2$, wie durch $x_1 = x_2$ und $t_1 = t_2$ zum Ausdruck bringen. Damit würde nach Einstein auch die Einführung von u und v durch die Gleichungen (6a) als „Raumzeitkoordinaten" gerechtfertigt erscheinen, trotz der oben erwähnten zunächst einer solchen Deutung entgegenstehenden Bedenken.

Dieser allgemeineren Einsteinschen Auffassung von „Raumzeitkoordinaten" haben wir schon oben dadurch Rechnung getragen, daß wir außer in Lorentz-Gebieten und sogar dort, wenn wir nicht gerade Lorentz-Systeme zugrunde legten, von der Bezeichnung der Raumzeitkoordinaten durch x und t oder ähnliche auf die Bedeutung der einzelnen Größen als Abszisse und als Zeit hindeutende Buchstaben absahen und in dieser Hinsicht weniger prädisponierende Buchstaben wie u und v für die Raumzeitparameter benutzten.

Wir müssen uns darüber klar werden, daß durch diese Auffassung die Unterscheidung zwischen Raum- und Zeitgrößen, wie sie uns so geläufig ist, aufgegeben wird; es bleibt nur noch eine gewisse Mannigfaltigkeit übrig, die wir wegen des Spezialfalles, in dem eine solche Trennung möglich ist, die „Raumzeitmannigfaltigkeit" (oder das „Raumzeitgebiet") nennen. Erst durch diese von Einstein viel später entwickelten Ideen ist also das schon auf S. 37 zitierte Wort Minkowskis so recht zur Wahrheit geworden: „Von Stund an sollen Raum für sich und Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken und nur noch eine Art Union der beiden soll Selbständigkeit bewahren", und staunend müssen wir den prophetischen Blick Minkowskis bewundern, dem es nicht vergönnt war, die weitere Entwicklung dieses Gedankens selber noch zu erleben. —

Wenn wir bei den bisherigen Betrachtungen immer nur von dem räumlich eindimensionalen Falle, also einer zweidimensionalen Raumzeitmannigfaltigkeit (x, t) oder (u, v) gesprochen haben, so bedeutet das keine irgendwie wesentliche Einschränkung. Betrachten wir den dreidimensionalen Raum, so gehört ihm eine vierdimensionale Raumzeitmannigfaltigkeit zu, in der dann alle obigen Ueberlegungen fast unverändert gültig bleiben. Man führt in ihr irgendwelche Raumzeitparameter x_0, x_1, x_2, x_3 ein, d. h. irgendwelche Variable, durch deren Angaben man die einzelnen „Punkte" (Raumzeitpunkte), d. h. die einzelnen Elemente dieser Mannigfaltigkeit, charakterisieren, voneinander unterscheiden kann, oder man legt, wie man dafür auch sagt, in die Mannigfaltigkeit ein Koordinatensystem. Dann gelten für dieses System und für die Uebergänge von ihm zu anderen solchen Koordinatensystemen

alle unsere obigen Betrachtungen, und so sprechen wir denn jetzt das Hauptresultat folgendermaßen aus als

Einsteins allgemeines Relativitätsprinzip. — *Es existiert überall eine quadratische Differentialform der Raumzeitkoordinaten, die z. B. bei Zugrundelegung eines speziellen Koordinatensystems* (x_0, x_1, x_2, x_2) *folgendermaßen lauten möge:*

$$\begin{aligned} & g_{00}\,dx_0^2 + g_{11}\,dx_1^2 + g_{22}\,dx_2^2 + g_{33}\,dx_3^2 \\ & \quad + 2\,g_{01}\,dx_0\,dx_1 + 2\,g_{02}\,dx_0\,dx_2 + 2\,g_{03}\,dx_0\,dx_3 \\ & \quad + 2\,g_{23}\,dx_2\,dx_3 + 2\,g_{31}\,dx_3\,dx_1 + 2\,g_{12}\,dx_1\,dx_2 \end{aligned} \tag{7}$$

Dann charakterisieren diese Koeffizientenfunktionen g_{ik} *die von diesem System aus wahrgenommenen Gravitationsfelder, sind also abhängig von der Verteilung der Massen im Raume, weshalb man sie als die „Komponenten des Gravitationsfeldes" von diesem Systeme aus oder auch als „Gravitationspotentiale" bezeichnet.*

Zu dieser „Fundamentalform" (7) sind die Naturgesetze kovariant, d. h. sie hängen beim Uebergang zu beliebigen anderen Raumzeitkoordinatensystemen von den Koeffizienten der umgerechneten Form und den neuen Variablen genau so ab wie ursprünglich von den g_{ik} *und den Koordinaten* x_0, x_1, x_2, x_3.

Läßt sich die Fundamentalform (7) durch Einführung passender Variabler x, y, z, t an Stelle von x_0, x_1, x_2, x_3 auf die spezielle Form

$$c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{8}$$

bringen, so sprechen wir von einem „Lorentz-Gebiete" in dem dann unter Zugrundelegung dieses speziellen (Lorentzschen) Bezugssystems die spezielle Relativitätstheorie gilt, und eine Trennung der Koordinaten in 3 Raumgrößen x, y, z und 1 Zeitgröße t möglich ist. — *Im Unendlichkleinen* — so fordern wir wieder — *soll stets die spezielle Relativitätstheorie gelten.* Dadurch werden, wenigstens beim Festhalten an reellen Raumzeitkoordinaten, die Koeffizienten g_{ik} gewissen Beschränkungen unterworfen, nämlich denen, daß die Fundamentalform den Trägheitsindex 3 besitzt, d. h. daß bei der Darstellung als Aggregat von lauter Quadraten 3 von diesen das negative Vorzeichen erhalten. Auf diese im mehrdimensionalen Falle an Stelle von (4) tretenden Bedingungen möchte ich hier nicht näher eingehen, da sie aus den in jedem Lehrbuch der analytischen Geometrie bei der Klassifikation der Oberflächen zweiter Ordnung angegebenen Kriterien leicht abgelesen werden können, und für die Folge nicht weiter von Bedeutung für uns sind. —

Ueberblicken wir hier am Schlusse des Paragraphen noch, was wir denn mit diesem allgemeinen Relativitätsprinzip gewonnen haben, so ist zunächst festzustellen, daß wirkliche Gravitationsfelder mit in den Bereich unserer Betrachtungen gezogen sind, die in der speziellen Relativitätstheorie ausgeschlossen waren. Sodann gibt uns die Theorie aber wertvolle Aufschlüsse auch über die Physik in Lorentz-Gebieten, also in Gebieten, in denen bei Einführung passender Bezugssysteme keine Gravitationsfelder wahrgenommen werden. Das neue Einsteinsche Prinzip gibt uns Aufschluß darüber, wie sich die Naturgesetze ändern, wenn man von diesen Lorentzschen zu anderen Bezugssystemen übergeht; es macht uns also unabhängig von diesen speziellen Systemen und damit von der ganzen Art und Weise, wie wir früher die Uhren in diesen Systemen regulierten und gegeneinander stellten. Nach unseren

neuen Auffassungen müssen wir sagen: *Durch diese spezielle Art, die Uhren zu richten, erzielen wir nur eine besonders einfache Gesetzmäßigkeit in der Beschreibung der Naturvorgänge in* LORENTZ-*Gebieten* — es sind in diesem Falle die Naturgesetze eben invariant mit einer leicht anzugebenden quadratischen Differentialform, während sie bei Uebergängen zu anderen Raumzeitsystemen nur kovariant zu jener Form sind.

Das sei noch an einem Beispiel erläutert: Wir gehen von einem LORENTZ-Systeme aus, in dem also die Fundamentalform die Gestalt

$$c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{8}$$

besitzt. Die „anderen" Systeme können wir dann, wenn wir wollen, was ihr Achsenkreuz anlangt, mit anderen LORENTZ-Systemen zusammenfallen lassen, so daß sie also, wie diese, in geradlinig gleichförmiger Bewegung gegen das Grundsystem begriffen sind; doch seien sie anders wie solche LORENTZ-Systeme, also nicht in der speziellen EINSTEINschen Art mit Uhren ausgestattet. Da wollen wir nun einmal annehmen, in dem zweiten von uns betrachteten Systeme bleiben immer die Uhren des ersten Systems maßgebend, die Zeitrechnung sei also wieder unabhängig vom Bezugssystem, in beiden betrachteten Systemen dieselbe. Dann können wir sagen, wir gingen von dem LORENTZ-System nicht mittels einer LORENTZ-Transformation zu einem anderen LORENTZ-System, sondern von einem LORENTZ-System mittels einer GALILEI-Transformation zu einem neuen Bezugssystem über: Diese GALILEI-Transformation sei etwa:

$$x' = x - vt \quad (\text{oder: } x = x' + vt'), \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = t.$$

Was geschieht dann bei diesem Uebergang mit den Naturgesetzen? Da transformieren wir, unseren obigen Regeln gemäß die Form (8) in die neuen Koordinaten:

$$c^2\,dt'^2 - (dx' + v\,dt')^2 - dy'^2 - dz'^2 =$$
$$(c^2 - v^2)\,dt'^2 - 2\,v\,dx'\,dt' - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2$$

und dann behauptet das neue EINSTEINsche Prinzip, daß die Naturgesetze im zweiten Systeme (x', y', z', t') aus denen im ersten Systeme (x, y, z, t) einfach dadurch hervorgehen müssen, daß man

an Stelle der Koeffizienten: $c^2, \quad -1, \quad -1, \quad -1, \quad 0$ } alle
die neuen Werte: $\quad c^2 - v^2, \quad -1, \quad -1, \quad -1, \quad -2\,v$ } übrigen 0

treten läßt. In dieser Art läßt sich der *Einfluß der* GALILEI-*Transformation auf die Naturgesetze der speziellen Relativitätstheorie* beschreiben.

§ 4.

Weitere Beziehungen zur Flächentheorie sowie zur nichteuklidischen Geometrie.

Die Ueberlegungen des letzten Paragraphen führten auf die Frage, wann sich eine gegebene quadratische Differentialform

$$e\,du^2 + 2\,f\,du\,dv + g\,dv^2$$

durch Einführung neuer Variabler auf die spezielle Form $c^2\,dt^2 - dx^2$ bringen läßt, oder allgemeiner, wann sich überhaupt zwei quadratische Differentialformen ineinander überführen lassen.

Diese Frage spielt nun auch in der Flächentheorie eine große Rolle bei einem seit GAUSS vielfach behandelten Probleme, nämlich dem Probleme der Abwickelbarkeit von Flächen aufeinander.

Da nun zwischen den Betrachtungen der allgemeinen Relativitätstheorie, um die es sich hier handelt, und diesem flächentheoretischen Probleme mehr als eine nur äußere Analogie besteht, so wollen wir hier zunächst auch auf dieses differentialgeometrische Problem der Abwickelbarkeit von Flächen noch etwas näher eingehen, ohne freilich dabei Vollständigkeit in den Beweisen anzustreben.

Eine Ebene, z. B. dargestellt durch ein Blatt Papier, kann man auf einen Zylinder wickeln oder zu einem Kegel (Düte) zusammenrollen, ohne irgendwelche Dehnungnn und Zerrungen damit vorzunehmen. Man sagt auf Grund dieser Tatsache, Ebene und Zylinder, und ebenso Ebene und Kegel seien „aufeinander abwickelbar". — Aber auch wenn wir z. B. eine den Aequator einer Kugel umgebende Zone, begrenzt von 2 Parallelkreisen, aus dünnem Blech herstellen und längs eines Meridianes aufschneiden, können wir dieses Gebilde zwanglos deformieren, z. B. die Zonenenden auseinanderbiegen und dadurch den Aequatorkreis vergrößern, oder auch ihn durch Uebereinanderschieben der Enden verkleinern. Höchstens sind dabei, wenn man den Versuch wirklich anstellt, geringe Spannungen zu überwinden, die durch die Dicke des Bleches bedingt sind, und welche im Grenzfalle eines unendlich dünnen Bleches verschwinden würden. Jedenfalls treten in der Fläche selber keine Dehnungen und Zerrungen ein; man kann gänzlich ohne solche der Kugelzone eine andere Gestalt geben, also Teilen der Kugel ihre Kugelgestalt nehmen, sie in andere Flächen umformen. Man sagt dann wieder, die Kugel und diese neuen Flächen seien „aufeinander abwickelbar", und das Problem, um das es sich handelt, ist dann das, *zu entscheiden, wann zwei gegebene Flächen* $\mathfrak{F}_1$ *und* $\mathfrak{F}_2$ *in diesem Sinne aufeinander abwickelbar sind.*

Da denken wir uns auf jeder dieser beiden Flächen allgemeine GAUSSsche krummlinige Koordinaten [vgl. S. 152] eingeführt, u_1, v_1 auf $\mathfrak{F}_1$ und u_2, v_2 auf $\mathfrak{F}_2$. Die Quadrate der Linienelemente seien dann:

$$1)\quad \begin{aligned} &\text{bei } \mathfrak{F}_1\text{:}\quad ds_1^2 = E_1(u_1, v_1)\,du_1^2 + 2F_1(u_1, v_1)\,du_1\,dv_1 + G_1(u_1, v_1)\,dv_1^2 \\ &\text{bei } \mathfrak{F}_2\text{:}\quad ds_2^2 = E_2(u_2, v_2)\,du_2^2 + 2F_2(u_2, v_2)\,du_2\,dv_2 + G_2(u_2, v_2)\,dv_2^2. \end{aligned}$$

Nehmen wir jetzt einmal an, die Flächen $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ seien aufeinander abwickelbar, so können wir doch durch Abwicklung die Parameterlinien $u_1 = \text{const}$ und $v_1 = \text{const}$ von $\mathfrak{F}_1$ auf $\mathfrak{F}_2$ übertragen, also auch auf $\mathfrak{F}_2$ die Größen u_1, v_1 als Koordinaten einführen, d. h. einen Punkt von $\mathfrak{F}_2$ anstatt durch seine ursprünglichen Koordinaten u_2, v_2 auch bestimmen durch Angabe der Koordinaten u_1, v_1 des bei der Abwicklung auf ihn fallenden Punktes von $\mathfrak{F}_1$. Bei der Abwicklung wird eben eine eindeutige Beziehung zwischen den Punkten von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ und damit auch zwischen ihren Koordinaten hergestellt:

$$2)\qquad u_2 = \lambda(u_1, v_1), \qquad v_2 = \mu(u_1, v_1).$$

Führen wir nun also in dieser Weise auch auf $\mathfrak{F}_2$ die Parameter u_1, v_1 ein, so können wir auch das Quadrat des die Punkte u_1, v_1 und $u_1 + du_1$, $v_1 + dv_1$ verbindenden Linienelementes von $\mathfrak{F}_2$ als quadratische Differentialform in u_1, v_1 schreiben:

$$3)\qquad \overline{ds_2^2} = \overline{E}_2(u_1, v_1)\,du_1^2 + 2\overline{F}_2(u_1, v_1)\,du_1\,dv_1 + \overline{G}_2(u_1, v_1)\,dv_1^2,$$

wo die Ueberstreichung immer andeuten soll, daß es sich um die in u_1, v_1 transformierten Fundamentalgrößen von $\mathfrak{F}_2$ handelt [vgl. (11′) S. 156].

Nun müssen aber zu gleichen u_1, v_1 und gleichen Inkrementen du_1 und dv_1 auf $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ stets gleich große Linienelemente gehören, denn ihre Endpunkte entsprechen einander ja bei der Abwicklung, und es ist ja gerade das Wesen der Abwicklung, daß keine Zerrung oder Dehnung der Linienelemente stattfindet. So folgt denn also $\bar{ds}_2 = ds_1$ und daher

$$4) \qquad \begin{aligned} &\bar{E}_2(u_1, v_1)\, du_1^2 + 2\,\bar{F}_2(u_1, v_1)\, du_1\, dv_1 + \bar{G}_2(u_1, v_1)\, dv_1^2 = \\ &\qquad E_1(u_1, v_1)\, du_1^2 + 2\,F_1(u_1, v_1)\, du_1\, dv_1 + G_1(u_1, v_1)\, dv_1^2, \end{aligned}$$

und zwar bei beliebigen u_1, v_1 und beliebigen Inkrementen du_1 und dv_1, so daß daraus sofort folgt:

$$4') \quad \bar{E}_2(u_1, v_1) \equiv E_1(u_1, v_1), \quad \bar{F}_2(u_1, v_1) \equiv F_1(u_1, v_1), \quad \bar{G}_2(u_2, v_2) \equiv G_1(u_1, v_1).$$

Wenn die Flächen $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ also aufeinander abwickelbar sind — das folgt aus diesen Ueberlegungen —, so müssen sich durch eine passende Koordinatentransformation (2) die Quadrate der Linienelemente ds_1^2 und ds_2^2 auf dieselbe Form bringen, ineinander überführen lassen oder, was dasselbe ist, die Fundamentalgrößen erster Ordnung auf beiden Flächen müssen sich ineinander transformieren lassen*).

Es läßt sich nun beweisen, daß diese Bedingung auch hinreichend ist, daß also, wenn sich die Quadrate der Linienelemente zweier Flächen ineinander umrechnen lassen, die Flächen auch aufeinander abwickelbar sind. — Auf einen vollständigen Beweis dieser Tatsache will ich nicht eingehen, sondern mich mit der üblichen Veranschaulichung begnügen. Nehmen wir an, es ließen sich die Punkte beider Flächen einander paarweise zuordnen (und damit auch auf $\mathfrak{F}_2$ die Koordinaten u_1, v_1 von $\mathfrak{F}_1$ einführen), und zwar derart, daß entsprechende Linienelemente auf beiden immer einander gleich sind, so kann man auf beiden Flächen Netze kongruenter kleiner Dreiecke konstruieren, und daraus schließt man dann, daß sich die (einander entsprechenden) Ecken dieser Dreiecke auch durch Abwicklung zur Deckung bringen lassen**). — So sprechen wir denn folgenden Satz aus:

Satz 1. — *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß sich zwei Flächen aufeinander abwickeln lassen, ist die, daß ihre Linienelemente sich durch Einführung passender Koordinaten auf dieselbe Form bringen lassen:*

---

*) Wegen der Gesetze, nach denen sich die Fundamentalgrößen erster Ordnung bei Einführung neuer Koordinaten transformieren, vgl. (11′) S. 156.

**) Aus dieser Ueberlegung geht strenge genommen nur hervor, daß sich die Flächen so aufeinander abrollen lassen, daß entsprechende Punkte sich dabei zeitweilig berühren, nicht aber, daß alle einander entsprechenden Punkte gleichzeitig zur Deckung gelangen, wie es der Begriff der Abwickelbarkeit verlangt. — Doch wie gesagt, auf einen vollständigen Beweis will ich hier verzichten — Auch sei hier, weil für uns weiter nicht von Bedeutung, nur kurz erwähnt, daß eine wirkliche Abwicklung von Flächen, ein Aufeinanderlegen, meist nur in beschränkten Teilen möglich ist. So kann man zwar die oben erwähnte Kugelzone auf eine Fläche mit größerem Aequatorkreis auflegen, das gilt aber nicht mehr von der ganzen (auch längs eines Meridians aufgeschnittenen) Kugel. Das Problem, solche Teilbezirke von Flächen zu bestimmen, die sich durch Biegung zur Deckung bringen lassen, ist erst mehrere Jahrzehnte nach Gauss, erst um die Jahrhundertwende, in Angriff genommen. — Wir werden unbekümmert um diese Einschränkungen zwei Flächen aufeinander abwickelbar nennen, wenn sich ihre Linienelemente ineinander umrechnen lassen.

$$5) \quad E_2(u_2, v_2)\,du_2^2 + 2F_2(u_2, v_2)\,du_2\,dv_2 + G_2(u_2, v_2)\,dv_2^2 = E_1(u_1, v_1)\,du_1^2 + 2F_1(u_1, v_1)\,du_1\,dv_1 + G_1(u_1, v_1)\,dv_1^2.$$

Wir sehen also, daß sich die Entscheidung der Frage, wann zwei Flächen aufeinander abwickelbar sind, auf die andere reduziert, wann zwei quadratische Differentialformen ineinander umgerechnet werden können, also gerade auf die Frage, die uns für die Relativitätstheorie interessiert. —

Es seien nun zwei aufeinander abwickelbare Flächen $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ gegeben, dann wollen wir speziell ihre Krümmungsmaße K_1 und K_2 betrachten. Wenn wir auch auf $\mathfrak{F}_2$ die Parameter u_1, v_1 von $\mathfrak{F}_1$ einführen, können wir natürlich auch K_2 in diese umrechnen:

$$K_2(u_2, v_2) = \bar{K}_2(u_1, v_1).$$

Da aber $\bar{K}_2$ von den Fundamentalgrößen $\bar{E}_2, \bar{F}_2, \bar{G}_2$, den Koeffizienten der in u_1, v_1 umgerechneten Form [vgl. (3) S. 168], und ihren Differentialquotienten genau so abhängt wie K_1 von E_1, F_1, G_1 und ihren Differentialquotienten [vgl. (9) S. 155], so folgt in Anbetracht der Gleichungen (4′):

$$6) \quad K_2(u_2, v_2) = \bar{K}_2(u_1, v_1) = K_1(u_1, v_1)$$

und damit haben wir folgendes Resultat erhalten:

Satz 2. — *Aufeinander abwickelbare Flächen besitzen in entsprechenden Punkten gleiches Krümmungsmaß. Man sagt dafür auch kurz: Das Krümmungsmaß ist eine „Biegungsinvariante“.*

Es heißt dieses letztere, daß sich das Krümmungsmaß an einer Stelle durch Verbiegung der Fläche nicht ändert. Das kann man sich an dem obigen Beispiele der Verbiegung unseres Kugelzonenstreifens sehr schön veranschaulichen. Wenn wir den Streifen auseinanderbiegen, also den Aequator vergrößern, biegt sich natürlich die Meridiankurve zusammen, der Krümmungsradius in ihr verkleinert sich, und umgekehrt, bei Verkleinerung des Aequators vergrößert sich der Krümmungsradius im Meridian. Von den beiden Hauptkrümmungsradien P_1 und P_2 wird also immer der eine größer, der andere kleiner, wie es tatsächlich nach (2′) S. 152 sein muß, wenn K konstant bleiben soll.

Es entsteht nun die Frage, ob dieser Satz 2 umkehrbar ist, ob zwei Flächen, deren Punkte man einander so zuordnen kann, daß in ihnen immer das Krümmungsmaß der einen und der anderen Fläche einander gleich sind, aufeinander abwickelbar sind. Wenn dem so wäre, so hätten wir ja in der Gleichheit des Krümmungsmaßes (im obigen Sinne) ein Kriterium dafür, daß sich die Linienelemente beider Flächen, also zwei quadratische Differentialformen, ineinander umrechnen lassen, und ein Kriterium hierfür zu finden ist ja unser Ziel. — Doch ist der Satz im allgemeinen nicht umkehrbar. Das ist auch leicht einzusehen: Sind zwei Flächen gegeben mit ihren zugehörigen Linienelementen, sind also E_1, F_1, G_1, E_2, F_2, G_2 und ebenso die zugehörigen Krümmungsmaße K_1 und K_2 in ihrer Abhängigkeit von den Gaussschen Koordinaten u_1, v_1 bzw. u_2, v_2 auf jeder Fläche gegeben, so ist es stets möglich (wenn vielleicht auch nicht immer im Reellen), die Punkte beider Flächen einander so zuzuordnen, daß das Krümmungsmaß in entsprechenden Punkten gleich wird, d. h. u_2, v_2 so von u_1, v_1 abhängig zu machen, oder

$$(2) \quad u_2 = \lambda(u_1, v_1), \qquad v_2 = \mu(u_1, v_1)$$

zu setzen, daß

$$K_2(\lambda, \mu) = K_1(u_1, v_1)$$

wird — es ist das ja erst eine Gleichung zur Bestimmung der beiden Funktionen λ und μ von u_1, v_1. Dann können wir diesen beiden Funktionen noch eine Bedingung auferlegen, z. B.

$$\bar{E}_2(u_1, v_1) \equiv E_1(u_1, v_1) \qquad \text{d. i. nach (11′) S. 156:}$$

$$E_2(\lambda, \mu)\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u_1}\right)^2 + 2F_2(\lambda, \mu)\frac{\partial\lambda}{\partial u_1}\frac{\partial\mu}{\partial u_1} + G_2(\lambda, \mu)\left(\frac{\partial\mu}{\partial u_1}\right)^2 \equiv E_1(u_1, v_1);$$

aber die beiden weiteren Bedingungen

$$\bar{F}_2(u_1, v_1) \equiv F_1(u_1, v_1) \qquad \text{und} \qquad \bar{G}_2(u_1, v_1) \equiv G_1(u_1, v_1),$$

wie sie nach (4′) nötig wären, wird man im allgemeinen nicht auch noch erfüllen können.

So sehen wir also, daß die Gleichheit der Krümmungsmaße zweier Flächen (im oben angegebenen Sinne) im allgemeinen nicht genügt, die Abwickelbarkeit der Flächen zu verbürgen, *Satz 2 ist im allgemeinen nicht umkehrbar.* Doch gibt es einen, auch für uns besonders wichtigen, Fall, in dem auch die Umkehrung richtig ist. Das ist der Fall, daß es sich um Flächen konstanten Krümmungsmaßes handelt; dann genügt die Gleichheit des konstanten Wertes der Krümmung, die Abwickelbarkeit der beiden Flächen zu gewährleisten. Es gilt nämlich der folgende Satz, der hier ohne Beweis angegeben sei:

Satz 3. — *Auf jeder Fläche konstanter Krümmung vom Werte $\varkappa$ lassen sich* GAUSS*'sche Koordinaten ξ, η einführen, derart, daß das Quadrat des Linienelementes die spezielle Form*

$$7) \qquad ds^2 = \frac{d\xi^2 + d\eta^2}{1 + \frac{\varkappa}{4}(\xi^2 + \eta^2)}$$

annimmt.

Darin ist nach Satz 1 die Tatsache enthalten, daß *alle Flächen gleicher konstanter Krümmung aufeinander abwickelbar* sind, da sich ja eben ihre Linienelemente stets auf dieselbe Form bringen lassen.

Insbesondere folgt also, daß dafür, daß eine Fläche auf die Ebene (mit dem Krümmungsmaß 0) abwickelbar ist, nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend ist, daß das Krümmungsmaß der Fläche $K = 0$ ist, und dies ist damit zugleich auch *die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß sich die das Quadrat des Linienelementes darstellende quadratische Differentialform durch Einführung geeigneter Koordinaten auf die Form $d\xi^2 + d\eta^2$ bringen läßt.*

Wir haben damit also, wenigstens für eine quadratische Differentialform von 2 Veränderlichen, ein Kriterium dafür erhalten, wann sie sich in eine Form mit konstanten Koeffizienten umrechnen läßt. Das ist ja aber gerade die Frage, die uns in der (räumlich eindimensionalen) Relativitätstheorie interessiert [vgl. S. 160]. Zwar ist zwischen den beiden Formen mit konstanten Koeffizienten, $d\xi^2 + d\eta^2$ in dem einen, und $c^2 dt^2 - dx^2$ im anderen Falle, zunächst noch ein Unterschied insofern, als die Koeffizienten in dieser Normalform einmal beide gleiches, das andere Mal entgegengesetztes Vorzeichen besitzen. Doch fällt dieser Unterschied fort, sobald wir auch imaginäre Substitutionen, und damit auch imaginäre Raumzeitkoordinaten, zulassen. Das können wir aber nach früheren Ueberlegungen unbesorgt tun, ohne darum auf die geometrische Ausdrucksweise zu verzichten, wenn nur allen geometrischen Einkleidungen wohldefinierte analytische Begriffe

entsprechen, wie das hier der Fall ist. — So können wir denn unsere Resultate folgendermaßen zusammenfassen:

Satz 4. — *Man deute die quadratische Fundamentalform [vgl. S. 159]*

$$8) \qquad e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$$

ohne Rücksicht auf Realitätsverhältnisse als Quadrat des Linienelementes einer Fläche. Alsdann besteht die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß sie sich durch Einführung neuer Variabler auf die Form

$$9) \qquad c^2\,dt^2 - dx^2$$

bringen läßt, im Verschwinden des Krümmungsmaßes.

Wir erinnern uns nun dessen, daß die Möglichkeit, die Fundamentalform (8) auf die spezielle Form (9) zu bringen, charakteristisch für die „Lorentz-Gebiete" war [vgl. S. 160], und so wird denn folgender Zusatz verständlich:

Zusatz I. — *Auf Grund dieser Ueberlegungen sagt man, die Raumzeitmannigfaltigkeit sei in Lorentz-Gebieten eine „ebene", in wirklichen Gravitationsfeldern aber eine „gekrümmte".*

Da die Krümmung von den Koeffizienten der Fundamentalform [vgl. (9) S. 155], und diese nach den Einstein'schen Vorstellungen von den die Gravitationsfelder erzeugenden Massen abhängen [vgl. S. 159], so kommen wir hier wieder zu der schon auf S. 150 gestreiften Auffassung, daß die Raumzeitmannigfaltigkeit inhomogen ist, nämlich an verschiedenen Stellen verschiedene Krümmung besitzt, und wir erfahren darüber hinaus noch, *daß diese Inhomogenität in der Verteilung der körperlichen Massen in der Welt ihren Grund hat.* —

Von der in dem Satze 4 eingeführten „Fläche" läßt sich übrigens zeigen, daß sie niemals reell sein kann. — Da man jede reelle Fläche (wenn man von singulären Stellen absieht) in kleinen Bezirken als eben ansehen und daher das Quadrat des Linienelementes

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \qquad (u \text{ und } v \text{ reelle Parameter})$$

stets (durch reelle Substitutionen) auf die Form $d\xi^2 + d\eta^2$ bringen kann, so folgt, daß stets

$$1') \qquad EG - F^2 > 0$$

sein muß; das ergibt sich durch ganz analoge Schlüsse, wie die, durch die wir auf S. 161 nachwiesen, daß bei der Fundamentalform (8) — reelle Raumzeitkoordinaten u, v vorausgesetzt — stets

$$8') \qquad eg - f^2 < 0$$

sein mußte. Aus diesem Gegensatz zwischen (1′) und (8′) geht aber hervor, daß *die Fundamentalform* (8) *niemals das Quadrat des Linienelementes einer reellen Fläche darstellen kann. Q·e·d.*

Sieht man aber über diese Realitätsunterscheidungen hinweg, so lehren diese letzten Betrachtungen noch folgenden weiteren

Zusatz 2. — *Der Satz, daß man unendlich kleine Raumzeitgebiete stets als Lorentz-Gebiete ansehen darf [vgl. S. 161] ist analytisch dasselbe wie der Satz, daß man unendlich kleine Gebiete einer Fläche als eben ansehen kann.*

Wie dieser letztere Satz aber eben nur auf unendlich kleine Gebiete auf krummen Flächen beschränkt ist, wie man für jeden kleinen Bezirk einer Fläche eine neue Ebene einführen muß, so kann man auch bei beliebigen Raumzeitgebieten im allgemeinen nicht durch Einführung ein und desselben Bezugssystems überall gleichzeitig („im

Großen") die Gravitationswirkungen beseitigen [vgl. S. 134] und damit die Gültigkeit der speziellen Relativitätstheorie erreichen. Hiermit erklärt sich auch der scheinbar zunächst vorliegende Widerspruch zwischen Zusatz 2, S. 161 und dem Resultate unserer orientierenden Betrachtungen am Anfang des zweiten Teiles [vgl. Satz 1, S. 132]. —

Bei allen diesen Sätzen ist freilich im Auge zu behalten, daß sie im Grunde genommen vorerst nur als bewiesen anzusehen sind im räumlich eindimensionalen Falle, also in dem Falle einer zweidimensionalen Raumzeitmannigfaltigkeit. Es wird weiterhin eine unserer Hauptaufgaben sein, den Begriff der „Krümmung" auf mehrdimensionale Mannigfaltigkeiten auszudehnen. —

Doch zuvor wollen wir hier noch bei den nach Satz 3 besonders wichtigen Flächen konstanter Krümmung verweilen und uns zunächst über die wichtigsten Typen dieser Flächen zu unterrichten suchen. Nehmen wir die Gleichung der Fläche in der Form an:

$$z = f(x, y),$$

so geht die Darstellung (8) S. 154 für das Krümmungsmaß K, wie hier nicht weiter ausgeführt werden soll, in die Gestalt über

$$K = \frac{rs - t^2}{(1 + p^2 + q^2)^2},$$

wo, wie üblich, p und q die ersten, r, s, t die zweiten partiellen Ableitungen von z nach x und y bedeuten. Setzt man dieses Krümmungsmaß konstant, etwa gleich $\varkappa$, so erhält man eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für f, bei deren allgemeiner Lösung man auf erhebliche Schwierigkeiten stößt. Doch kann man diese Differentialgleichung der Flächen konstanter Krümmung leicht lösen, wenn man mit gewissen speziellen Ansätzen in sie hineingeht. Fragen wir z. B. nur nach den Rotationsflächen konstanter Krümmung, machen also die Annahme, daß z die Variablen x und y nur in der Verbindung $\sqrt{x^2 + y^2}$ enthält, gehen also mit dem Ansatz

$$z = f(r) \qquad (r = \sqrt{x^2 + y^2})$$

an die Gleichung heran, so wird ja z als Funktion nur einer Variablen (r) gesucht, es reduziert sich daher die partielle auf eine gewöhnliche Differentialgleichung, welche leicht zu integrieren ist.

Man wird am besten daran tun, eine Parameterdarstellung (u, v) einzuführen mit den Parallelkreisen und den Meridianen als Parameterkurven $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$:

$$x = u \cos v, \qquad y = u \sin v, \qquad z = f(u), \qquad (u = r)$$

und dann direkt die Formel (8) S. 154 anzuwenden. Es ergeben sich dann zunächst für die Fundamentalgrößen erster Ordnung [vgl. (7_1) S. 153]:

$$E = 1 + f'^2, \qquad F = 0, \qquad G = r^2, \qquad (D^2 = r^2 E)$$

und für die zweiter Ordnung [vgl. ebenda (7_2)]:

$$L = \frac{rf''}{D}, \qquad M = 0, \qquad N = \frac{r^2 f'}{D}$$

und daher:

$$K = \frac{LN - M^2}{D^2} = \frac{r^3 f' f''}{D^4} = \frac{1}{r} \frac{f' f''}{E^2}.$$

Dafür können wir aber auch schreiben:

$$K = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{E^2} \cdot \frac{1}{2} \frac{dE}{dr} = -\frac{1}{2r} \cdot \frac{d\left(\frac{1}{E}\right)}{dr}.$$

Setzen wir nun $K = \text{const} = \varkappa$, so ergibt sich zunächst für E die Differentialgleichung:

$$\frac{d\left(\frac{1}{E}\right)}{dr} + 2\varkappa r = 0, \qquad \text{aus der} \qquad \frac{1}{E} + \varkappa r^2 = \text{const}$$

folgt. Wir schreiben für diese Integrationskonstante zweckmäßig, indem wir eine neue Konstante c einführen, $\varkappa \cdot c + 1$ und erhalten dann:

$$E = 1 + f'^2 = \frac{1}{1 + \varkappa (c - r^2)}, \qquad \text{also} \qquad f' = \sqrt{\frac{r^2 - c}{c + \frac{1}{\varkappa} - r^2}},$$

und daraus folgt also *für die Rotationsflächen konstanter Krümmung $\varkappa$ allgemein die Gleichung*

$$10) \qquad z = f(r) = \int \sqrt{\frac{r^2 - c^2}{c + \frac{1}{\varkappa} - r^2}}\, dr$$

mit willkürlichem c. Es drückt sich also z durch ein *elliptisches Integral* in r aus.

Um uns nun über die Gestalten dieser Flächen näher zu orientieren, müssen wir zunächst die Fälle positiver und negativer Krümmung $\varkappa$ unterscheiden.

I. Rotationsflächen konstanter positiver Krümmung.

Wir setzen jetzt die Krümmung $\varkappa = \frac{1}{R^2}$. Dann stellt also

$$10_p) \qquad z = \int \sqrt{\frac{r^2 - c}{c + R^2 - r^2}}\, dr$$

bei willkürlichem c die Gleichungen aller dieser Rotationsflächen mit konstanter Krümmung $\frac{1}{R^2}$ dar, die alle aufeinander abwickelbar sind [vgl. Satz 3, S. 171].

Dem Werte $c = 0$ entspricht speziell die Fläche

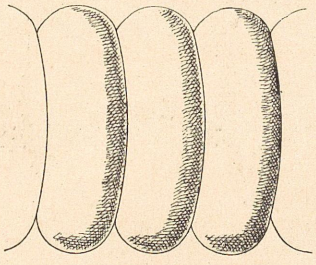
$$z = \sqrt{R^2 - r^2},$$

d. h. die Kugel vom Radius R als die einfachste dieser Flächen. — Bei den übrigen Flächen ($c \neq 0$) verlangen, wie ein Blick auf (10_p) lehrt, die Realitätsverhältnisse, daß

$$11_p) \qquad c < r^2 < c + R^2$$

ist. Daraus folgt, daß wenn $c > 0$ ist, r nicht gleich 0 werden kann, die Meridiankurve also die Rotationsachse nicht schneidet (Wulsttypus, Figur 34a), falls hingegen $c < 0$ ist, kann $r = 0$ werden, die Meridiankurve schneidet die Achse (Spindeltypus, Figur 34b). — Es sind dies

die beiden Typen von Flächen, auf die man jenen Kugelzonenstreifen S. 168 auflegen (abwickeln) kann, wenn man ihn auseinanderbiegt, bzw. zusammendrückt. Tatsächlich lehrt die letzte Ungleichung (11_p), daß



34a.

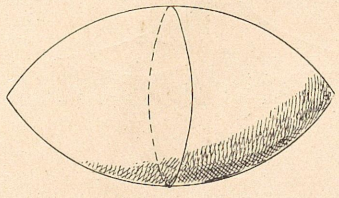


Fig. 34b.

im Falle $c > 0$ der Radius des größten Parallelkreises größer als der Kugelradius, im Falle $c < 0$ aber kleiner als dieser ist. — Zwischen beiden Flächentypen steht die Kugel vom Radius R selber.

II. Rotationsflächen konstanter negativer Krümmung.

Im Falle negativen $\varkappa$'s ist es üblich $\varkappa = -\frac{1}{R^2}$ zu setzen. Dann also lautet die Flächengleichung

10_n) $$z = \int \sqrt{\frac{c - r^2}{r^2 + R^2 - c}}\, dr .$$

Hier ist eine besonders ausgezeichnete Fläche die zum Parameterwerte $c = R^2$ gehörige:

$$z = \int \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{r}\, dr = \sqrt{R^2 - r^2} - R \log \frac{R + \sqrt{R^2 - r^2}}{r} .$$

Es ist dies die Fläche, die durch Rotation der bekannten Traktrix (Kurve konstanter Tangentenlänge bis zu einer Leitlinie) um die Leitlinie entsteht [vgl. Figur 35]. — Diese Fläche spielt bei den Rota-

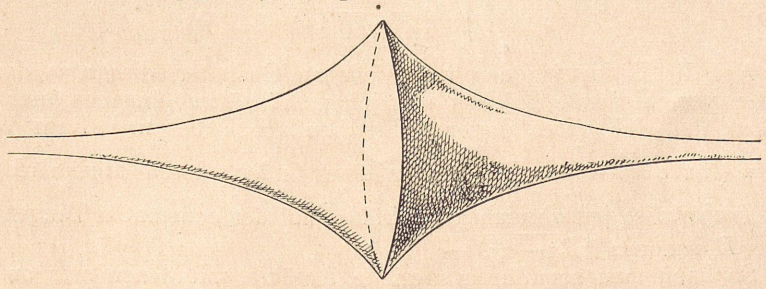


Fig. 35.

tionsflächen konstanter negativer Krümmung dieselbe Rolle wie die Kugel unter den Rotationsflächen konstanter positiver Krümmung. Man nennt sie daher auch die *Pseudosphäre; sie ist die einfachste Fläche konstanter negativer Krümmung.*

Auch die Pseudosphäre trennt die Rotationsflächen gleicher Krümmung in zwei Klassen, solcher, die die Rotationsachse treffen (Kegel-

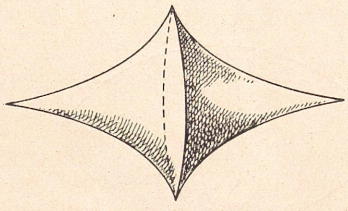


Fig. 36 a.

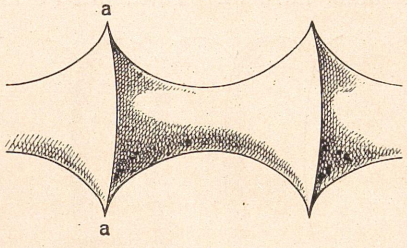


Fig. 36 b.

typus $c < R^2$, Figur 36 a) und anderer, bei denen das nicht der Fall ist. (Hyperboloidtypus $c > R^2$, Figur 36 b), wie das aus der wieder durch die Realitätsverhältnisse bedingten Ungleichung

$11_n)$ $$c - R^2 < r^2 < c$$

unmittelbar ersichtlich ist. —

Außer den Rotationsflächen kann man nun auch noch die Schraubenflächen konstanter Krümmung leicht bestimmen; wir brauchen nur in die Differentialgleichung der Flächen konstanter Krümmung mit dem entsprechenden Ansatz

$$x = u \cos v, \qquad y = u \sin v, \qquad z = av + f(u) \qquad (u = r)$$

hineinzugehen. Zunächst erhalten wir dann bei ganz analogem Vorgehen wie oben:

$$K = \frac{r^3 f' f'' - a^2}{(r^2 E + a^2)^2} = -\frac{1}{2r} \cdot \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{E + \frac{a^2}{r^2}}\right), \qquad (E = 1 + f'^2)$$

und wenn wir das gleich $\varkappa$ setzen, so ergibt die weitere Durchrechnung, wie man leicht übersieht, für die die Meridiankurve bestimmende Funktion f die Darstellung:

$$f(r) = \int \sqrt{\frac{r^2 - c}{c + \frac{1}{\varkappa} - r^2} - \frac{a^2}{r^2}}\, dr.$$

Auf die Diskussion der verschiedenen Gestalten dieser so dargestellten verschiedenen Flächen will ich nicht näher eingehen, nur bemerken, daß sich unter diesen Schraubenflächen bei negativem Wert von $\varkappa$ (für $c = -\frac{1}{\varkappa} = R^2$) wieder eine findet, deren Meridiankurve eine *Traktrix* ist, jedoch nicht, wie früher, mit der konstanten Tangentenlänge R, sondern $\sqrt{R^2 - a^2}$. —

So kann man also durch spezielle Ansätze, mit denen man an die Differentialgleichung der Flächen konstanter Krümmung herangeht, doch wenigstens gewisse Klassen solcher Flächen analysisch explizit darstellen und man kann sich dann auch von ihren gestaltlichen Verhältnissen leicht ein anschauliches Bild machen. —

Alle diese Flächen mit gleichen Werten des Krümmungsmaßes lassen sich nun also nach unserem obigen Satze 3 (S. 171) aufeinander

abwickeln, ja wegen der Konstanz der Krümmung *lassen sich auch Teile einer solchen Fläche auf andere Teile derselben Fläche abwickeln*, oder ein dünnes Blech, das auf irgendeinem Teile der Fläche aufliegt, kann ohne Zerrung und Dehnung auch auf jeden anderen Teil der Fläche aufgelegt werden, was bei Flächen variabler Krümmung nicht der Fall ist. Denken wir da z. B. an die Oberfläche eines Eies: eine Kappe, die auf dessen Spitze paßt, läßt sich ohne Dehnung nicht auch auf den unteren Teil des Eies auflegen, und umgekehrt wird eine Blechkappe, die an diesem unteren Teile anschließt, erst durch Zusammendrücken auch an der Spitze passend gemacht werden können [vgl. Figur 38, S. 186]. — Anders bei den Flächen konstanter Krümmung, in denen sich solche Blechbelegungen beliebig verschieben lassen. So kann man also auch beliebige Figuren innerhalb solcher Flächen konstanter Krümmung verschieben, und das ist von großer Bedeutung, weil damit auch *der Begriff der Kongruenz auf diesen Flächen erhalten* bleibt, den man ja mit Hilfe der Verschiebung zu erklären gewohnt ist.

So kann man denn in solchen Flächen konstanter Krümmung eine der ebenen durchaus ähnliche Geometrie begründen. In ihr treten an die Stelle der „Geraden" die „geodätischen Linien" der Fläche, d. s. Kurven, die (wenigstens in kleinen Strecken) immer die kürzeste Verbindungslinie zwischen ihren Endpunkten darstellen. Die geodätischen Linien haben die Eigenschaft, bei der Abwicklung einer Fläche auf eine andere immer wieder in geodätische Linien überzugehen*), also werden auch von geodätischen Linien begrenzte Figuren auf einer Fläche konstanter Krümmung bei Abwicklung auf andere Teile derselben Fläche, d. h. bei Verschiebung in der Fläche, stets von geodätischen Linien begrenzt bleiben. Es ist das das Analogon zu dem Satze, daß geradlinig begrenzte Figuren in der Ebene bei Verschiebung stets geradlinig begrenzt bleiben. Es gelten überhaupt in dieser Geometrie auf Flächen konstanter Krümmung ganz analoge Sätze wie in der ebenen Geometrie — nur ein fundamentaler Unterschied besteht, *es gilt nicht mehr das berühmte Parallelenaxiom.*

Um näher darauf einzugehen, müssen wir wieder zwischen den Flächen konstanter positiver und konstanter negativer Krümmung unterscheiden. Da betrachten wir denn zunächst einmal als einfachste Fläche konstanter *positiver* Krümmung die Kugel vom Radius R — was von dieser gilt, gilt ja eben infolge der Abwickelbarkeit auch von allen anderen Flächen mit der konstanten Krümmung $\frac{1}{R^2}$. — Auf dieser Kugel fassen wir einen beliebigen Punkt A ins Auge und eine nicht durch A hindurchgehende geodätische Linie C (d. h. natürlich einen größten Kugelkreis). Ziehen wir nun durch A alle möglichen geodätischen Linien, d. h. alle möglichen größten Kreise, so werden augenscheinlich alle diese Kreise den Kreis C schneiden; es gibt also unter allen geodätischen Linien, die durch einen außerhalb einer ge-

*) Aehnlich wie der Ausdruck (9) S. 155 für das Krümmungsmaß K hängen nämlich auch die Differentialgleichungen der geodätischen Linien nur ab von den Fundamentalgrößen erster Ordnung, die ja bei passender Wahl der Koordinaten auf zwei aufeinander abwickelbaren Flächen als gleich angesehen werden können [vgl. S. 169]. — Doch habe ich keine Veranlassung, hier auf diese Differentialgleichungen näher einzugehen, ebensowenig wie auf die präzisere flächentheoretische Definition der geodätischen Linien.

gebenen solchen Linie gelegenen Punkt gehen, keine, welche jene gegebene Linie nicht schnitte (es gibt keine Parallele). Darin besteht also ein wesentlicher Unterschied gegenüber der ebenen euklidischen Geometrie, in der es durch einen außerhalb einer gegebenen Geraden gelegenen Punkt eine Gerade gibt, welche die gegebene nicht schneidet (eine Parallele). — Doch auch bei Uebertragung auf die Flächen konstanter *negativer* Krümmung erfährt dieser Satz der euklidischen Geometrie eine Aenderung, wenn man das Wort „Gerade" durch „geodätische Linie" ersetzt. Auf jeder solchen Fläche, z. B. der Pseudosphäre, gibt es, wie hier allerdings ohne Beweis angegeben sei, durch einen außerhalb einer gegebenen geodätischen Linie gelegenen Punkt A nicht eine, sondern unendlich viele geodätische Linien, welche die gegebene nicht schneiden (unendlich viele Parallelen); es gibt nämlich bei A einen ganzen Winkelraum derart, daß alle innerhalb dieses Winkels von A auslaufenden geodätischen Linien jene gegebene nicht schneiden*). — So kann man sich denn nach Beltrami auf den Flächen konstanter Krümmung die beiden Geometrien veranschaulichen, in denen das Parallelenaxiom nicht gilt, wie die eine (mit unendlich vielen Parallelen) von dem Russen Lobatschewskij und unabhängig von ihm, ziemlich gleichzeitig (um 1830) von dem Ungarn Bolyai, und die andere (ohne Parallelen) später von Riemann abstrakt entwickelt sind. Es sind dies die beiden „nichteuklidischen Geometrien im engeren Sinne", die hyperbolische und die sphärische (elliptische) Geometrie. — Zusammenfassend sagen wir

Satz 5. — *Da sich auf Flächen konstanter Krümmung Flächenstücke beliebig verschieben lassen und man daher für Figuren auf ihnen die Kongruenz ganz analog definieren kann wie in der Ebene, so kann man auf solchen Flächen eine der ebenen Geometrie ganz ähnliche Geometrie aufstellen, doch gilt für sie nicht das Parallelenaxiom, denn läßt man an die Stelle der Geraden geodätische Linien treten, so gibt es bei Flächen konstanter positiver Krümmung (z. B. der Kugel) durch einen Punkt keine geodätische Linie, welche eine andere nicht durch den Punkt hindurchgehende geodätische Linie nicht schneidet, bei Flächen konstanter negativer Krümmung (z. B. der Pseudosphäre = Rotationsfläche der Traktrix) gibt es aber unendlich viele solche nicht schneidende geodätische Linien. — Es sind dies die nichteuklidischen Geometrien im engeren Sinne: die sphärische (Riemannsche) und die hyperbolische (Lobatschewskij-Bolyaische) Geometrie.*

In diesen nichteuklidischen Geometrien gelten nun modifizierte Sätze: z. B. ist in ihnen nicht mehr die Winkelsumme im Dreieck gleich π, sondern in der sphärischen, auf Flächen konstanter positiver Krümmung veranschaulichten Geometrie stets größer als π, hingegen

*) Bei allen diesen Sätzen ist folgendes zu beachten: Wenn von geodätischen Linien z. B. gesagt wird, sie schnitten sich nicht, so heißt das natürlich: bei beliebig weiter Verlängerung. Nun ist eine solche beliebige Verlängerung häufig nicht möglich, weil singuläre Linien, wie z. B. bei einer Rotationsfläche konstanter negativer Krümmung vom Hyperboloidtypus der Kreis $a\,a$ (Figur 36b) die Fortsetzung hindern (Nach einem Satze von Hilbert gibt es sogar überhaupt keine Fläche konstanter negativer Krümmung ohne Singularitäten). — In solchen Fällen kann man dann aber das Flächenstück, auf dem die betrachteten Linien verlaufen, innerhalb der Fläche so verschoben denken, daß von neuem die Möglichkeit einer Verlängerung der Linien gegeben ist, und indem man diesen Rückverschiebungsprozeß, wenn nötig, immer wieder und wieder vornimmt, kann man dann allerdings die geodätischen Linien „beliebig weit" verlängern.

stets kleiner als π in der hyperbolischen Geometrie, die auf den „pseudosphärischen Flächen" gilt, wie man die Flächen negativer konstanter Krümmung auch ganz allgemein nennt. — Von der ersteren Tatsache kann man sich ein so äußerst anschauliches Bild auf der Kugel beim Oktantendreieck machen, das an allen 3 Ecken rechte Winkel besitzt, also tatsächlich die Winkelsumme $\frac{3\pi}{2} > \pi$ besitzt. Doch haben nicht etwa alle geodätischen Dreiecke auf der Kugel dieselbe Winkelsumme $\frac{3\pi}{2}$. Je kleiner die Dreiecke werden, desto mehr nähert sich die Winkelsumme dem Grenzwerte π, der bei unendlich kleinen Dreiecken zutrifft, die ja als eben angesehen werden können, und zwar gilt der Satz, daß die (bei Flächen positiver Krümmung positive und bei Flächen negativer Krümmung negative) Abweichung der Dreieckswinkelsumme vom Werte π proportional der Größe der Dreiecke ist*), und zwar ist der Quotient

$$\frac{\textit{Abweichung der Winkelsumme von } \pi}{\textit{Dreiecksinhalt}} = \textit{der Krümmung der Fläche.} —$$

Zusammenfassend können wir über Flächen mit der konstanten Krümmung $\varkappa$ sagen: *Das Quadrat ihres Linienelementes läßt sich stets folgendermaßen darstellen:*

$$(7) \qquad ds^2 = \frac{d\xi^2 + d\eta^2}{1 + \frac{\varkappa}{4}(\xi^2 + \eta^2)},$$

und ferner gilt für sie, falls

			Winkelsumme im Dreieck
$\varkappa = 0$,	*die euklidische (parabolische) Geometrie*		$= \pi$
$\varkappa > 0$,	„ *sphärische (elliptische)* „	*nichteuklidische Geometrien im engeren Sinne*	$> \pi$
$\varkappa < 0$,	„ *hyperbolische* „		$< \pi$.

Die Art der Geometrie, die auf einer Fläche gilt, ist also nicht der einzelnen Fläche charakteristisch, sondern der Form des Linienelementes — allen Flächen, deren Linienelemente sich auf dieselbe Form bringen lassen, entspricht dieselbe Geometrie, und das ist ja auch von vornherein klar, da sich solche Flächen stets aufeinander abwickeln lassen [vgl. Satz 1], und alle Figuren von einer sich daher auf alle anderen kongruent übertragen lassen. — Also *die Form des Linienelementes bestimmt ganz allgemein die Geometrie auf der Fläche.*

Hat nun das Quadrat des Linienelementes

$$(1) \qquad ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

nicht die spezielle Form (7) und läßt es sich auch nicht durch Einführung neuer Variabler auf sie bringen, mit anderen Worten, handelt es sich um eine Fläche *variabler* Krümmung, so sagt man, auf der Fläche herrsche eine „nichteuklidische Geometrie im weiteren Sinne". Solche Geometrien sind natürlich noch weit komplizierter als die hyperbolische und die sphärische Geometrie von Lobatschewskij-Bolyai und von Riemann, denn in ihnen gelten auch nicht einmal

*) Hieraus folgt, daß in diesen nichteuklidischen Geometrien z. B. die Aehnlichkeitssätze nicht mehr gelten.

mehr die Kongruenzaxiome, da man infolge der Veränderlichkeit der Krümmung von Ort zu Ort Figuren nicht mehr innerhalb der Fläche verschieben kann. —

Diese hier für Flächen auseinandergesetzte Bezeichnungsweise überträgt man nun auch auf allgemeine zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten und weiter dann auch auf Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung. Anstatt von den Gesetzen zu sprechen, die in einer Mannigfaltigkeit herrschen, spricht man kurz von der in ihr geltenden „Geometrie". Man nimmt diese wieder durch eine quadratische Differentialform bestimmt an, die man dann wieder als „Quadrat des Linienelementes" bezeichnet*), und für die man meist auch, wie in der Geometrie, „ds^2" schreibt. Man sagt so z. B. in einer zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit herrsche die euklidische Geometrie, oder auch eine nichteuklidische, und zwar je nach der Form des „Linienelementes ds" eine nichteuklidische Geometrie im engeren oder im weiteren Sinne. — Je nachdem wird sich eine Darstellung der einzelnen Individuen der Mannigfaltigkeit durch die Punkte einer Ebene oder aber einer krummen Fläche (konstanter oder variabler Krümmung) empfehlen.

So enthüllt sich die Natur einer Mannigfaltigkeit in dem Ausdruck für ihr „Linienelement"; Mannigfaltigkeiten, deren Linienelemente sich durch Einführung neuer Variabler ineinander umrechnen lassen, sind als völlig gleichwertig anzusehen, wie auch auf zwei Flächen mit gleichem Linienelemente ds (aufeinander abwickelbaren Flächen) dieselbe Geometrie gilt. Die einzelnen Individuen solcher Mannigfaltigkeiten sind einander paarweise so zugeordnet, daß auch die durch die Linienelemente definierten „Unterschiede" zwischen entsprechenden Individuen beider Mannigfaltigkeiten einander gleich sind — und wenn die Formen der Linienelemente nicht von vornherein übereinstimmten, so liegt das nur daran, daß sie zunächst noch nicht „auf die gleichen Koordinaten bezogen" sind, d. h. noch nicht entsprechende Bestimmungsstücke in beiden eingeführt sind.

Erst die Einführung des „Linienelementes", also im wesentlichen einer quadratischen Differentialform, gestattet es, verschiedene Mannigfaltigkeiten auch messend miteinander zu vergleichen, erst durch sie erhält also die Mannigfaltigkeit ihre „Metrik". Wir nennen die quadratische Differentialform daher auch die „metrische Fundamentalform" der Mannigfaltigkeit. — Es liegen hier die Verhältnisse ähnlich wie in der projektiven Geometrie, die nach Cayley auch ihre Metrik erst durch Festlegung eines bestimmten quadratischen Gebildes erhält: Die dort betrachteten Beziehungen geometrischer Figuren werden nämlich erst dadurch zu metrischen, daß man die sie darstellenden Transformationen der Einschränkung unterwirft, eine Oberfläche zweiter Ordnung, die Fundamentalfläche, ungeändert zu lassen. Je nach der Wahl der Fundamentalfläche erhält man dann die gewöhnliche euklidische

*) Diese Art, die Gesetze (Geometrie) in einer Mannigfaltigkeit durch ein als Quadratwurzel aus einer Differentialform zweiten Grades definiertes Linienelement festzulegen, ist, wie Riemann hervorhebt, die einfachste, aber durchaus nicht die einzige Art; man könnte z. B. auch ein „Linienelement" definieren als 4te Wurzel aus einer Differentialform 4ten Grades. Doch ist bisher wohl fast ausschließlich diese einfachste Form des Linienelementes benutzt. (Vgl. den Habilitationsvortrag von Riemann „Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen". Abgedruckt in den Ges. Werken 2. Auflage, Leipzig 1892, bei Teubner, S. 272, und ferner mit Anmerkungen von H. Weyl versehen, separat erschienen bei Springer in Berlin, 2. Auflage 1921.)

Maßgeomtrie oder aber eine der nichteuklidischen Geometrien (im engeren Sinne), wie hier allerdings nicht weiter ausgeführt werden soll.

Wir wollen vielmehr die Sachlage an einem anderen von HELMHOLTZ erwähnten Beispiele*) näher erläutern, an der Mannigfaltigkeit der Töne: Wenn wir von der Klangfarbe absehen, also die Töne lediglich bestimmt ansehen durch Tonhöhe und Intensität, so bilden sie eine zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit. Mit dieser Feststellung an sich ist allerdings wenig gewonnen, es ist das eben nur ein anderer Ausdruck für die Tatsache, daß die Gesamtheit der Töne von zwei unabhängig voneinander veränderlichen Größen abhängt. Darüber, wie man zwei Töne etwa messend miteinander vergleichen kann, wissen wir trotz dieser Feststellung nichts; eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit ist an sich noch eine, ich möchte sagen, ganz formlose Masse. Um Ordnung in sie zu bringen, bedarf es noch näherer Festsetzungen; vor allem wird man da ein Maß für den „Unterschied" zweier Töne festsetzen müssen. Wenn es sich um Töne gleicher Intensität handelt, wird man den Unterschied der Töne naturgemäß durch den Unterschied ihrer Höhe definieren, und umgekehrt, bei gleicher Höhe durch den Unterschied ihrer Intensitäten. Wie wird man nun aber im allgemeinen Falle, wenn sowohl Höhe wie Intensität zweier Töne verschieden sind, ihren „Unterschied" definieren? Es liegt wohl sehr nahe, dann folgendermaßen vorzugehen: Tonhöhe h und Intensität i jedes Tones als rechtwinklige Koordinaten in ein ebenes CARTESIsches System einzutragen, so daß also durch jeden Punkt dieser Ebene ein bestimmter Ton dargestellt ist, und dann den „Unterschied Δ_{12}" zweier Töne h_1, i_1 bzw. h_2, i_2 einfach zu definieren als den Abstand ihrer beiden Bildpunkte in dieser Ebene, also

$$\Delta_{12}^2 = (h_1 - h_2)^2 + (i_1 - i_2)^2$$

zu setzen, oder bei Beschränkung auf sehr nahe beieinander gelegene Töne:

I $$\delta^2 = dh^2 + di^2.$$

Nun könnte aber jemand einwenden, eine derartige gleichmäßige Berücksichtigung der Höhe und der Intensität wäre nicht gerechtfertigt, die Differenz in der Höhe zweier Töne wäre weit wesentlicher als die in der Intensität. Dann könnte man etwa den Unterschied Δ_{12} der Töne definieren durch die Gleichung:

$$\Delta_{12}^2 = (h_1 - h_2)^2 + \Theta\,(i_1 - i_2)^2,$$

oder im Infinitesimalen durch:

II $$\delta^2 = dh^2 + \Theta\, di^2,$$

wo Θ ein gegebener positiver echter Bruch ist. — Dieser Ansatz II würde freilich von dem ursprünglichen Ansatz I nicht wesentlich verschieden sein, und auch die so definierten Unterschiede könnte man noch geometrisch veranschaulichen durch die Abstände der die Töne darstellenden Punkte in einem rechtwinkligen Koordinatenschema, nur daß in diesem Schema jetzt die Maßstäbe in Richtung der h- bzw. i-Axe verschieden anzunehmen wären.

Weiter könnte aber auch jemand meinen, man dürfe den Einfluß der Intensitätsunterschiede nicht in allen Höhenlagen gleichstark be-

*) „Ueber den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome." HELMHOLTZ, Vorträge und Reden, Bd. 2, S. 1. — Dieser Aufsatz sei dem Leser zur Orientierung über die hier in Frage stehenden Verhältnisse wärmstens empfohlen.

rücksichtigen, bei höheren Tönen spielten sie eine größere Rolle als bei tieferen*). Einer solchen Auffassung könnte man etwa durch den Ansatz:

$$\Delta_{12}^2 = (h_1 - h_2)^2 + \frac{h_1 + h_2}{2}(i_1 - i_2)^2$$

Rechnung tragen, den wir allerdings wieder auf das Infinitesimale beschränken wollen, wo er dann lautet:

III $$\delta^2 = dh^2 + h\,di^2.$$

Bei diesem Ansatze fällt natürlich die Möglichkeit, den Unterschied der Töne als den Abstand ihrer Bildpunkte in einem rechtwinkligen Koordinatenschema zu deuten, fort.

Je nachdem wir nun den Unterschied zweier benachbarter Töne nach I, II oder III definieren, werden Vergleichungen von Tönen sehr verschieden ausfallen; also die Gesetze, welche im Reiche der Töne herrschen, werden wesentlich durch die zugrunde gelegte Differentialform bestimmt, und wir sehen an diesem Beispiele so recht deutlich, wie eine zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, wie wir oben sagten, ihre Metrik erst durch die zugehörige quadratische Fundamentalform erhält.

In den Fällen I und II einer „euklidischen Maßbestimmung" sagt man nun auch, in der Mannigfaltigkeit der Töne herrsche die euklidische Geometrie, im Falle III eine nichteuklidische. — Die erstere Aus-

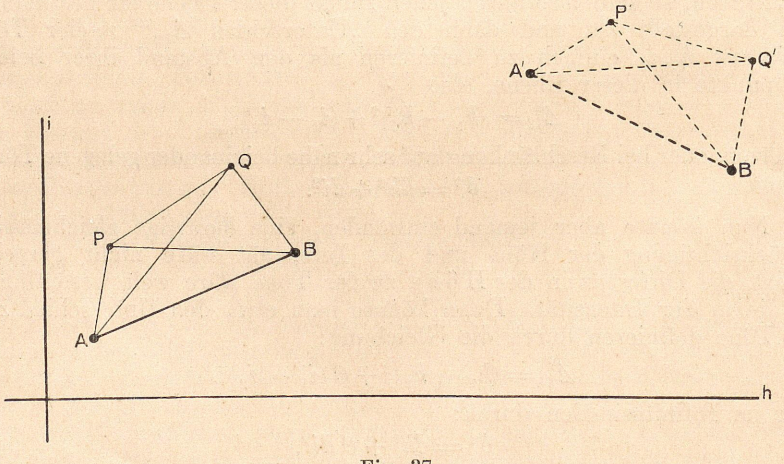


Fig. 37.

sage ist ohne weiteres verständlich, wenn man sich klar macht, daß für Tonunterschiede genau dieselben Sätze gelten wie in der gewöhnlichen euklidischen Geometrie für Entfernungen von Punkten — werden doch die Unterschiede von Tönen geradezu gemessen durch die Entfernungen ihrer Bildpunkte in einem ebenen Diagramm. So gilt in den Fällen I und II z. B. der Satz: *Sind A, B und A', B' zwei Paare von Tönen mit gleichem Unterschied ($A'B' = AB$) und P, Q und P', Q' je zwei weitere Töne, deren Unterschiede von A, B bzw. A', B'*

*) Ob sich diese Einwände vom physikalischen oder psychologischen Standpunkte rechtfertigen lassen, darauf kommt es hier natürlich gar nicht an, da es sich nur um die Auseinandersetzung eines Prinzipes handelt.

entsprechend gleich sind ($P'A' = PA$, $P'B' = PB$, $Q'A' = QA$, $Q'B' = QB$), *so sind auch die Unterschiede von* P, Q *und von* P', Q' *einander gleich* ($P'Q' = PQ$) — im Grunde genommen ein bekannter geometrischer Satz*) [vgl. Fig. 37], der sich sofort in das Gebiet der Töne überträgt. — Es kommt hier auch sehr deutlich zum Ausdruck, daß die Mannigfaltigkeit der Töne bei den Annahmen I und II als „ebene" Mannigfaltigkeit in sich verschiebbar ist: Beziehungen, die zwischen Tönen in einem Gebiete bestehen, gelten ganz entsprechend auch in anderen Gebieten, d. h. bei ganz anderen absoluten Tonhöhen und Intensitäten.

Bei der Annahme III gelten in der Mannigfaltigkeit der Töne nicht mehr die Sätze der gewöhnlichen euklidischen Geometrie. Die Mannigfaltigkeit der Töne ist nach dieser Annahme keine „ebene" mehr, sondern eine „gekrümmte". Tatsächlich ergibt sich die „Krümmung" der Mannigfaltigkeit, wenn wir sie nach der in (9) S. 155 angedeuteten Formel berechnen:

$$K = \frac{1}{4h^2}.$$

Die Krümmung ist also nicht einmal konstant, sondern variabel, die in der Mannigfaltigkeit der Töne geltende Geometrie ist also in unserer Ausdrucksweise sogar eine nichteuklidische Geometrie „im weiteren Sinne". — Um sie sich zu veranschaulichen, wird man irgendeine Fläche zu bestimmen suchen, bei der das Quadrat des Linienelementes jene Form III besitzt und die Krümmung daher gleich $\frac{1}{4h^2}$ sein muß. Nach den auf S. 173 entwickelten Formeln ist es nicht schwer, speziell eine Rotationsfläche zu bestimmen, welche dieser Forderung entspricht; es ist das die Fläche, deren Meridiankurve die Gleichung besitzt:

$$(\mathfrak{F}) \qquad z = f(r) = \frac{r}{2}\sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 - 1} - \log\left(\sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 - 1} + \frac{r}{2}\right).$$

Man braucht nur für den Achsenabstand r und das Azimut φ der Meridianebene zu setzen:

$$12) \qquad r = 2\sqrt{h} \qquad \text{und} \qquad \varphi = \frac{i}{2},$$

so nimmt das Quadrat des Linienelements ds dieser Fläche $\mathfrak{F}$ tatsächlich die Form III an, und wir können daher Unterschiede zweier benachbarter Töne direkt messen durch die Entfernung ihrer nach Maßgabe der Gleichungen (12) auf jener Fläche $\mathfrak{F}$ konstruierten Bildpunkte, und entsprechend liegt es dann nahe, den Unterschied zweier beliebiger Töne zu messen durch den geodätischen (im allgemeinen kürzesten) Abstand der entsprechenden Bildpunkte auf jener Fläche. Dann kann man in demselben Sinne, in dem wir in den Fällen I und II sagten, es gelte in der Mannigfaltigkeit der Töne die euklidische Geometrie, jetzt im Falle III sagen, es gelte in ihr dieselbe (nichteuklidische) Geometrie wie auf jener Rotationsfläche $\mathfrak{F}$ (oder auf irgendeiner anderen auf sie abwickelbaren Fläche). —

*) Auf die Präzisierung, deren der Satz noch bedürfte, weil von den beiden Punktpaaren P, Q und P', Q' das eine ganz auf der einen Seite, das andere aber auf verschiedenen Seiten der Linien A, B bzw. A', B' liegen könnte, brauche ich hier wohl nicht näher einzugehen.

Wir wollen schließlich noch einen vierten Ansatz für die Maßbestimmung im Gebiete der Töne betrachten, indem wir den Einfluß der Intensitätsunterschiede, den Koeffizienten von $(i_1 - i_2)^2$ im Ausdruck für Δ_{12}^2, nicht proportional der mittleren Tonhöhe $\frac{h_1 + h_2}{2}$, wir im Falle III annehmen, sondern proportional ihrem Quadrate, also

$$\Delta_{12}^2 = (h_1 - h_2)^2 + \left(\frac{h_1 + h_2}{2}\right)^2 (i_1 - i_2)^2$$

setzen, oder bei Beschränkung aufs Infinitesimale:

IV $$\delta^2 = dh^2 + h^2 di^2.$$

Bei dieser Annahme ergibt sich die Krümmung $K = 0$, es ist also die Mannigfaltigkeit als „eben" anzusehen. Der Ansatz IV stellt also eine euklidische Maßbestimmung dar, trotz der von der kanonischen Form $d\xi^2 + d\eta^2$ abweichenden Gestalt für das Quadrat des Linienelementes. Bei Zugrundelegung der Annahme IV gilt daher in der Mannigfaltigkeit der Töne doch die gewöhnliche euklidische Geometrie, und durch Einführung passender neuer Bestimmungsstücke muß sich δ^2 auch auf die Form

$$\delta^2 = d\xi^2 + d\eta^2$$

bringen lassen. — Daß dem tatsächlich so ist, erkennt man leicht, stellt doch die Differentialform IV den bekannten Ausdruck für das Quadrat des Linienelementes in ebenen Polarkoordinaten dar. Wir brauchen also nur

$$\xi = h \cdot \cos i \qquad \text{und} \qquad \eta = h \cdot \sin i$$

zu setzen, um tatsächlich die der euklidischen Geometrie charakteristische Form $d\xi^2 + d\eta^2$ für das Quadrat des Linienelementes zu erhalten. — Wenn wir also wieder die Sätze der euklidischen Geometrie in die Mannigfaltigkeit der Töne übersetzen wollen, wie wir das oben in den Fällen I und II taten, so müssen wir jetzt Diagramme zeichnen, in denen Tonhöhe h und Intensität i nicht, wie früher als rechtwinklige, sondern als Polarkoordinaten aufgetragen werden. —

Wir wollen jetzt dieses Beispiel von den Tönen, das uns so lange beschäftigt hat, verlassen.*) Es schien mir aber notwendig, an einem verhältnismäßig einfach zu übersehenden Beispiele auseinander zu setzen, was es heißt, daß eine Mannigfaltigkeit erst durch eine quadratische Differentialform ihre Metrik erhielte, und auch die Bedeutung der übrigen in diesen Gebieten gebräuchlichen Ausdrucksweisen klarzustellen und zu erläutern — und nunmehr wenden wir uns von den zweifach ausgedehnten zunächst den dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten zu. Eine solche wird dargestellt z. B. durch die Werte einer physikalischen Größe, die erst durch Angabe von 3 unabhängig veränderlichen Parametern bestimmt ist, wie oben ein Ton durch die 2 Parameter: Höhe und Intensität. Auch einer solchen dreidimensionalen Mannigfaltigkeit (u, v, w), werden wir erst eine Maßbestimmung durch eine quadratische Differentialform, das „Quadrat des Linienelementes"

*) Helmholtz hat dieses Beispiel an der auf S. 181 angegebenen Stelle nur kurz gestreift. Wirklich angewandt hat er das Prinzip der nichteuklidischen Maßbestimmung im Gebiete der Farben. Vgl. seinen Aufsatz von 1891 „Kürzeste Linien im Farbensystem". Wiss. Abhandlungen Bd. 3, Leipzig 1895, bei Joh. Ambr. Barth, S. 460, und dazu auch neuere Arbeiten von Schrödinger (Ann. d. Phys. Bd. 63, 1920).

13) $ds^2 = q_1\,du^2 + q_2\,dv^2 + q_3\,dw^2 + 2p_1\,dv\,dw + 2p_2\,dw\,du + 2p_3\,du\,dv$

geben, wo die Koeffizienten q und p der Quadrate und Produkte von du, dv, dw als Funktionen der Parameter u, v, w anzusehen sind.

Ist in dieser Weise die Mannigfaltigkeit mit einer Metrik versehen, so kann man auch für sie eine „Krümmung" definieren, wie das später ausgeführt werden soll. Sie kann positiv, oder auch negativ oder auch 0 sein. Ist sie überall 0, so spricht man wieder von einer euklidischen Maßbestimmung und sagt — alles in völliger Analogie mit den Verhältnissen bei zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten —, es liege eine ebene Mannigfaltigkeit vor und es gelte in ihr die euklidische Geometrie, anderenfalls spricht man von einer „gekrümmten" Mannigfaltigkeit, in der eine nichteuklidische Geometrie gelte. — Im ersteren Falle kann man das Quadrat des Linienelementes durch Einführung neuer Variablen auf die Form

14) $$ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2$$

bringen, im letzteren nicht. —

Die bekannteste und uns vertrauteste dreidimensionale Mannigfaltigkeit ist die aller Raumpunkte, die Raummannigfaltigkeit. In ihr sind wir gewohnt, die euklidische Maßbestimmung (14) einzuführen und damit die euklidische Geometrie als gültig anzunehmen. Aber so alt diese Geometrie ist, so alt sind auch die Zweifel an ihrer Richtigkeit, die Zweifel, ob z. B. das Parallelenaxiom richtig ist oder nicht. Es entsteht die Frage, ob der Raum „eben" ist, eine ebene Mannigfaltigkeit im obigen Sinne darstellt, oder aber ob er „gekrümmt" ist. Einen solchen „gekrümmten Raum" können wir uns nun freilich nicht mehr veranschaulichen; für unser Vorstellungsvermögen gibt es nur einen Raum, während es sehr viele verschiedene Flächen gibt, so daß wir uns noch verschiedene zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten anschaulich vorzustellen imstande sind. Beim Raume oder anderen mehr als zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten ist die Krümmung ein von den Flächen auf sie übertragener Begriff, den wir nur noch *analytisch*, nicht aber anschaulich fassen können, womit freilich nicht gesagt ist, daß sich die Krümmung z. B. des dreidimensionalen Raumes nicht (experimentell) nachweisen ließe.

Bekannt ist, daß kein geringerer als Gauss es nicht für überflüssig gehalten hat, eine solche Prüfung der Frage, ob der Raum eben oder gekrümmt sei, ob in ihm die euklidische oder eine nichteuklidische Geometrie gelte, vorzunehmen: er maß (aus den auf S. 179 dargelegten Gründen) in einem möglichst großen Dreieck (das gebildet wurde von den Gipfeln des Brockens, des Inselberges und des Hohen Hagens bei Göttingen) die Winkelsumme, um aus einer eventuellen Abweichung vom Werte 180° auf eine Krümmung des Raumes zu schließen*). Das Resultat war, daß die Abweichung von 180° unterhalb der Beobachtungsfehler blieb, so daß also, wenn überhaupt eine Krümmung des Raumes vorliegt, durch diese Beobachtungen als festgestellt gelten kann, daß sie nur sehr gering ist**). An sich aber kann man beim Raume, ebenso

*) Mit der Krümmung der Erdoberfläche hat der Versuch prinzipiell nichts zu tun. Jene 3 Punkte wurden einfach als isolierte Raumpunkte betrachtet.

**) Es ist freilich zu beachten, daß bei jeder experimentellen Prüfung dieser Frage gewisse Hypothesen *physikalischer* Art gemacht werden, wie bei dem Gaussschen Versuche die Hypothese, daß die Lichtstrahlen den geodätischen Linien folgen.

wie bei Flächen z. B. von konstanter positiver oder konstanter negativer Krümmung sprechen. In Analogie mit den Flächen nennt man einen Raum mit konstanter positiver Krümmung einen „sphärischen Raum", einen mit konstanter negativer Krümmung einen „pseudosphärischen Raum" und spricht dann in solchen Räumen von einer sphärischen bzw. pseudosphärischen Geometrie. — Der namentlich von RIEMANN in Betracht gezogene sphärische Raum ist, wie die Kugel, wenn auch *unbegrenzt*, so doch *endlich*, und die (später genauer zu definierenden) geodätischen Linien in ihm sind, wie auf der Kugel, sämtlich *geschlossene Kurven*. — Um nur eine recht drastische Folgerung hieraus zu erwähnen, nehmen wir noch, wie üblich, an, daß die Lichtstrahlen geodätische Linien seien; dann wird ein Beobachter im sphärischen Raume, wenn er in einer Richtung hinausschaut, in der sein Blick nicht durch andere Körper gehindert wird, stets seinen eigenen Hinterkopf erblicken. —

Mit der Möglichkeit, daß der Raum unserer Anschauung ein solcher sphärischer oder auch ein pseudosphärischer Raum sei, haben bereits GAUSS, RIEMANN, HELMHOLTZ u. a. gerechnet, also mit der Möglichkeit, daß der Raum gekrümmt sei. Doch haben sie bei ihren Ausführungen immer nur überall im ganzen Raume dieselbe Krümmung angenommen, an der Homogenität des Raumes haben sie nicht gerüttelt — das hat erst EINSTEIN getan, wie schon früher (S. 172) angedeutet wurde und unten noch näher ausgeführt werden soll; er nimmt einen *Raum variabler Krümmung* an, und zwar denkt er die Krümmung an jeder Stelle bestimmt durch die Gravitationsfelder, also durch die Verteilung der Massen im Raum. *EINSTEIN also gibt die Homogenität des Raumes auf und sieht die Raumzeitmannigfaltigkeit (und damit auch die Raummannigfaltigkeit) als eine nichteuklidische an (sogar in weiterem Sinne).*

Solange wir an einer konstanten Krümmung des Raumes, also an seiner Homogenität, festhalten, besitzt der Raum noch immer wichtige uns vom euklidischen Raume her geläufige Eigenschaften. So gelten in ihm noch immer die Kongruenzsätze. Wie man auf einer Fläche konstanter Krümmung eine Figur beliebig verschieben kann [vgl. S. 177], so kann man in Räumen konstanter Krümmung auch räumliche Figuren unverändert verschieben. Wie aber eine solche Verschiebung innerhalb von Flächen variabler Krümmung, z. B. in einer Eifläche, nicht möglich ist, eine Kappe, die am unteren Ende des Eies aufsitzt, nach oben verschoben nicht mehr anliegt, sondern aus der Fläche heraus in die dritte Raumdimension ragt [vgl. Fig. 38], so ist auch im Raume variabler Krümmung eine Verschiebung einer räumlichen Figur (und damit ein starrer Körper, wie wir ihn gewöhnlich definieren) nicht möglich. Wir müßten auch hier annehmen, daß eine solche räumliche Figur (verkörpert gedacht etwa durch ein Drahtgestell) nach einer ungeänderten Verschiebung „in die vierte Dimension hinausragt". Damit können wir allerdings eine anschauliche Vorstellung nicht verbinden; wir beobachten niemals, daß ein Körper durch bloße Bewegung

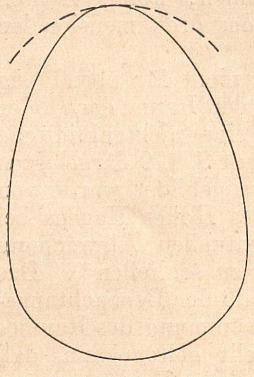


Fig. 38.

ganz oder teilweise aus dem Raume unserer Anschauung ausscheidet. — Daher müssen wir die Annahme einer unveränderten Verschiebung fallen lassen und, geradeso wie man eine auf das untere Ende des Eies passende Kappe (als Träger von Figuren) deformieren, zusammendrücken muß, um sie am oberen Ende wieder dem Ei anzupassen, ebenso muß man annehmen, daß ein Körper (als Träger räumlicher Figuren) bei einer Verschiebung im Raume variabler Krümmung Deformationen erleidet, und wenn man beachtet, daß nach der Einsteinschen Auffassung der Grund zu den Verschiedenheiten der Krümmung an verschiedenen Stellen in den Gravitationsfeldern liegt, würde das heißen, daß jeder Körper bei Veränderungen der Gravitationsfelder Deformationen erleidet — und das ist doch eine Auffassung, die den uns geläufigen Vorstellungen durchaus nicht so ganz fremdartig gegenübersteht.

So kommen wir durch diese Ueberlegungen zurück auf die Vorstellung von der Vergrößerung oder Verkleinerung aller Körper bei Annäherung an gewisse Stellen im Raume, wie wir sie schon früher (S. 149) im Anschluß an den Poincaréschen Traum einmal schilderten, um überhaupt einmal den Begriff der gekrümmten Mannigfaltigkeit in unsere Betrachtungen einzuführen*).

Um nun auf die Einsteinschen Betrachtungen in ihrer vollen Allgemeinheit einzugehen, fassen wir jetzt Vorgänge im dreidimensionalen Raume ins Auge, d. h. also wir betrachten, indem wir noch die Zeit hinzunehmen, eine vierdimensionale Raumzeitmannigfaltigkeit (Minkowskis „Welt"). In dieser Mannigfaltigkeit (x_0, x_1, x_2, x_3) nahm Einstein, wie wir früher auseinandersetzten, eine gewisse ausgezeichnete quadratische Differentialform, die „Fundamentalform", an, die, in beliebige neue Bezugssysteme umgerechnet, in allen diesen Systemen dieselbe Rolle spielt — sollten doch die Naturgesetze zu ihr kovariant sein [vgl. das allgemeine Relativitätsprinzip S. 166]. Wenn wir die Form aber nur „umzurechnen", d. h. nur durch die neuen Koordinaten und ihre Inkremente auszudrücken brauchen, so liegt darin bereits, daß sie numerisch ungeändert bleibt, ihre Größe nicht ändert, also gleichsam einen der Mannigfaltigkeit an sich charakteristischen, vom Bezugssystem unabhängigen Maßstab darstellt, und so sieht sie denn Einstein tatsächlich zugleich als *„metrische Fundamentalform"* der Raumzeitmannigfaltigkeit im Sinne unserer letzten Betrachtungen an, und läßt damit in ihr eine *nichteuklidische Geometrie* gelten.

So erklärt sich auch das Resultat, das zu dem Satze 1, S. 132 führte, daß ein Beobachter im rotierenden Systeme, wenn er die Kreisperipherie in Figur 20 so ausmißt, als wenn überall im Kleinen die spe-

*) Ein wesentlicher Unterschied besteht allerdings zwischen dem damals fingierten Sachverhalte und dem Resultate unserer letzten Ueberlegungen — ein Unterschied, auf den mich einer meiner Zuhörer, mein jetziger Kollege Dr. Hasse, in dankenswerter Weise aufmerksam machte. Die damals angenommenen Veränderungen sollten mit rein geometrischen Methoden nicht nachweisbar sein — die hier bei nichteuklidischer Struktur des Raumes sich ergebenden Veränderungen sind es (wenigstens im Prinzipe). — Das machen wir uns am besten wieder an dem Beispiele von der Eifläche klar: die Verbiegung der Kappe in Figur 38, die notwendig ist, um sie wieder an der Spitze des Eies passend zu machen, ist auch, ohne daß man aus der Fläche herauszutreten braucht, konstatierbar. Man braucht nur die Abstände irgend zweier ihrer Punkte, einmal wenn sie unten, dann wenn sie oben aufsitzt, miteinander zu vergleichen. Da eindimensionale Gebilde, wie z. B. Fäden, unverändert verschiebbar sind, so ist diese Vergleichung leicht durchführbar, also der Unterschied der Abstände jener Punkte und damit die Verbiegung der Kappe tatsächlich rein geometrisch feststellbar.

zielle Relativitätstheorie gelte — und nach Zusatz 2, S. 161 darf er das ja — zu der Vorstellung von einem Kreise kommt, dessen Umfang kleiner als 2π mal dem Radius ist. Ein solcher Kreis ist zwar in der euklidischen Geometrie oder in einer „ebenen" Mannigfaltigkeit nicht möglich, wohl aber in nichteuklidischen Geometrieen oder in „gekrümmten" Mannigfaltigkeiten. Wir brauchen bei den gekrümmten Mannigfaltigkeiten nur an die Punkte einer Kugelfläche zu denken; ein Kreis in dieser Mannigfaltigkeit, (d. h. auf der Kugel), z. B. ein Parallelkreis, ist tatsächlich kleiner als der *in* der Mannigfaltigkeit, (auf der Kugel) also im Meridian gemessene Radius multipliziert mit 2π. Deshalb sagten wir in Satz 1, S. 132 auch nur, daß man bei jenem Vorgehen beim Messen auf einen *Widerspruch mit der euklidischen Geometrie* stieße.

Wir können die angedeuteten Einsteinschen Auffassungen in folgendem Satz aussprechen:

Satz 6. — *Einstein sieht die Minkowskische Welt (Raumzeitmannigfaltigkeit) an als eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit mit im allgemeinen nichteuklidischer Maßbestimmung, wie sie gegeben ist durch die Fundamentalform [vgl. (7) S. 166], die man als den Ausdruck für das „Quadrat des Linienelementes ds" deutet:*

$$15)\qquad \left.\begin{aligned} ds^2 = {} & g_{00}\,dx_0^2 + g_{11}\,dx_1^2 + g_{22}\,dx_2^2 + g_{33}\,dx_3^2 \\ & + 2g_{01}\,dx_0\,dx_1 + 2g_{02}\,dx_0\,dx_2 + 2g_{03}\,dx_0\,dx_3 \\ & + 2g_{23}\,dx_2\,dx_3 + 2g_{31}\,dx_3\,dx_1 + 2g_{12}\,dx_1\,dx_2 \end{aligned}\right\} = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}\,dx_\mu\,dx_\nu{}^{*})$$

Die 10 Koeffizienten $g_{ik} = g_{ki}$ sieht er als abhängig von dem Gravitationsfelde an, das von dem zugrunde gelegten Raumzeitsysteme (x_0, x_1, x_2, x_3) aus wahrgenommen wird, und bezeichnet sie als „Gravitationspotentiale". — Danach ist auch der Raum nichteuklidisch mit einer noch von der Verteilung der Massen in ihm veränderlichen Maßbestimmung und daher auch variabler Krümmung.

Nur in „Lorentz-Gebieten", d. h. wo keine Gravitationsfelder vorhanden sind, ist die Maßbestimmung eine euklidische, indem bei passender Wahl des Bezugssystems die Gravitationspotentiale die Werte annehmen:

$$g_{ik} = \begin{cases} \text{const} \neq 0 & \text{für } i = k \\ 0 & \text{„ } i \neq k. \end{cases} —$$

Das Wichtigste an dieser Einsteinschen Auffassung ist nun das, daß nach ihr *nicht etwa Raum und Zeit etwas a priori gegebenes* sind, gleichsam ein fertiges Schema, in das man die Naturerscheinungen nur einzuordnen hätte, sondern daß *Raum und Zeit selber ihre Eigenschaften erst durch physikalische Dinge erhalten, nämlich durch die im Raume befindlichen Massen.*

Solche Ideen sind schon lange vor Einstein von Riemann geäußert worden in seinem schon in der Anmerkung S. 180 erwähnten Habilitationsvortrage „Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie

*) Auf die Angabe der Summationsgrenzen verzichte ich bei Benutzung der Summensymbolik, da hier immer über die Werte 0, 1, 2, 3 der Indizes zu summieren ist. — Hingegen werde ich im Interesse einer leichteren Uebersicht nicht die neue Mode mitmachen, auch die Summenzeichen wegzulassen. Auch werde ich stets die Summationsindizes angeben, auch schon um deutlich erkennen zu lassen, ob es sich um eine einfache, zweifache oder noch mehrfache Summe handelt. So sollen in unserem Falle die beiden Indizes μ und ν unter dem Summenzeichen sofort die Doppelsummen andeuten.

zugrunde liegen“ *). — Ich möchte daher hier noch einige Stellen aus dem Schlußabschnitte dieser Arbeit Riemanns anführen, die sich aufs engste mit den von uns erörterten Fragen berühren:

Riemann sagt da: „Setzt man voraus, daß die Körper unabhängig vom Ort existieren**), so ist das Krümmungsmaß überall konstant, und es folgt dann aus den astronomischen Messungen***), daß es nicht von Null verschieden sein kann; jedenfalls müßte sein reziproker Wert eine Fläche sein, gegen welche das unseren Teleskopen zugängliche Gebiet verschwinden müßte. Wenn aber eine solche Unabhängigkeit der Körper vom Ort nicht stattfindet, so kann man aus den Maßverhältnissen im Großen nicht auf die im Unendlichkleinen schließen; es kann dann in jedem Punkte das Krümmungsmaß in drei Richtungen einen beliebigen Wert haben, wenn nur die ganze Krümmung jedes meßbaren Raumteils nicht merklich von Null verschieden ist. . . . . Nun scheinen aber die empirischen Begriffe, in welchen die räumlichen Maßbestimmungen gegründet sind, der Begriff des festen Körpers und des Lichtstrahls, im Unendlichkleinen ihre Gültigkeit zu verlieren; es ist also sehr wohl denkbar, daß die Maßverhältnisse des Raumes im Unendlichkleinen den Voraussetzungen der Geometrie nicht gemäß sind, und dies würde man in der Tat annehmen müssen, sobald sich dadurch die Erscheinungen auf einfachere Weise erklären ließen“ — alles Ueberlegungen, wie wir sehen, die auch wir im Laufe unserer Untersuchungen berührt haben. Speziell mit den letzten Worten bekennt sich auch hier wieder Riemann zu den von uns in der Einleitung vertretenen Auffassungen. Wenn wir diese letzten Worte lesen, so glauben wir deutlich die dort auch von uns angeführten Worte zu hören: „Neque enim necesse est, eas hypotheses esse veras, imo ne verosimiles quidem, sed sufficit hoc unum, si calculum observationibus congruentem exhibeant“.

Dann aber, um zur Hauptsache zu kommen, sagt Riemann: „Die Frage über die Gültigkeit der Voraussetzungen der Geometrie im Unendlichkleinen hängt zusammen mit der Frage nach dem inneren Grunde der Maßverhältnisse des Raumes . . . Es muß also entweder das dem Raume zugrundeliegende Wirkliche eine diskrete Mannigfaltigkeit bilden†), oder *der Grund der Maßverhältnisse außerhalb, in darauf wirkenden bindenden Kräften gesucht werden.*“ — Aber auch darüber, woran er bei diesen „bindenden Kräften“ denkt, lassen seine Worte keinen Zweifel, denn er fährt fort: „Die Entscheidung dieser Fragen kann nur gefunden werden, indem man von der bisherigen durch die Erfahrung bewährten Auffassung der Erscheinungen, wozu Newton den Grund gelegt, ausgeht und diese durch Tatsachen, die sich aus ihr nicht erklären lassen, getrieben allmählich umarbeitet . . . Es führt dies hinüber in das Gebiet einer anderen Wissenschaft, in das Gebiet der Physik.“ — So spricht es also schon Riemann

*) Der Vortrag ist gehalten vor der Göttinger philosophischen Fakultät im Jahre 1854 im Beisein von Gauss, aber erst nach Riemanns Tode 1866 erstmalig herausgegeben in Bd. 13 der Abhandlungen der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen — jetzt leicht zugänglich an den in der Anmerkung S. 180 genannten Stellen.

**) Das würde in unserer obigen Ausdrucksweise heißen: Wenn sich die Körper unverändert verschieben lassen.

***) Wir haben uns oben nicht auf astronomische Beobachtungen, sondern auf die Gauss schen terrestrischen Versuche berufen.

†) Auf die Erörterung dieser Möglichkeit sind wir oben nicht eingegangen.

ganz klar aus, daß die im Raum herrschenden Maßverhältnisse nichts von vornherein feststehendes sind, sondern, daß sie als durch physikalische Dinge bestimmt anzusehen sind.

Nur mit Staunen und Bewunderung liest man heute im Zeitalter der Relativitätstheorie diese Riemannschen Worte, die man rund 50 Jahre lang nicht verstanden hat — erst durch Einstein sind sie zu neuem Leben erweckt, und mögen auch die Vorstellungen Riemanns, die er hier nur angedeutet hat*), im einzelnen von den Einsteinschen vielleicht sehr verschieden gewesen sein — diesen einen wesentlichen Punkt hat Riemann klar erkannt, daß die Natur des Raumes und seine Eigenschaften nicht etwas a priori Gegebenes seien, sondern von physikalischen Verhältnissen abhängen, und darum müssen wir Riemann als einen Vorgänger von Einstein betrachten, und wenn noch vor Veröffentlichung von Riemanns Arbeit C. Neumann in den der Einleitung dieses Buches als Motto vorausgeschickten Worten dem Zweifel Ausdruck gab, ob die damaligen „mathematischen Vorstellungen, die Vorstellungen über Raum und Zeit" zur Erklärung mancher physikalischer Erscheinungen genügten, so muß man Riemann das große Verdienst lassen, daß er durch seine Untersuchungen praktische Vorarbeit zur Erweiterung unserer Vorstellungen geleistet hat, wie er selber als Zweck seiner Untersuchung bezeichnet, daß sie dazu dienen sollte, daß „die Arbeit (des theoretischen Physikers) nicht durch die Beschränktheit der Begriffe gehindert und der Fortschritt im Erkennen des Zusammenhanges der Dinge nicht durch überlieferte Vorurteile gehemmt wird".

Aber noch etwas weiteres möchte ich an den oben angeführten Aussprüchen Riemanns hervorheben: in ihnen bekennt sich einer der größten mathematischen Geister offen zu der Auffassung von der Einheit von Mathematik und Physik — einer Auffassung, wie sie auch wieder durch die weitere Entwicklung der Relativitätstheorie nur bestätigt ist.

§ 5.

Das Einsteinsche Fundamentalgesetz.

Wir wollen uns jetzt in der Relativitätstheorie nach einem Ersatz umsehen für das Galileische Trägheitsgesetz der älteren Mechanik. Dieses handelte von der „Trägheitsbewegung" eines Massenpunktes, d. h. der Bewegung, die er ausführt, „wenn keine Kräfte auf ihn wirken". — Nach diesem Gesichtspunkte, danach, ob Kräfte auf einen Punkt wirken oder nicht, kann man nun in der Relativitätstheorie die Bewegungen nicht mehr einteilen, denn nach den neuen Auffassungen dieser Theorie hängt es ja noch von dem zugrundegelegten Systeme ab, ob Kräfte wirken oder nicht, wenigstens gilt das von den Gravitationskräften, die durch diese Theorie ihre absolute vom Bezugssystem unabhängige Bedeutung verloren haben. Eine Bewegung, die von einem System aus zu bezeichnen ist als Bewegung ohne Einwirkung von Kräften, wird von einem anderen System aus unter dem Einfluß von

*) Er selber sagt in einer Anmerkung, daß sie noch „einer Umarbeitung und weiteren Ausführung" bedürften.

Gravitationskräften vor sich zu gehen scheinen. „Trägheitsbewegungen“ und „Bewegungen in Gravitationsfeldern“ sind nach dieser Theorie nichts prinzipiell Verschiedenes — wie wir das ja früher eingehend auseinandergesetzt haben [vgl. z. B. S. 145]. Beide Arten von Bewegungen müssen daher von demselben Gesetze beherrscht werden; dieses muß, je nach dem Bezugssystem, auf das wir es umrechnen, bald eine Trägheits-, bald eine Gravitationsbewegung liefern. — Um die Aufstellung dieses die Trägheitsbewegungen und die Bewegungen in Gravitationsfeldern gleichzeitig beherrschenden Gesetzes handelt es sich jetzt also.

Wir knüpfen an den Spezialfall der Trägheitsbewegung an, den Fall, daß „keine Kräfte“ wirken. Von diesem Falle kann man, wie wir wissen, nur sprechen, wenn ein „Lorentz-Gebiet“ vorliegt, und auch dort nur, wenn man speziell ein „Lorentz-System“ zugrunde legt [vgl. z. B. S. 146], so daß dann also gerade die Annahmen der speziellen Relativitätstheorie zutreffen. Dann erfolgt die Bewegung in diesem Lorentz-System, wie wir früher durch Verallgemeinerung der Prinzipien der klassischen Mechanik feststellten [vgl. den Spezialsatz S. 114], geradlinig gleichförmig, die Koordinaten x, y, z stellen sich als lineare Funktionen der Zeit t dar, oder, wie wir das, auch für unsere Erörterungen hier, zweckmäßiger ausdrückten: *die Weltlinie des Punktes ist eine Gerade in der vierdimensionalen Minkowskischen Welt* — und dabei war unter einer Geraden im vierdimensionalen Raume eine lineare, d. h. mittels eines Parameters (damals der Eigenzeit τ) linear darstellbare Punktfolge zu verstehen, so daß also die Weltlinie durch Gleichungen von folgender Form dargestellt war:

1) $$x = a\tau + \mathfrak{a}, \qquad y = \beta\tau + \mathfrak{b}, \qquad z = \gamma\tau + \mathfrak{c}, \qquad t = \delta\tau + \mathfrak{d}.$$

Doch den linearen Charakter dieser Gleichungen können wir nicht als das Wesentliche an einer Geraden betrachten, da er ja bei Einführung beliebiger anderer Koordinaten sofort verloren geht, wie ja auch die Gerade im gewöhnlichen Raume z. B. in elliptischen Koordinaten nicht mehr durch lineare Gleichungen dargestellt wird. Wir müssen uns daher, bevor wir an eine Verallgemeinerung unseres obigen Resultates herantreten, nach einem anderen Charakteristikum für die Weltlinie der Trägheitsbewegung im vierdimensionalen Raumzeitgebiete umsehen: Da erinnern wir uns der Fundamentaleigenschaft, durch die schon Euclid die Gerade im dreidimensionalen Raume definiert, nämlich der Eigenschaft als kürzeste Linie zwischen zweien ihrer Punkte. — So können wir denn auch in Lorentz-Gebieten die Gerade anstatt durch Gleichungen von der Form (1) definieren durch die Forderung

2) $$\int_a^e ds = \text{Min}$$

wo a und e (Anfangs- und Endpunkt) zwei Raumzeitpunkte sind, und ds das „Linienelement“ in der Raumzeitmannigfaltigkeit bedeutet, das ja in mehrdimensionalen Gebieten stets an die Stelle des Abstandes benachbarter Punkte in der gewöhnlichen Geometrie tritt [vgl. Satz 4, S. 172]. Es ist also bei Zugrundelegung unseres Lorentz-Systems (x, y, z, t)

$$ds = \sqrt{c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}, \qquad \text{[vgl. S. 166]}$$

und die Forderung (2) lautet dann also:

2 A) $$\int_a^e \sqrt{c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = \text{Min.}$$

Daß in dieser einen Formel tatsächlich die 4 Gleichungen (1) enthalten sind, soll weiter unten noch näher ausgeführt werden. — Doch nicht, daß wir jene 4 Gleichungen in eine zusammengefaßt haben, ist der Hauptvorteil, den wir durch diese Darstellung (2) unserer Weltlinie erreicht haben, dieser besteht vielmehr darin, daß diese Darstellung von jedem speziellen Koordinatensystem unabhängig ist. Wir sind daher bei unseren Betrachtungen jetzt nicht mehr an ein LORENTZ-System gebunden, wir können die Forderung (2) auch leicht in einem anderen beliebigen Raumzeitsystem (x_0, x_1, x_2, x_3) ausdrücken, indem wir einfach ds in diesen Koordinaten darstellen [vgl. (15) S. 188].

So erhalten wir denn zur Bestimmung immer noch derselben Bewegung wie vorhin, die aber jetzt vom neuen Systeme aus im allgemeinen nicht mehr als Trägheitsbewegung, sondern als Bewegung in einem Gravitationsfelde zu bezeichnen ist, die Forderung:

2 B) $$\int_a^e \sqrt{\sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}\,dx_\mu\,dx_\nu} = \text{Min.}$$

Durch diese Forderung ist also die Bewegung in dem durch die Potentiale $g_{\mu\nu}$ charakterisierten Gravitationsfelde bestimmt, wenn im übrigen keine Kräfte auf den Massenpunkt wirken. Doch dieses Gravitationsfeld ist in unserer früheren Ausdrucksweise nur ein durch den Bewegungszustand des Bezugssystems im LORENTZ-Gebiet „vorgetäuschtes". Da jedoch in wirklichen und in vorgetäuschten Feldern dem Aequivalenzprinzip zufolge die gleichen Gesetze herrschen sollen, so liegt es nahe, diese Forderung (2 B) zur Bestimmung der Bewegung in einem „vorgetäuschten" Felde einfach zu übertragen auch auf „wirkliche" Gravitationsfelder, und so geht tatsächlich EINSTEIN im wesentlichen vor. —

Wie an Stelle der Geraden in der Ebene auf krummen Flächen die geodätischen Linien treten [vgl. S. 177], so treten auch an die Stelle der Geraden in ebenen Mannigfaltigkeiten in gekrümmten die „geodätischen Linien", die allerdings hier noch einer genaueren Definition bedürfen: Die geodätischen Linien der Flächentheorie werden häufig auch als „kürzeste Linie" bezeichnet, obwohl sie durchaus nicht immer die kürzeste Verbindung zwischen irgend zweien ihrer Punkte darstellen, sondern nur zwischen hinreichend nahe beieinander gelegenen Punkten. Wir brauchen nur an die geodätischen Linien auf einer Kugel (größte Kreise) zu denken, die ein Minimum der Entfernung nur liefern, solange diese Entfernung kleiner als ein Halbkreis ist, während sie, sobald der Halbkreis überschritten wird, sogar ein Maximum der Entfernung darstellen. Dazwischen steht der Fall des zwei Gegenpole der Kugel verbindenden Halbkreises, in dessen Nachbarschaft es zwar keine kürzeren Verbindungslinien, wohl aber gleich lange (die anderen Halbkreise) gibt; es liegt also in diesem Falle ein „uneigentliches Minimum" vor. In allen Fällen ist demnach auf der Kugel bei einer geodätischen Linie die Bogenlänge „stationär", sie ändert sich nicht bei kleinen Variationen, und das — nicht das Minimum der Bogenlänge — ist allgemein das Charakteristische einer geodätischen Linie.

Man sagt dafür, die (erste) Variation des Integrales der Bogenlänge verschwände für eine geodätische Linie, und schreibt dafür:

$$3) \qquad \delta \int_a^e ds = 0,$$

und die in dieser Gleichung gegebene Definition „geodätischer Linien“ überträgt man von krummen Flächen auch auf mehr als zweifach ausgedehnte gekrümmte Mannigfaltigkeiten, indem man dann unter ds eben immer das „Linienelement“ der betreffenden Mannigfaltigkeit versteht.

Was das Verhältnis der beiden Forderungen (2) und (3) zu einander anlangt, so liegt hier bei den Integralen alles ganz entsprechend wie bei Funktionen einer Variablen, z. B. einer Funktion $f(x)$. Dem Verschwinden der ersten Variation eines Integrales, wie der Gleichung (3), entspricht dort das Verschwinden der ersten Ableitung, die Gleichung $f'(x) = 0$. Aus dem Bestehen dieser Gleichung für einen Wert von x folgt nun noch nicht, daß an dieser Stelle $f(x)$ ein Minimum besitzt, vielmehr kann auch noch ein Maximum vorliegen, oder auch weder ein Maximum noch ein Minimum, nämlich ein Wendepunkt mit horizontaler Tangente; die Gleichung $f'(x) = 0$ besagt eben auch nur, daß in der Nachbarschaft der betreffenden Stelle die Werte von $f(x)$ sich nicht ändern oder „stationär“ sind. — Also dieses „Stationärsein“ der Integralwerte ist das Charakteristische für eine geodätische Linie; da freilich der Fall des Minimums der wichtigste ist (und bei genügend kleinen Linienstücken sogar stets vorliegt), so spricht man auch im allgemeinen Falle meist von ihm.

Diese „geodätischen Linien“ in der gekrümmten Raumzeitmannigfaltigkeit läßt nun also Einstein an die Stelle der „Geraden“ treten, die in der ebenen Raumzeitmannigfaltigkeit der speziellen Relativitätstheorie die Weltlinie der Trägheitsbewegung bilden, und so kommt man zu folgender Formulierung von

Einsteins Fundamentalgesetz. — *Die Weltlinie eines in einem beliebigen Gravitationsfelde befindlichen Massenpunktes, auf den keine weiteren Kräfte wirken, ist eine geodätische Linie in der zugehörigen vierdimensionalen Raumzeitmannigfaltigkeit, d. h. eine Linie, deren „Länge“ zwischen Raumzeit-Anfangs- und -Endpunkt möglichst kurz (genauer „stationär“) ist, so daß für sie die Formel gilt:*

$$4) \qquad \delta \int_a^e ds = \delta \int_a^e \sqrt{\sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu} = 0.$$

Dieses Gesetz stellt eine Grundhypothese der Einsteinschen Theorie dar, eine „Hypothese“, denn durch unsere ihm vorausgeschickten Betrachtungen sollte lediglich begründet werden, wie Einstein wohl zu einer solchen Annahme geführt werden konnte, sie dürfen nicht über den hypothetischen Charakter des Gesetzes hinwegtäuschen: dieses ist genau ebenso hypothetisch wie das Galileische Trägheitsgesetz, aus dem es Einstein durch Analogieschlüsse ableitete*). —

*) Hingewiesen sei auch noch kurz auf die nahe Verwandtschaft des Gesetzes mit dem „Prinzip der geradesten Bahn“, das Heinrich Hertz seiner Mehanik zugrunde legte.

Bevor wir nun daran gehen, aus diesem Variationsprinzipe (4) die Gleichungen der geodätischen Linie herzuleiten, sei noch bemerkt, daß das obige Einsteinsche Fundamentalgesetz sich tatsächlich der Grundforderung der allgemeinen Relativitätstheorie beugt, sich nämlich beim Uebergang zu neuen Koordinatensystemen kovariant zu der Fundamentalform verhält, d. h. sich nur insoweit ändert, als es diese Fundamentalform tut. Denn das Gesetz (4) enthält ja nur diese quadratische Form, und wenn wir neue Koordinaten $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ einführen, brauchen wir daher nur diese Form umzurechnen; in dem neuen Systeme hängen dann die Bahnen von den Koeffizienten $\bar{g}_{ik}$ der umgerechneten Form genau so ab wie in dem alten von den Koeffizienten g_{ik} der ursprünglichen Form*) — und darin besteht ja das Wesen der Kovarianz [vgl. S. 155].

Um nun aus der Forderung (4) des Fundamentalgesetzes die Weltlinie eines Massenpunktes zu bestimmen, müssen wir noch an einen Satz der Variationsrechnung erinnern: Werden mehrere Größen, z. B. $x_1, x_2 \ldots x_n$ als Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen — sie heiße σ — gesucht, so daß die erste Variation des Integrales eines von den unbekannten Funktionen und ihren ersten Ableitungen abhängigen Ausdruckes verschwindet, also aus der Forderung:

$$\delta \int_a^e f(x_1, x_2 \ldots x_n, x_1', x_2' \ldots x_n')\, d\sigma = 0$$

(die Akzente bedeuten die Ableitungen nach σ), so müssen diese Funktionen $x_1, x_2 \ldots x_n$ den „Eulerschen Gleichungen“

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i'}\right) - \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

genügen. Es sind das n simultane Differentialgleichungen für die n unbekannten Funktionen $x_1, x_2, \ldots x_n$. — Erinnert sei daran, daß, wenn f speziell das kinetische Potential $T - U$ eines Systems materieller Punkte ist, dargestellt gedacht durch r unabhängige Parameter $q_1, q_2, \ldots q_r$ und ihre zeitlichen Differentialquotienten $q_1', q_2', \ldots q_r'$, daß dann die zu der Forderung des „Hamiltonschen Prinzips“

$$\delta \int_{t_a}^{t_e} (T - U)\, dt = 0$$

gehörigen „Eulerschen Gleichungen“ die bekannten „Lagrangeschen Differentialgleichungen zweiter Art“ sind:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-U)}{\partial q_i'}\right) - \frac{\partial (T-U)}{\partial q_i} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots r)$$

r Gleichungen zur Bestimmung von $q_1, q_2 \ldots q_r$ als Funktionen der Zeit t. —

Nach dieser allgemeinen Regel der Variationsrechnung wollen wir nun also die Weltlinie eines Massenpunktes nach dem Einsteinschen Fundamentalgesetz bestimmen, und zwar wollen wir zunächst ein

*) Daß die geodätischen Linien auf einer Fläche nur von den Fundamentalgrößen erster Ordnung, also den Koeffizienten der metrischen Fundamentalform, abhängen, wurde schon in der Anmerkung S. 177 erwähnt.

Lorentz-Gebiet ins Auge fassen und in ihm ein Lorentz-System (x, y, z, t) eingeführt denken, so daß also die Forderung (4) jetzt genauer lautet:

$$\delta \int_a^e \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = 0.$$

Zu ihrer weiteren Behandlung wird es sich empfehlen, die Raumzeitkoordinaten x, y, z, t als Funktionen eines Parameters anzusehen, den wir wieder mit σ bezeichnen. Deuten wir dann auch wieder Differentialquotienten nach σ durch Akzente an, so nimmt jetzt jene Forderung weiter die Gestalt an:

$$5) \qquad \delta \int_a^e \sqrt{c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2}\, d\sigma = 0,$$

und die erste der zugehörigen Eulerschen Gleichungen lautet dann:

$$6_1) \qquad \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{x'}{\sqrt{c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2}}\right) = 0,$$

und daraus folgt durch Integration:

$$7_1) \qquad \frac{x'}{\sqrt{c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2}} = \text{const},$$

und ganz analoge Gleichungen ergeben sich entsprechend den 3 weiteren unbekannten Funktionen y, z, t.

Diese so erhaltenen 4 Gleichungen (7) lehren, daß x', y', z', t' in einem konstanten Verhältnis zueinander stehen, und daraus folgt weiter, daß sich x, y, z und t als lineare Funktionen derselben Funktion von σ darstellen lassen; es ergibt sich also in Uebereinstimmung mit unseren früheren Betrachtungen als Weltlinie eine lineare Punktfolge, eine „Gerade“ in der vierdimensionalen Minkowskischen Welt.

Die Natur des Parameters σ ist hierbei noch gänzlich unbestimmt geblieben. Durch passende Verfügung über ihn können wir die Rechnung noch einfacher gestalten; setzen wir nämlich

$$c \cdot \sigma = \int_a \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2},$$

das (unbestimmte) Integral längs der Weltlinie hinerstreckt gedacht, also σ gleich der „Eigenzeit τ“ [vgl. (13) S. 107], so wird $c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = c^2$ und die Gleichung (6_1) nimmt sogleich die weit einfachere Form $\frac{d}{d\tau}(x') = 0$ an, so daß wir für die 4 Gleichungen (6) auch schreiben können:

$$6') \qquad \frac{d^2x}{d\tau^2} = 0, \qquad \frac{d^2y}{d\tau^2} = 0, \qquad \frac{d^2z}{d\tau^2} = 0, \qquad \frac{d^2t}{d\tau^2} = 0,$$

woraus sich unmittelbar durch zweimalige Integration die Gleichungen der Weltlinie in der früheren Form (1) ergeben. — Wieder bestätigt sich also, daß unser früheres Resultat über die Trägheitsbewegung in Lorentz-Gebieten in dem Fundamentalgesetz als Spezialfall enthalten ist. —

Nunmehr wollen wir nach denselben Prinzipien auch die Bewegung eines Massenpunktes (beim Fehlen sonstiger Kräfte) in wirklichen Gravitationsfeldern aus dem Fundamentalgesetz zu bestimmen suchen. Da müssen wir dann an die allgemeine Form (4) des EINSTEINschen Variationsprinzipes anknüpfen, bei der die Gravitationspotentiale g_{ik} nicht die speziellen konstanten Werte wie in LORENTZ-Gebieten besitzen. — Freilich können wir natürlich, solange wir diese Funktionen g_{ik} nicht kennen, die Gleichungen der Weltlinie nicht vollständig ermitteln, nicht in endlicher Form darstellen. Wir müssen uns damit begnügen, Differentialgleichungen für die geodätischen Linien aufzustellen.

Wir führen wieder einen Parameter σ ein und suchen dann die 4 Raumzeitkoordinaten x_0, x_1, x_2, x_3 als Funktionen von ihm so zu ermitteln, daß der Forderung (4) bzw.

$$4') \qquad \delta \int_a^e \sqrt{\sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}\, x'_\mu x'_\nu}\, d\sigma = 0$$

Genüge geschieht. Da erhalten wir dann als zugehörige EULERsche Gleichungen sofort:

$$8) \qquad \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\sum_\mu g_{\mu i}\, x'_\mu}{\sqrt{\sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}\, x'_\mu x'_\nu}}\right) - \frac{1}{2}\,\frac{\sum_{\mu,\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_i}\, x'_\mu x}{\sqrt{\sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}\, x'_\mu x'_\nu}} = 0, \qquad (i = 0, 1, 2, 3).$$

Denn es ist eben zu beachten, daß jetzt die Koeffizienten g_{ik} Funktionen der x sind.

In diesen Gleichungen (8) haben wir nun bereits die 4 Differentialgleichungen zur Bestimmung von x_0, x_1, x_2, x_3 als Funktionen von σ vor uns und wir wären berechtigt, bereits sie als die „Differentialgleichungen der geodätischen Linie" zu bezeichnen. Doch wollen wir sie noch vereinfachen und umformen: Da werden wir zunächst wieder den Parameter σ spezialisieren, σ gleich dem längs der Weltlinie hinerstreckten (unbestimmten) Integrale des Linienelementes ds setzen:

$$9) \qquad \sigma = \int_a ds = \int_a \sqrt{\sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu} = s;$$

dann wird

$$9a) \qquad \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}\, x'_\mu\, x'_\nu = 1,$$

und die Gleichungen (8) nehmen daher zunächst die folgende einfachere Gestalt an

$$8') \qquad \frac{d}{ds}\left(\sum_\mu g_{\mu i}\, x'_\mu\right) - \frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_i}\, x'_\mu\, x'_\nu = 0 \qquad (i = 0, 1, 2\,3).$$

Hier führen wir nun die totale Differentiation nach s aus unter Berücksichtigung des Umstandes, daß s in jene Summe erstlich über die x', dann aber auch durch die g über die x selber eingeht. So folgt denn für das erste Glied links die Darstellung

$$\sum_\mu g_{\mu i}\, x''_\mu + \sum_\mu \left(\sum_\nu \frac{\partial g_{\mu i}}{\partial x_\nu}\, x'_\nu\right) x'_\mu = \sum_\mu g_{\mu i}\, x''_\mu + \sum_{\mu,\nu} \frac{\partial g_{\mu i}}{\partial x_\nu}\, x'_\nu\, x'_\mu \,.$$

In dieser letzteren Doppelsumme (im Gegensatz zu der in (8′) auftretenden) spielen nun zunächst die beiden Indizes μ und ν eine verschiedene Rolle, aber nur scheinbar, denn wir können die Summe in zwei Hälften teilen und dann in der einen die Summationsindizes μ und ν miteinander vertauschen und so die Symmetrie herstellen. So nimmt denn schließlich (8′) die folgende Gestalt an:

$$10)\quad \sum_{\mu} g_{\mu i}\, x''_{\mu} + \frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu}\left(\frac{\partial g_{\mu i}}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu i}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{i}}\right) x'_{\mu}\, x'_{\nu} = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, 3).$$

Zur weiteren Vereinfachung führen wir nun noch die „Christoffelschen Dreizeigersymbole erster Art“ ein, indem wir

$$11)\quad \begin{bmatrix} \mu\,\nu \\ i \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\nu i}}{\partial x_{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu i}}{\partial x_{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{i}}\right)$$

setzen (sprich: μ, ν über i), eine Symbolik, die natürlich nur verständlich ist, wenn wir von vornherein eine bestimmte Matrix, wie hier die Matrix der Größen g_{ik}, zugrunde legen. — Diese Symbole (11) sind in μ und ν symmetrisch, während i eine andere Rolle spielt, wie das ja auch in der Schreibweise zum Ausdruck kommt*).

Unter Benutzung dieser Symbolik können wir dann unsere Differentialgleichungen (10) auch so schreiben:

$$10')\quad \sum_{\mu} g_{\mu i}\, x''_{\mu} + \sum_{\mu,\nu}\begin{bmatrix} \mu\,\nu \\ i \end{bmatrix} x'_{\mu}\, x'_{\nu} = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, 3).$$

Diese Gleichungen pflegt man nun noch nach den zweiten Differentialquotienten x'' aufzulösen. — Wir führen noch die zu den g_{ik} „reziproken“ Koeffizienten g^{ik} ein**), d. h. die Koeffizienten, welche auf treten, wenn man ein lineares Gleichungssystem mit den Koeffizienten g_{ik} auflöst, z. B. aus

$$12)\quad \sum_{\sigma} g_{i\sigma}\, u_{\sigma} = v_i \qquad \text{die Auflösungen} \qquad u_k = \sum_{\varrho} g^{k\varrho}\, v_{\varrho}$$

berechnet. Diese reziproken Koeffizienten g^{ik} sind dann bekanntlich, mittels Determinanten ausgedrückt, die Quotienten aus den Unterdeterminanten von g_{ik} in der Determinante

$$13)\quad |g| = \begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}$$

und dieser Determinante $|g|$ selber***):

*) Das Bildungsgesetz dieser Symbole prägt sich dem Gedächtnis leicht ein, wenn man beachtet, daß die Indizes in der Klammer der Reihe nach die 3 Differentiationsvariablen kennzeichnen, die beiden oberen die der positiv, der untere die des negativ zu nehmenden Differentialquotienten. Die beiden anderen Indizes sind in jedem Gliede die der differenzierten Funktion g.

**) Die Zweckmäßigkeit dieser Bezeichnung wird sich aus den Betrachtungen des folgenden Paragraphen ergeben.

***) Diese Determinante ist immer von 0 verschieden anzunehmen: Denn ihr Verschwinden würde nach bekannten algebraischen Prinzipien besagen, daß die Fundamentalform ausartet, d. h. daß in Wahrheit keine vierdimensionale Raumzeitmannigfaltigkeit vorliegt.

12′) $$g^{ik} = \frac{\text{Unterdeterminante von } g_{ik}}{\text{Determinante } |g|}.$$

Dann ist nach bekannten Determinantensätzen

12″) $$\sum_{\mu} g_{\mu k} g^{\mu i} = \begin{cases} 0 \text{ falls } i \neq k \\ 1 \quad „ \quad i = k. \end{cases} —$$

Unter Benutzung dieser neuen Koeffizienten g^{ik} gestaltet sich dann die Auflösung der Gleichungen (10′) nach dem x'' äußerst einfach:

14) $$x''_k + \sum_{\varrho} g^{k\varrho} \left(\sum_{\mu\nu} \begin{bmatrix} \mu\ \nu \\ \varrho \end{bmatrix} x'_\mu\, x'_\nu \right) = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, 3).$$

Hier führen wir nun zur weiteren Vereinfachung noch die „Christoffelschen Dreizeigersymbole zweiter Art“ ein:

15) $$\begin{Bmatrix} \mu\ \nu \\ k \end{Bmatrix} = \sum_{\varrho} g^{k\varrho} \begin{bmatrix} \mu\ \nu \\ \varrho \end{bmatrix}, \qquad (\mu, \nu, k = 0, 1, 2, 3),$$

deren Zusammenhang mit den zunächst eingeführten eckigen Klammersymbolen man auch folgendermaßen darstellen kann:

15′) $$\begin{bmatrix} \mu\ \nu \\ i \end{bmatrix} = \sum_{\sigma} g_{i\sigma} \begin{Bmatrix} \mu\ \nu \\ \sigma \end{Bmatrix}$$

wie durch Spezialisierung von (12) folgt, aber auch unmittelbar aus (15) unter Benutzung von (12″) geschlossen werden kann.

Diese Symbolik (15) gestattet dann also die Differentialgleichungen (14) schließlich in der Form zu schreiben:

$$x''_k + \sum_{\mu,\nu} \begin{Bmatrix} \mu\ \nu \\ k \end{Bmatrix} x'_\mu\, x'_\nu = 0, \qquad (k = 0, 1, 2, 3)$$

und dies ist die übliche Form der „Differentialgleichungen der geodätischen Linie“, der Gleichungen zur Bestimmung der x als Funktionen des in (9) eingeführten Parameters s.

Resultat. — *Die Differentialgleichungen der geodätischen Linie in einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit mit dem Quadrate des Linienelementes*

$$ds^2 = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu,$$

oder, was nach dem Einsteinschen Fundamentalsatz dasselbe ist, der Weltlinie eines sich selbst überlassenen Massenpunktes in einem Schwerefelde mit den Gravitationspotentialen g_{ik}, lauten:

16) $$\frac{d^2 x_k}{ds^2} + \sum_{\mu,\nu} \begin{Bmatrix} \mu\ \nu \\ k \end{Bmatrix} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, 3).$$

Hier bedeuten die $\begin{Bmatrix} \mu\ \nu \\ k \end{Bmatrix}$ die Christoffelschen Dreizeigersymbole zweiter Art, die definiert sind entweder als die Auflösungen der Gleichungen

$$\sum_{\sigma} g_{i\sigma} \begin{Bmatrix} \mu\ \nu \\ \sigma \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu\ \nu \\ i \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\nu i}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial g_{\mu i}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_i} \right)$$

[vgl. (15′) und (11)], oder aber explizit durch:

$$\left\{ \begin{matrix} \mu\,\nu \\ k \end{matrix} \right\} = \sum_{\varrho} g^{k\varrho} \left[\begin{matrix} \mu\,\nu \\ \varrho \end{matrix} \right] \qquad [vgl.\ (15)]$$

wo die g^{ik} die zu den g_{ik} reziproken Koeffizienten darstellen [vgl. (12) und (12′)]. — Ferner bedeutet der Parameter s die „Länge“ der geodätischen Linie [vgl. (9)].

Wenden wir dieses Resultat nun wieder auf Lorentz-Gebiete an unter Verwendung speziell von Lorentz-Systemen (x, y, z, t), so daß also t, x, y, z und τ (eigentlich $c \cdot \tau$) an die Stelle von x_0, x_1, x_2, x_3 und s treten, so sind sämtliche Gravitationspotentiale g_{ik} als konstant anzusehen, und die sämtlichen Christoffelschen Klammersymbole, sowohl die eckigen wie die geschweiften, verschwinden dann, und die Gleichungen lauten daher:

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} = 0, \qquad \frac{d^2x}{d\tau^2} = 0, \qquad \frac{d^2y}{d\tau^2} = 0, \qquad \frac{d^2z}{d\tau^2} = 0,$$

so daß wir tatsächlich zu unserem alten Resultate zurückkommen [vgl. (6′)].

In allgemeineren Fällen kennen wir die Gravitationspotentiale g_{ik} noch nicht und sind daher auch nicht in der Lage, die entsprechenden Lösungen der Gleichungen (16) anzugeben. Erst in dem Schlußparagraphen, wenn wir die g_{ik} in einem weiteren Spezialfalle bestimmt haben, werden wir aus diesen Gleichungen heraus eine neue Bewegung wirklich bestimmen, d. h. in endlicher Form darstellen lehren. —

Hier wollen wir zunächst nur zeigen, daß unser Resultat (16) bekannte Formeln der klassischen Mechanik als Grenzfall in sich enthält, also wirklich eine naturgemäße Verallgemeinerung der älteren Theorie darstellt: Wir nehmen zunächst an, daß es sich um ein verhältnismäßig schwaches Gravitationsfeld handelt, dessen Gravitationspotentiale g_{ik} sich bei passender Wahl des Bezugssystems (x_0, x_1, x_2, x_3) von denen eines Lorentz-Gebietes nur wenig unterscheiden. Wir deuten das, indem wir noch x_0 mit $c \cdot t$ vergleichen, so an, daß wir sagen, es sei

17) $\quad g_{00} \sim +1, \quad g_{ii} \sim -1$ *für* $i = 1, 2, 3,$ *und* $\quad g_{ik} \sim 0$ *für* $i \neq k.$

Dann gilt, wie man aus (12′) unter Berücksichtigung von $|g| \sim -1$ leicht erschließt, für die reziproken Koeffizienten g^{ik} völlig entsprechend:

17′) $\quad g^{00} \sim +1, \quad g^{ii} \sim -1$ *für* $i = 1, 2, 3,$ *und* $\quad g^{ik} \sim 0$ *für* $i \neq k.$

Sodann nehmen wir weiter an, daß es sich um eine Bewegung handelt, deren Geschwindigkeiten $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ klein sind gegenüber der Lichtgeschwindigkeit c. Dann wird

$$ds^2 \sim dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \sim c^2 dt^2 = dx_0^2,$$

und daher:

$$\frac{dx_0}{ds} \sim 1, \qquad \text{aber} \qquad \frac{dx_i}{ds} \sim \frac{1}{c} \frac{dx_i}{dt} \sim 0 \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3.$$

In unseren Gleichungen (16) bleibt daher im Grenzfalle von den Gliedern der Summe nur das eine für $\mu = \nu = 0$ übrig, so daß aus den Gleichungen folgt:

$$\frac{d^2x_k}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} 0\,0 \\ k \end{matrix} \right\} \sim 0 \qquad \text{oder} \qquad \frac{d^2x_k}{ds^2} + \sum_{\varrho} g^{k\varrho} \left[\begin{matrix} 0\,0 \\ \varrho \end{matrix} \right] \sim 0 \quad [\text{vgl. (15)}].$$

Auch von diesen neuen Summen bleibt nun wegen (17′) nur immer je ein Glied übrig, nämlich das für $\varrho = k$, und wir erhalten daher:

18) $$\frac{d^2x_0}{ds^2} + \begin{bmatrix} 0\,0 \\ 0 \end{bmatrix} \sim 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{d^2x_k}{ds^2} - \begin{bmatrix} 0\,0 \\ k \end{bmatrix} \sim 0 \text{ für } k = 1, 2, 3.$$

Nun ist aber nach der Definition der Christoffelschen Symbole:

$$\begin{bmatrix} 0\,0 \\ i \end{bmatrix} = \frac{\partial g_{0i}}{\partial x_0} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x_i} \qquad (i = 0, 1, 2, 3) \qquad \text{[vgl. (11)]}.$$

Da aber allgemein $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_0} = \frac{1}{c}\frac{\partial g_{ik}}{\partial t} \sim 0$ ist, so nehmen schließlich die Differentialgleichungen der Bewegung die Gestalt an:

19) $$\frac{d^2x_k}{ds^2} \sim \frac{1}{c^2}\frac{d^2x_k}{dt^2} \sim -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x_k} \qquad (k = 1, 2, 3)^*).$$

Diese Gleichungen haben nun tatsächlich genau die Form der Differentialgleichungen der älteren Mechanik für die Bewegung in einem Gravitationsfelde:

$$\frac{d^2x_k}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial x_k} \qquad (k = 1, 2, 3),$$

wo U „das" Gravitationspotential jener Theorie bedeutet. — An seine Stelle tritt hier unter den obigen Annahmen $\frac{c^2}{2} g_{00} + \text{const}$, also z. B.

20) $$U \sim \frac{c^2}{2}(g_{00} - 1),$$

was wegen der Kleinheit von $g_{00} - 1$ durchaus einen endlichen Wert haben kann. —

Zum Schlusse sei hier noch auf eine andere Verwandtschaft zwischen dem Einsteinschen Fundamentalgesetz und der älteren Mechanik hingewiesen: Das Einsteinsche Prinzip stellt eine Forderung zur Bestimmung einer Kurve (Weltlinie) im vierdimensionalen Gebiete dar. Nun hat Jacobi in seiner Form des Prinzips der kleinsten Wirkung ein Variationsprinzip aufgestellt, um die Bahn eines Massenpunktes (also wieder eine Kurve) im dreidimensionalen Raume zu bestimmen, ganz unabhängig von dem zeitlichen Ablauf der Bewegung.

Zwischen beiden Prinzipen besteht nun eine noch weitergehende Uebereinstimmung, wie hier in aller Kürze ausgeführt sei.

Um zum Jacobischen Prinzip zu gelangen, können wir ausgehen von dem schon oben erwähnten Hamiltonschen Prinzipe:

(H) $$\delta \int_{t_a}^{t_e} (T - U)\, dt = 0,$$

nach welchem die Aenderung des Zeitintegrales des kinetischen Potentials für alle virtuell variierten Bewegungen verschwinden muß. — Wir nehmen nun an, daß die betrachtete Bewegung dem Energieprinzipe

(E) $$T + U = \text{const} = h$$

*) Der Fall $k = 0$ liefert nichts Bemerkenswertes.

gehorche und wollen dann speziell auch nur Vergleichsbewegungen betrachten, welche ebenfalls diesem Gesetze folgen und zwar mit demselben Energiewerte h*). Dann können wir für (H) auch schreiben:

$$\delta \int_{t_a}^{t_e} (h - 2U)\, dt = 0,$$

und hier könnten wir die Konstante h auch weglassen, weil Anfangs- und Endzeit t_a und t_e nicht variiert werden, und das Glied mit h daher keinen Beitrag zur Variation des Integrales liefert. Aus demselben Grunde darf man aber auch an Stelle von h schreiben: $2h$ und also nach Unterdrückung des Faktors 2:

$$\delta \int_{t_a}^{t_e} (h - \mathrm{U})\, dt = 0.$$

Nun kann man weiter die Zeit t mittels des Energieintegrales (E) eliminieren. Es ist

$$T \equiv \frac{m}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = h - U \qquad \text{oder} \qquad dt = \sqrt{\frac{m}{2}}\,\frac{ds}{\sqrt{h-U}},$$

und so nimmt denn schließlich unser Variationsprinzip die Gestalt an

$$\delta \int_a^e \sqrt{h-U}\, ds = 0 \qquad \text{oder} \qquad \delta \int_a^e \sqrt{(h-U)\,(dx^2+dy^2+dz^2)} = 0.$$

Das ist die Jacobische Form des Prinzips der kleinsten Wirkung (für den Spezialfall der Bewegung eines einzelnen Massenpunktes). — Seine Analogie mit der obigen Formulierung des Einsteinschen Prinzips tritt deutlich zutage, und, worauf noch besonders hingewiesen sei: falls es sich um die Bewegung unter dem Einfluß von Gravitationskräften handelt, stellt der Koeffizient der unter der Wurzel stehenden quadratischen Differentialform gerade wieder das „Gravitationspotential“ dar.

§ 6.

Grundzüge der Tensorrechnung.

Bei Aufstellung der zu den Gravitationsfeldern kovarianten Naturgesetze, also der Hauptaufgabe der allgemeinen Relativitätstheorie, spielen die sogenannten „Tensoren“ eine große Rolle, Verallgemeinerungen der „Vektoren“, die wir schon früher (S. 15) kennen lernten. — Wie wir das Wesen der Vektoren in dem Gesetze erblickten, nach dem sie sich beim Uebergange zu anderen Bezugssystemen „transformierten“, d. h. in dem Gesetze, nach dem aus ihnen die Größen entstehen, die in dem neuen Systeme ihre Rollen übernehmen, so auch bei den Tensoren. Doch handelt es sich bei ihnen nicht nur um

*) Es ist das nur eine andere Formulierung der Tatsache, daß für die „Uebergangsbewegung“ das Energieintegral gilt [vgl. z. B. Cl. Schaefer, Die Prinzipe der Dynamik, Berlin und Leipzig 1919, S. 44].

Uebergänge zwischen rechtwinkligen Koordinatensystemen, sondern zwischen ganz allgemeinen Bezugssystemen in mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten. Ein und demselben solchen Uebergange (einer Koordinatentransformation) können noch sehr verschiedene Arten entsprechen, Größensysteme zu transformieren, wie wir früher zu jeder LORENTZ-Transformation ein Gesetz kennen lernten, nach dem sich „Viervektoren" [vgl. S. 123], und ein anderes, nach dem sich „Sechservektoren" [vgl. S. 125] transformierten. So werden wir denn auch *je nach den verschiedenen Transformationsgesetzen verschiedene Arten von Tensoren* unterscheiden. Freilich haben alle betrachteten Gesetze das Eine gemeinsam, daß sie *lineare homogene Transformationen* darstellen, so daß das Verschwinden von Tensoren in einem Bezugssystem sofort auch das der transformierten in allen anderen Systemen zur Folge hat. Darauf beruht eben die Wichtigkeit solcher „Tensorgleichungen" [vgl. (1′) S. 17] für die Formulierung invarianter und kovarianter Naturgesetze. — So sagen wir denn:

Allgemeine Definition von Tensoren. — *Ein Tensor ist der Inbegriff eines Systems von Größen*) (seiner „Komponenten"), die beim Uebergang zu neuen Bezugssystemen sich nach bestimmten (noch näher zu erörternden) Gesetzen, stets aber linear und homogen, transformieren.*

Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß „Transformieren" etwas wesentlich anderes ist als bloßes „Umrechnen", wie ich auch schon früher zwischen diesen beiden Ausdrücken unterschieden habe [vgl. S. 156]. — Wir wollen uns das am Beispiele des „Kraftvektors" X, Y, Z der klassischen Mechanik klar machen: Gehen wir von einem rechtwinkligen System (x, y, z) zu einem anderen (gegen dieses nur gedrehten) System $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ über mittels der Gleichungen

1) $$\bar{x} = \alpha_{11} x + \alpha_{12} y + \alpha_{13} z \qquad \text{und zwei entsprechenden,}$$

dann besagt der Vektorcharakter der Kraft, daß sich die Komponenten X, Y, Z (homogen) wie die Koordinaten „transformieren" [vgl. S. 15], daß also auch z. B.

1 a) $$\overline{X} = \alpha_{11} X + \alpha_{12} Y + \alpha_{13} Z,$$

ist, und nicht etwa $\overline{X}$ durch bloßes „Umrechnen" aus X gewonnen wird, d. h. dadurch, daß wir X anstatt von x, y, z jetzt von $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ abhängig darstellen, es also gleich $X(\alpha_{11}\bar{x} + \alpha_{21}\bar{y} + \alpha_{31}\bar{z}_1, \alpha_{12}\bar{x} + .., \alpha_{13}\bar{x} + \ldots)$ setzen. — Andere Beispiele von „Transformations"-Gesetzen, die wir schon kennen gelernt haben, bilden die soeben erwähnten von Vierer- und Sechser-Vektoren im vierdimensionalen Raume, und wieder ein anderes das der Fundamentalgrößen erster Ordnung der Flächentheorie [vgl. (11′) S. 156]. Setzten wir $u = \lambda(u', v')$ und $v = \mu(u', v')$, und gingen damit also zu einem neuen GAUSSschen Koordinatensysteme über, so war z. B.

$$E'(u', v') = E(\lambda, \mu)\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u'}\right)^2 + 2F(\lambda, \mu)\frac{\partial\lambda}{\partial u'}\frac{\partial\mu}{\partial u'} + G(\lambda, \mu)\left(\frac{\partial\mu}{\partial u'}\right)^2,$$

und nicht etwa gleich der durch bloße „Umrechnung" aus E entstandenen Größe $E(\lambda(u', v'), \mu(u', v'))$. — Beim „Umrechnen" bleibt eine Größe *numerisch ungeändert*, wird sie doch nur als Funktion anderer Koordinaten aufgefaßt, „transformierte" Größen dagegen ändern in der

*) Im allgemeinen sind die Tensoren variabel, Funktionen der Koordinaten.

Regel ihren Wert, die x-Komponente einer Kraft in einem System wird meist verschieden sein von der in einem anderen Systeme. —

Nach diesen allgemeinen Vorbemerkungen wollen wir nun, um möglichst allgemein zu sein, immer eine n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit annehmen*), deren einzelne Individuen („Punkte") also durch Angabe von n-Koordinaten $x_1, x_2 \ldots x_n$ bestimmt sind, und nun wollen wir in diese Mannigfaltigkeit, wie wir uns auch schon früher ausdrückten, andere Koordinatensysteme legen, dieselben Punkte immer durch n neue Koordinaten $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots \bar{x}_n$ bestimmen. Zwischen den Koordinaten beider Systeme mögen die Beziehungsgleichungen

2) $\bar{x}_1 = \bar{x}_1(x_1, x_2 \ldots x_n), \quad \bar{x}_2 = \bar{x}_2(x_1, x_2 \ldots x_n), \ldots \bar{x}_n = \bar{x}_n(x_1, x_2 \ldots x_n)$

bestehen. Dann bestehen zwischen ihren Inkrementen lineare homogene Gleichungen:

$$2') \qquad d\bar{x}_i = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_n} dx_n = \sum_k \alpha_k^i dx_k,$$

und an diese Feststellung knüpfen wir die folgende Definition der einfachsten Art von Tensoren:

Definition des kontravarianten Vektors. — *Den Inbegriff von n Größen ξ^i, die sich beim Uebergang zu einem neuen Bezugssystem ebenso transformieren wie die Inkremente der Variablen, derart, daß also*

$$3) \qquad \bar{\xi}^i = \sum_k \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_k} \xi^k = \sum_k \alpha_k^i \xi^k \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

ist, nennt man einen „kontravarianten Tensor erster Stufe" oder kürzer „kontravarianten Vektor" und deutet die Kontravarianz durch Verwendung oberer Indizes an.

Es ist das augenscheinlich eine naturgemäße Verallgemeinerung unseres früheren Vektorbegriffes, dort forderten wir Transformation wie Koordinaten-Differenzen [vgl. S. 15], hier wie Differentiale. Diese Einschränkung auf unendlich kleine Differenzen ist hier eben dadurch bedingt, daß jetzt bei krummlinigen Koordinaten die Koeffizienten $\alpha_k^i = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_k}$ nicht mehr Konstanten sind, wie früher bei Cartesischen Koordinaten. —

Um sodann zu anderen Arten von Tensoren, also zu anderen Transformationsgesetzen, zu gelangen, erinnern wir wieder an das Beispiel des Kraftvektors X, Y, Z der klassischen Mechanik. — Bekanntlich ist

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = \delta A,$$

gleich der von der Kraft $K(X, Y, Z)$ bei der Verschiebung $\delta s\ (\delta x, \delta y, \delta z)$ geleisteten Arbeit; wenn also auch die Größen $X, Y, Z, \delta x, \delta y, \delta z$ einzeln sich beim Uebergang zu anderen Systemen ändern (sie „transformieren" sich ja), so besitzt doch diese Produktsumme einen vom Bezugssystem, das wir zugrunde legen, unabhängigen Wert, den man zwar auch in verschiedenen Koordinatensystemen darstellen, aber dadurch numerisch nicht ändern, also nur „umrechnen" kann. Daher sagt man, die Produktsumme

$$4) \qquad X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = \bar{X}\delta\bar{x} + \bar{Y}\delta\bar{y} + \bar{Z}\delta\bar{z}$$

*) In diesem Paragraphen durchlaufen also die Indizes, auch bei den Summen stets die Reihe der Zahlen $1, 2 \ldots n$, wie hier ein für alle Male angemerkt sei.

sei eine „skalare Größe“ oder kürzer ein „Skalar“ *). — Wir schreiben dafür:

$$4') \qquad X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = \text{Sk}.$$

Ich behaupte, daß in dieser für beliebige Verrückungen gültigen Gleichung das Transformationsgesetz der Größen X, Y, Z vollständig enthalten ist, daß man diese oder die ihr gleichwertige Gleichung (4) geradezu benutzen kann, dieses Gesetz festzulegen: Das Transformationsgesetz von $\delta x, \delta y, \delta z$ (kontravarianter Vektor) ist nach (1) und (3) bekannt; also nimmt (4) die Gestalt an:

$$\overline{X}\cdot(a_{11}\,\delta x + a_{12}\,\delta y + a_{13}\,\delta z) + \overline{Y}\cdot(a_{21}\,\delta x + a_{22}\,\delta y + a_{23}\,\delta z) + \overline{Z}\cdot(a_{31}\,\delta x + a_{32}\,\delta y + a_{33}\,\delta z) = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z,$$

und daraus folgt wegen der Willkürlichkeit von $\delta x, \delta y, \delta z$:

$$a_{11}\,\overline{X} + a_{21}\,\overline{Y} + a_{31}\,\overline{Z} = X \quad \text{und 2 entsprechende Gleichungen,}$$

woraus sich durch Auflösung ergibt:

$$5) \qquad \overline{X} = \breve{a}_{11}\,X + \breve{a}_{12}\,Y + \breve{a}_{13}\,Z, \qquad \overline{Y} \text{ und } \overline{Z} \text{ entsprechend,}$$

wenn die $\breve{a}_{ik}$ die zu den a_{ik} reziproken Koeffizienten sind:

$$5') \qquad \breve{a}_{ik} = \frac{\text{Unterdeterminante von } a_{ik}}{\text{Determinante } |a|} \qquad \text{[vgl. (12') S. 198].}$$

Da nun in dem speziellen Falle rechtwinkliger Koordinaten, an den wir denken, die Determinante $|a| = 1$ ist und die Unterdeterminanten gleich den entsprechenden Elementen selber, so folgt hier (ich möchte sagen: zufällig), daß $\breve{a}_{ik} = a_{ik}$ ist, und dann stellt (5) tatsächlich das oben besprochene Transformationsgesetz (1a) für die Kraftkomponenten dar.

In dem allgemeinen Falle beliebiger Koordinaten in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten kann man nun wieder n Größen u_i der Bedingung unterwerfen, daß ihre Produktsumme mit den Komponenten eines beliebigen kontravarianten Vektors ξ^i skalar sei,

$$\sum_i u_i \xi^i = \text{Sk}.$$

Dann kann man aus dieser Forderung genau nach den obigen Prinzipien ein Transformationsgesetz für die u_i herleiten, doch wird das jetzt im allgemeinen ein neues Gesetz sein:

Definition des kovarianten Vektors. — *Transformieren sich n Größen u_i so, daß die Produktsumme*

$$6) \qquad \sum_i u_i \xi^i = \text{Sk} \qquad \left(= \sum_i \bar{u}_i \bar{\xi}^i\right)$$

ist, wenn ξ^i die Komponenten eines beliebigen kontravarianten Vektors bedeuten, so nennt man den Inbegriff der u_i einen „kovarianten Tensor

*) In der Literatur wird dafür häufig auch „Invariante“ gesagt; doch möchte ich das vermeiden, da hier invariant in ganz anderem Sinne gebraucht wird wie früher, wenn wir z. B „Invarianz der Naturgesetze“ forderten. Dieser Ausdruck bedeutete, daß die Naturgesetze von den Koordinaten verschiedener Systeme „formal gleich“ abhängen sollten, während eine skalare Größe im allgemeinen von verschiedenen Koordinaten formal sehr verschieden abhängen wird, nur stets „numerisch gleich“ bleibt. — Man könnte etwa „Form-Invarianz“ und „Wert-Invarianz“ sagen, doch will ich in letzterer Bedeutung lieber von dem „skalaren Charakter“ einer Größe sprechen. — Das typische Beispiel einer solchen skalaren Größe ist nach den älteren Anschauungen die Dichtigkeit eines Körpers.

erster Stufe" oder kürzer, einen „kovarianten Vektor" und deutet die Kovarianz) durch Verwendung unterer Indizes an.*

Diese, ich möchte sagen „implizite Definition" des Transformationsgesetzes für kovariante Vektoren ist in der praktischen Handhabung der expliziten meist überlegen. Doch wollen wir diese hier auch noch anmerken:

Zusatz. — *Das durch die Forderung* (6) *festgelegte Transformationsgesetz für die Komponenten eines kovarianten Vektors lautet explizit dargestellt:*

$$7) \qquad \bar{u}_i = \sum_k \breve{\alpha}_i^k \, u_k \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

wo die $\breve{\alpha}_i^k$ *die zu den* $\breve{\alpha}_k^i = \dfrac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_k}$ *reziproken Koeffizienten sind:*

$$7') \qquad \breve{\alpha}_i^k = \frac{\text{Unterdeterminante von } \alpha_k^i}{\text{Determinante } |\alpha|} = \frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_i},$$

wie letzteres sofort durch Auflösung der Gleichungen (2′) *folgt. — Für diese Größen* $\breve{\alpha}_i^k$ *gelten die Beziehungen:*

$$7'') \qquad \sum_\varrho \alpha_\varrho^i \breve{\alpha}_k^\varrho = \sum_\varrho \alpha_k^\varrho \breve{\alpha}_\varrho^i = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq k \\ 1 & \text{„ } i = k \end{cases} \qquad \text{[vgl. (12″) S. 198].}$$

Nun wollen wir einmal annehmen, die n-dimensionale Mannigfaltigkeit besäße eine Metrik, die ihr durch eine metrische Fundamentalform $\sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu$ aufgeprägt sei. Auch diese Form hat einen vom Bezugssystem unabhängigen Wert, betrachteten wir sie doch als Maß für den Unterschied zweier Punkte (x_i) und $(x_i + dx_i)$ der Mannigfaltigkeit. Demgemäß traten auch früher stets im neuen System an die Stelle der g_{ik} gewisse Größen $\bar{g}_{ik}$, die durch „Umrechnen" der Form entstanden, so daß

$$\sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu = \sum_{\mu,\nu} \bar{g}_{\mu\nu}\, d\bar{x}_\mu\, d\bar{x}_\nu \qquad (\text{also} = \text{Sk})$$

ist. Dann folgt aber leicht unter Berücksichtigung von $g_{ik} = g_{ki}$, daß, wenn ξ^i und η^i irgend zwei beliebige kontravariante Vektoren sind, auch

$$8) \qquad \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}\, \xi^\mu\, \eta^\nu = \sum_{\mu,\nu} \bar{g}_{\mu\nu}\, \bar{\xi}^\mu\, \bar{\eta}^\nu \qquad (= \text{Sk})$$

ist, da sich ja die ξ^i und η^i genau ebenso transformieren wie die dx_i [vgl. (3) S. 203]. Diese letztere Gleichung kann man dann auch folgendermaßen schreiben:

$$\sum_\nu \left(\sum_\mu g_{\mu\nu}\, \xi^\mu \right) \eta^\nu = \text{Sk},$$

aus der wegen der Willkürlichkeit des Vektors η^i nach (6) sofort folgt:

Satz I. — *Ist für die n-dimensionale Mannigfaltigkeit eine Maßbestimmung gegeben durch das „Quadrat des Linienelementes"*

$$9) \qquad ds^2 = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu \qquad (g_{ki} = g_{ik}),$$

*) Das Wort „Kovarianz" hat hier natürlich eine ganz andere Bedeutung wie früher [vgl. S. 155].

und bezeichnet (ξ^k) einen beliebigen kontravarianten Vektor, so sind die Größen

$$10) \qquad \xi_i = \sum_\sigma g_{i\sigma}\,\xi^\sigma \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

die Komponenten eines kovarianten Vektors. — Man sagt, es seien die „kovarianten Komponenten" desselben Vektors. — Der Zusammenhang zwischen den kovarianten und den kontravarianten Komponenten desselben Vektors läßt sich dann auch folgendermaßen darstellen:

$$10') \qquad \xi^k = \sum_\varrho g^{k\varrho}\,\xi_\varrho \qquad (k = 1, 2 \ldots n) \qquad \text{[vgl. (12) S. 197]}.$$

Wenn wir sagen, die Größen (10) bildeten einen kovarianten Vektor, so heißt das, um es nochmals hervorzuheben, nichts anderes, als daß die entsprechenden Größen in anderen Bezugssystemen $\bar\xi_i = \sum_\sigma \bar g_{i\sigma}\,\bar\xi^\sigma$ mit ihnen mittels des Transformationsgesetztes für kovariante Vektoren zusammenhängen:

$$\bar\xi_i = \sum_k \alpha_i^k\,\xi_k \qquad (i = 1, 2 \ldots n) \qquad \text{[vgl. (7)]}. —$$

Nun gehen wir von den Tensoren erster Stufe, die wir auch hier bei beliebig ausgedehnten Mannigfaltigkeiten „Vektoren" nannten, über zu den Tensoren höherer Stufe: Wie wir oben in (6) die kovarianten Vektoren definierten als die Koeffizienten einer skalaren Linearform kontravarianter Vektoren (mit bereits bekanntem Transformationsgesetz), so wollen wir jetzt Tensoren höherer Ordnung definieren als Koeffizienten skalarer Formen höherer Ordnung, und zwar von Formen (homogenen Funktionen) von kontravarianten und kovarianten Vektoren. Die nähere Art der Bezeichnungsweise ist aus dem folgenden Satze ersichtlich:

Definition von Tensoren höherer Stufe. — *Als Tensoren bezeichnet man allgemein die Koeffizienten skalarer Formen der Komponenten kontravarianter und kovarianter Vektoren. So sagt man z. B., wenn für ganz beliebige kontravariante Vektoren $(\xi^i), (\eta^i), (\zeta^i)$*

$$11_1) \qquad \sum_{\lambda,\mu,\nu} A_{\lambda\mu\nu}\,\xi^\lambda \eta^\mu \zeta^\nu = \mathrm{Sk}$$

ist, die n^3 Größen $A_{\lambda\mu\nu}$ bildeten einen „kovarianten Tensor dritter Stufe"; oder falls für beliebige kovariante Vektoren (u_i) und (v_i)

$$11_2) \qquad \sum_{\varrho,\sigma} B^{\varrho\sigma}\,u_\varrho v_\sigma = \mathrm{Sk}$$

ist, so bezeichnet man den Inbegriff der n^2 Größen $B^{\varrho\sigma}$ als einen „kontravarianten Tensor zweiter Stufe"; oder drittens, wenn

$$11_3) \qquad \sum_{\lambda,\mu,\nu,\varrho,\sigma} C^{\varrho\sigma}_{\lambda\mu\nu}\,\xi^\lambda \eta^\mu \zeta^\nu\,u_\varrho v_\sigma = \mathrm{Sk}, \qquad (\xi, \eta, \zeta, u, v \text{ beliebige Vektoren})$$

ist, spricht man von den n^5 Komponenten $C^{\varrho\sigma}_{\lambda\mu\nu}$ eines „gemischten" Tensors, 5ter Stufe, der in den 3 Indizes λ, μ, ν kovariant, in den 2 Indizes ϱ, σ kontravariant ist.

Durch diese Forderungen (11) sind tatsächlich die Trans-

formationsgesetze der Größen A bzw. B und C völlig bestimmt. An Stelle von (11_1) kann man z. B. schreiben:

$$\sum_{\lambda,\mu,\nu} A_{\lambda\mu\nu}\,\xi^\lambda\,\eta^\mu\,\zeta^\nu = \sum \overline{A}_{\lambda\mu\nu}\,\overline{\xi}^\lambda\,\overline{\eta}^\mu\,\overline{\zeta}^\nu,$$

und, da die Gesetze, nach denen die ξ, η, ζ sich in $\overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{\zeta}$ transformieren, bekannt sind, so ist durch diese Forderung für jene Produktsumme auch das Transformationsgesetz für die letzten Faktoren eindeutig festgelegt, wie wir das oben in einem ähnlichen, wenn auch einfacheren, Falle darlegten. Doch möchte ich hier auf die explizite Darstellung dieser Transformationsgesetze nicht eingehen. —

Bei Annahme einer Metrik in der betrachteten Mannigfaltigkeit kann man auch bei einem Tensor höherer Stufe von verschiedenen Arten seiner Komponenten sprechen, die sich durch die Ordnungen der Kovarianz und Kontravarianz unterscheiden. Wenn z. B. die Forderung (11_3) für beliebige kontravariante Vektoren $(\xi^i), (\eta^i), (\zeta^i)$ und kovariante Vektoren $(u_i), (v_i)$ gelten soll, so kann man auch für die u_i die kovarianten Komponenten eines beliebigen, ursprünglich kontravariant gegebenen Vektors (u^k) einsetzen [vgl. (10)]. Dann muß auch

$$\sum_{\lambda,\mu,\nu,\varrho,\sigma} C^{\varrho\sigma}_{\lambda\mu\nu}\,\xi^\lambda\,\eta^\mu\,\zeta^\nu \left(\sum_k g_{\varrho k}\,u^k\right) v_\sigma = \sum_{\lambda,\mu,\nu,k,\sigma} \left(\sum_\varrho C^{\varrho\sigma}_{\lambda\mu\nu}\,g_{\varrho k}\right) \xi^\lambda\,\eta^\mu\,\zeta^\nu\,u^k\,v_\sigma = \mathrm{Sk}$$

sein, und daraus folgt dann, daß die Summe nach ϱ die Komponenten wieder eines Tensors 5ter Stufe darstellen, der aber jetzt in den 4 Indizes λ, μ, ν, k kovariant und nur in σ kontravariant ist; man schreibt daher für sie $C^\sigma_{\lambda\mu\nu k}$.

Zusatz. — *Man sagt, die Summen*

(12) $$C^\sigma_{\lambda\mu\nu k} = \sum_\varrho C^{\varrho\sigma}_{\lambda\mu\nu}\,g_{\varrho k} \qquad (\lambda, \mu, \nu, k, \sigma = 1, 2 \ldots\ldots n)$$

seien die 4-fach kovarianten und einfach kontravarianten Komponenten des ursprünglich 3fach kovarianten und 2-fach kontravarianten Tensors 5ter Stufe $C^{\varrho\sigma}_{\lambda\mu\nu}$.

Analog könnte man mittels (10′) auch den Tensorcharakter der Größen

(12′) $$C^{\varrho\sigma\tau}_{\lambda\mu} = \sum_\nu g^{\tau\nu}\,C^{\varrho\sigma}_{\lambda\mu\nu}$$

d daß sie nur 2-fach kovariant und 3-fach kontravariant sind. Formeln (12′) und (12) liegen, wie man sagt, die *Regeln d Senkung der Indizes mittels der Koeffizienten amentalform.* —

abstrakten Definitionen wollen wir jetzt einige behandeln: Da lehrt Formel (8) sofort das *n* g_{ik} *der metrischen Fundamentalform, oder* $(n = 4)$ *die Gravitationspotentiale, einen den („kovarianter Fundamentaltensor").* ksweise für das Transformations- formulierten: die Gravitations- em wären die Koeffizienten der ntalform [vgl. S. 166]. sgesetz der zu den g_{ik} reziproken ht ähnlich einfach aussprechen: n und multiplizieren sie mit den

Komponenten eines beliebigen kovarianten Vektors (u_i) und summieren, um so zu erhalten:

$$\sum_{\varrho,k} g^{k\varrho}\,\xi_\varrho\,w_k = \sum_k \xi^k\,u_k,$$

und dafür können wir nach (6) auch schreiben:

$$\sum_{\varrho,k} g^{k\varrho}\,\xi_\varrho\,u_k = \mathrm{Sk} \qquad (\xi \text{ und } u \text{ beliebig}),$$

woraus nach unserer allgemeinen Definition folgt: *Die zu den Koeffizienten g_{ik} der metrischen Fundamentalform reziproken Koeffizienten g^{ik} bilden einen kontravarianten Tensor zweiter Stufe*) („kontravarianter Fundamentaltensor").*

Einen besonders einfachen Tensor lehrt uns die zur Definition kovarianter Vektoren (u_i) benutzte und daher auch für beliebige solche Vektoren gültige Gleichung (6) kennen. Setzen wir

$$13) \qquad \delta_k^i = \begin{cases} 0 \text{ falls } i \neq k \\ 1 \quad „ \quad i = k, \end{cases}$$

so können wir jene Gleichung auch so schreiben:

$$\sum_i u_i\,\xi^i = \sum_{i,k} \delta_k^i\,u_i\,\xi^k = \mathrm{Sk} \qquad (\xi \text{ und } u \text{ beliebig}),$$

und hieraus entnehmen wir, daß *das Größensystem* (13) *der δ_k^i einen gemischtenTensor zweiter Stufe darstellt („gemischter Fundamentaltensor").*

Andere einfache Tensoren erhält man durch Produktbildungen aus Tensoren niederer Stufe. Bilden wir z. B. mit den Komponenten u_i, v_i zweier kovarianter Vektoren (Tensoren erster Stufe) die n^2 Produkte

$$P_{ik} = u_i\,v_k \qquad (i,k = 1,2 \ldots n),$$

so ist bei beliebigen kontravarianten Hilfsvektoren (ξ^i) und (η^i)

$$\sum_{i,k} P_{ik}\,\xi^i\,\eta^k = \Big(\sum_i u_i\,\xi^i\Big)\cdot\Big(\sum_k v_k\,\eta^k\Big) = \mathrm{Sk},$$

da beide Faktoren einzeln skalare Größen sind; so folgt denn das erste der drei Resultate, die wir zusammenfassen in

Satz 2. — *Bildet man mit den kovarianten bzw. kontravarianten Komponenten irgend zweier Vektoren u und v die je n^2 Produkte*

$$14) \qquad P_{ik} = u_i\,v_k, \qquad P_k^i = u^i\,v_k, \qquad P^{ik} = u^i\,v^k,$$

so stellen die Systeme dieser einen kovarianten, einen gemischten, einen kontravarianten Tensor zweiter Stufe dar.

Dieses Prinzip, Tensoren durch Produktbildung [illegible] sich in leicht ersichtlicher Weise noch verallgemeinern: [illegible] (U_{ik}) ein beliebiger kovarianter Tensor zweiter Stufe und v^λ ein kontravarianter Vektor; bildet man dann

$$14') \qquad Q_{ik}^\lambda = U_{ik}\,v^\lambda$$

so ist wieder bei beliebigen Hilfs[illegible]

$$\sum_{i,k,\lambda} Q_{ik}^\lambda\,\xi^i\,\eta^k\,\zeta_\lambda = \Big(\sum_{i,k}$$

---

*) So erklärt sich auch die früher [illegible] Schreibweise mit 2 oberen Indizes [vgl.